$SL_2(\mathbb{F}_q)$ の表現論

Abstract

与えられた群の既約表現を分類して指標表を作成することは表現論の 1 つの課題である。本稿では主役を $SL_2(\mathbb{F}_q)$ としてその課題に取組む。まず共役類を分類することから始め、次にハリッシュ・チャンドラ誘導 (Harish-Chandra induction) によって得られる $SL_2(\mathbb{F}_q)$ の既約表現をパラメトライズした。最後はさらにその既約表現の指標を計算した。指標を計算する際に各既約表現ごとにガウス和や $\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_q)$ などが登場し代数的だけでなく数論的、幾何的なテクニックを使うところに表現論らしさが垣間見える。それを楽しんで頂ければ幸いである。

Chapter1　$SL_2(\mathbb{F}_q)$ の構造 (Structure of $SL_2(\mathbb{F}_q)$)

1.1　記法 (Notation)

1.1.1　$\mathbb{F}_q$ の定義

p を奇素数とする。このとき $\mathbb{F}_p$ を $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ と同型な体[1]とする。$q = p^n$ $(n \in \mathbb{N})$ とする。このとき $\mathbb{F}_q$ を

$$\mathbb{F}_q := \left\{ \alpha \in \overline{\mathbb{F}_p} \;\middle|\; \alpha^q = \alpha \right\}$$

と定義する。ただし $\overline{\mathbb{F}}_p$ は $\mathbb{F}_p$ の代数閉体である。

1.1.2　$SL_2(\mathbb{F}_q)$ の定義とその他の記号

群 G を

$$G = SL_2(\mathbb{F}_q) = \left\{ \begin{pmatrix} x & z \\ y & t \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{F}_q) \middle| xt - yz = 1 \right\}$$

とする。また $\overline{\mathbb{F}}_p^\times$ における 1 の n 乗根からなる群を μ_n とかく。

$$\mu_n = \left\{ \xi \in \overline{\mathbb{F}}_p^\times \middle| \xi^n = 1 \right\}$$

さらにトレースとノルムをそれぞれ

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Tr}_2 : \mathbb{F}_{q^2} & \longrightarrow & \mathbb{F}_q \ , \ \xi \longmapsto \xi + \xi^q \\ \mathrm{N}_2 : \mathbb{F}_{q^2}^\times & \longrightarrow & \mathbb{F}_q^\times \ , \ \xi \longmapsto \xi^{q+1} \end{array}$$

と表す。

1.2　特別な部分群 (Special Subgroups)

1.2.1　ブリュア分解 (Bruhat Decompotition)

B を G の上三角行列全体からなる G の部分群とする。

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} a & x \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \middle| a \in \mathbb{F}_q^\times, x \in \mathbb{F}_q \right\}$$

[1] このような体を有限素体と呼ぶ。

次に

$$\begin{aligned} T &= \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \in G \middle| a \in \mathbb{F}_q^\times \right\} \\ U &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G \middle| x \in \mathbb{F}_q \right\} \end{aligned}$$

という 2 つの G の部分群を考える。このとき $B = T \ltimes U$ である。

$$\begin{array}{ccc} T \times U & \longrightarrow & B \\ \left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) & \longmapsto & \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & ax \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \end{array} \quad \text{(全射)}$$

T と U は次と同型である。

$$\begin{aligned} d : \mathbb{F}_q^* &\xrightarrow{\sim} T \ , \ a \mapsto \mathrm{diag}(a, a^{-1}) \\ u : \mathbb{F}_q^+ &\xrightarrow{\sim} U \ , \ x \mapsto \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

命題 1.2.1

(a) 群 T, U はアーベル群であり群 B は可解である。
(b) $a \in \mathbb{F}_q^\times, x \in \mathbb{F}_q$ を任意にとる。このとき $d(a)u(x)d(a)^{-1} = u(a^2 x)$

Proof.
(a) $x, y \in \mathbb{F}_q$ を任意にとる。このとき $u(x)u(y) = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x+y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & y+x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = u(y)u(x)$ ゆえに U はアーベル群である。B は T と U の半直積であるので短完全列 $1 \longrightarrow U \longrightarrow B \longrightarrow T \longrightarrow 1$ が与えられる。T, U はアーベル群であるから B は可解である。

(b) は簡単な行列計算で示せる。□

$s = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ とする。このとき

$$\begin{aligned} s^2 &= -I_2 \\ sd(a)s^{-1} &= d(a^{-1}) \end{aligned}$$

が成り立つ。特に s は T を正規化する。

命題 1.2.2

(1)$G = B \sqcup BsB = B \sqcup UsB$ (Bruhat 分解)
(2)$B \cap {}^sB = B \cap sBs^{-1} = T$
(3)$BsBsB = G$

Proof.
(1) 任意に $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G \backslash B$ をとる。このとき $c \neq 0$ である。$s^{-1}u(-a/c)g \in B$ であることから $g \in UsB$ が従う。
(2) 簡単な計算で示せる。
(3)$X = BsBsB$ とする。X は B の両側の作用で保たれる。$I_2 \in B$ より $s^2 = -I_2 \in B$ である。このことから $X = B$ か $X = G$ のいずれかである。しかし $su(1)s \in X$ であり $su(1)s \notin B$ である。ゆえに $X = G$ □

$N = < T, s >$ とする。このとき次の短完全列

$$1 \longrightarrow T \longrightarrow N \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow 1$$

は分裂しない。実際、$N = T \sqcup sT$ であるので $\forall g = s \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -a^{-1} \\ a & 0 \end{pmatrix} \in sT = N \backslash T$ は $g^2 = -I_2$ を満たす。

1.2.2 非分裂トーラス (The Non-Split Torus)

$\mathbb{F}_q$-ベクトル空間 $\mathbb{F}_{q^2}$ の基底を決めると次の同型が誘導される。

$$d' : \ \mathrm{Aut}_{\mathbb{F}_q}(\mathbb{F}_{q^2}) \xrightarrow{\sim} GL_2(\mathbb{F}_q)$$

例えば、$\mathbb{F}_{q^2}$ の基底として $(1, z)$ を選んだとする。ただし z は $Tr_2(z) = 0$ を満たす 0 でない $\mathbb{F}_{q^2}$ の元とする。$\forall \xi \in \mathbb{F}_{q^2}$ は、ある $x, y \in \mathbb{F}_q$ があって $\xi = x \cdot 1 + y \cdot z$ とかける。このとき $\xi^q = (x+yz)^q = x^q + y^q z^q = x + yz^q = x - yz$ であることに注意する。

$$\xi \cdot (1, z) = (\xi, \xi z) = (x + yz, xz + yz^2) = (1, z) \begin{pmatrix} x & yz^2 \\ y & x \end{pmatrix} \tag{1}$$

$$\text{あとは } x, y \text{ を}\xi\text{で表せば良い。そうすると } d'(\xi) \text{ は} \tag{2}$$

$$d'(\xi) = \begin{pmatrix} \frac{\xi^q + \xi}{2} & \frac{z(\xi - \xi^q)}{2} \\ \frac{\xi - \xi^q}{2z} & \frac{\xi^q + \xi}{2} \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{F}_q) \ (\because det(d'(\xi)) = \xi^{1+q} \neq 0) \tag{3}$$

乗法群 $\mathbb{F}_q^\times$ は $\mathbb{F}_q$-ベクトル空間 $\mathbb{F}_{q^2}$ にかけ算で作用する。また $\mathbb{F}_q^\times$ は $GL_{\mathbb{F}_q}(\mathbb{F}_{q^2})$ の部分群と見なすことが出来る。$(\mathbb{F}_q^\times \ni \xi \leftrightarrow \begin{pmatrix} \xi & 0 \\ 0 & \xi \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{F}_q) \cong GL_{\mathbb{F}_q}(\mathbb{F}_{q^2}))$
今、$\xi \in \mathbb{F}_{q^2}^\times$ であるとき、

$$\mathrm{Tr}(d'(\xi)) = \quad \xi^q + \xi = Tr_2(\xi) \tag{4}$$

$$\det(d'(\xi)) = \quad \xi^{q+1} = N_2(\xi) \tag{5}$$

である。したがって $T' = d'(\mu_{q+1}) \subset G$ となる。G の部分群 T, T' をそれぞれ G の分裂トーラス (split torus)、非分裂トーラス (non-split torus) と呼ぶ。

$$d : \quad \mu_{q-1} = \mathbb{F}_q^\times \xrightarrow{\sim} T \tag{6}$$

$$d' : \quad \mu_{q+1} \xrightarrow{\sim} T' \tag{7}$$

フロベニウス自己同型写像 $F : \mathbb{F}_{q^2} \to \mathbb{F}_{q^2}, \xi \mapsto \xi^q$ は $\mathbb{F}_q$ 上の線型写像であり $F \in GL_{\mathbb{F}_q}(\mathbb{F}_{q^2})$ である。
$\widetilde{s'}$ を $\widetilde{s'} = d'(F) \ \left(= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right)$ とおく。$\widetilde{s'}$ は

$$\widetilde{s'}^2 = I_2 \quad \text{and} \quad \widetilde{s'} d'(\xi) \widetilde{s'}^{-1} = d'(\xi^q)$$

を満たす。
$\xi_0 \in \mathbb{F}_{q^2}^\times$ であって $N_2(\xi_0) = -1$ であるような元[2]を 1 つ固定する。さて、s' を

$$s' = d'(\xi_0) \widetilde{s'}$$

とする。$s'^2 \in G, \xi \in \mu_{q+1}$ であるとき、

$$s'^2 = -I_2 \quad \text{and} \quad s' d'(\xi) s'^{-1} = d'(\xi^q) = d'(\xi)^{-1}$$

特に、s' は T' を正規化する。$N' =< T', s' >$ とする。このとき以下の短完全列は分裂しない。実際、$N' = T' \sqcup T's'$ であるので $\forall g = d'(xi)s' \in T's' = N' \backslash T'$ は

$$\begin{aligned} g^2 &= d'(\xi) s' d'(\xi) s' \\ &= d'(\xi) d'(\xi)^{-1} s' s' \qquad \because s' d'(\xi) s'^{-1} = d'(\xi)^{-1} \\ &= s'^2 = -I_2 \end{aligned}$$

となり $g^2 = -I_2$ を満たす。

[2] N_2 が全射であることが ξ_0 の存在を保障する。[N_2 の全射性の証明] $\forall \eta \in \mathbb{F}_q^\times$ に対して $\xi^{q+1} = \eta$ を満たすような元 $\xi \in \overline{\mathbb{F}_q}^\times$ をとる。このとき $\xi^{q^2} = (\xi^q)^q = (\eta \xi^{-1})^q = \eta \xi^{-1} = \xi$ である。したがって $\xi \in \mathbb{F}_{q^2}^\times$ となり N_2 は全射。

1.3 正規部分群 (Distingushed Subgroup)

G の中心は $\{I_2, -I_2\}$ であることは容易に分かる。簡単のため G の中心を Z で表すことにする。これから $q>3$ のとき G/Z が単純であること示したい。その為には以下、２つの補題が必要だ。

補題 1.3.1

G は U と sUs^{-1} で生成される。特に $G=<U,s>$ である。

Proof.
$H=<U,sUs^{-1}>$ とする。命題 1.2.2 の (1) により $s\in H$ と $T\subseteq H$ を示せば十分である。 前者は

$$s=u(-1)(su(-1)s^{-1})u(-1)\in H$$

で良い。後者は $\forall a\in\mathbb{F}_q^\times$ のとき、

$$d(a)=u(a)(su(-a^{-1})s^{-1})u(a)s\in H$$

となりいえた。

補題 1.3.2

$$\bigcap_{g\in G} gBg^{-1}=Z$$

Proof.
$H=\bigcap_{g\in G} gBg^{-1}$ とする。$Z\subseteq H$ は明らか。一方、$B\cap sBs^{-1}=T$ が成り立つ。$u=u(1)$ とすれば $uTu^{-1}\cap T=Z$ であることが確かめられる。この結果から $H=Z$ が従う。 □

定理 1.3.3

(a) $q>3$ とする。このとき $D(G)=G$ であって Z は G の唯一の非自明な正規部分群である。特に、G/Z は単純である。
(b) $q=3$ とする。G の非自明な正規部分群は Z と N' である。さらに $G=N'\rtimes U$ であり $D(G)=N'$ である。

Proof.
(a) $q>3$ とする。このとき、$a^2\neq 1$ であるような元 $a\in\mathbb{F}_q^\times$ が存在する。今、$x\in\mathbb{F}_q$ であるとする。このとき、命題 1.2.1(b) より $[d(a),u(x)]=u((a^2-1)x)$ となる。これは$U\subseteq D(G)$ であることを示している。また $A=\begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & a\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1\end{pmatrix}$ のとき $[A,B]=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ (a^2-1)x & 1\end{pmatrix}$ となる。これは $sUs^{-1}\subset D(G)$ であることを意味する。以上のことと補題 1.3.1 によって $D(G)=G$ が示された。次に、H を G の非自明な正規部分群とする。もし $H\subset B$ ならば $H\subset\bigcap_{g\in G} gBg^{-1}$ である[3]。補題 1.3.2 より $H\subseteq Z$ となる。もし $H\not\subset B$ だとする。$G'=BH$ とするとき、これは G の部分群になっていて B を真に含んでいる。そして $G=B\sqcup BsB$(Bruhat decomposition) によって $G=G'$ であることがわかった。よって $G/H\cong B/(B\cap H)$ である。$D(G)=G$ から $D(G/H)=G/H$[4] であるので $D(B/(B\cap H))=B/(B\cap H)$ が言える。B は可解であるので $B/(B\cap H)$ も可解である。従って $B\cap H=B$ となる。つまり $B\subset H$ である。それから $G=BH\subseteq HH=H$ が言えて、$G=H$ である。
(b) 略。 □

1.4 共役類 (Conjugacy Classes)

1.4.1 中心 (Centraliser)

$g\in G$ と可換な G の元を全て集めてきた集合を $C_G(g):=\{x\in G|xg=gx\}$ とかく。これは G の部分群になり、g の中心化群と呼ばれている。また H を G の部分群とする。このとき $N_G(H):=\{g\in G|gHg^{-1}=H\}$ と定義しこれを H の正規化群と呼ぶ。

[3] $\forall h\in H$ に対して H の正規性から $g^{-1}hg\in H(\forall g\in G)$ である。今 $H\subset B$ より $g^{-1}Hg\in B$ である。従って $h\in gHg^{-1}$ となり $H\subset\bigcap_{g\in G} gBg^{-1}$ が言えた。

[4] $D(G/H)\subset G/H$ は明らか。$gH\in G/H$ を任意にとる。このとき $D(G)=G$ からある $g_1,g_2\in G$ があって $gH=g_1g_2g_1^{-1}g_2^{-1}H$ とかける。$gH=g_1g_2g_1^{-1}g_2^{-1}H=(g_1H)(g_2H)(g_1^{-1}H)(g_2^{-1}H)\in D(G/H)$ だから $G/H\subset D(G/H)$ となる。以上から $D(G/H)=G/H$ が言えた。

命題 1.4.1

$g \in G$ とする。このとき
(a) もし $g \in \{I_2, -I_2\}$ ならば、$C_G(g) = G$ である。
(b) もし $g \in U \backslash \{I_2\}$ ならば、$C_G(g) = \{I_2, -I_2\} \times U = ZU$ である。
(c) もし $g = d(a), a \in \mu_{q-1} \backslash \{\pm 1\}$ ならば、$C_G(g) = T$ である。
(d) もし $g = d'(\xi), \xi \in \mu_{q+1} \backslash \{\pm 1\}$ ならば、$C_G(g) = T'$ である。

Proof.
(a). 明らか。
(b).$u(x) \in U \backslash \{I_2\}, g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G$ とする。今、$x \neq 0$ である。

$$u(x)g = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + xc & b + xd \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$gu(x) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & ax + b \\ c & cx + d \end{pmatrix}$$

それぞれ成分を比較して、
$\cdot\ a + xc = a \xrightarrow{\mathbb{F}_q \text{は体で}, x \neq 0} xc = 0 \Rightarrow c = 0$
$\cdot\ b + xd = ax + b \Leftrightarrow xd = ax \Leftrightarrow x(d - a) = 0 \xrightarrow{\mathbb{F}_q \text{は体で}, x \neq 0} d - a = 0 \Leftrightarrow d = a$
$\cdot\ det(g) = ad - bc = a^2 = 1 \Leftrightarrow a = \pm 1$
以上 3 点より $g = \begin{pmatrix} \pm 1 & x \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$
(c).$d(x)\ with.\ x \in \mu_{q-1} \backslash \{1, -1\}, g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G$ とする。

$$d(x)g = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax & bx \\ cx^{-1} & dx^{-1} \end{pmatrix}$$

$$gd(x) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax & bx^{-1} \\ cx & dx^{-1} \end{pmatrix}$$

それぞれ成分を比較して、
$\cdot\ bx = bx^{-1}$
$b \neq 0$ のとき $x = x^{-1}$ となり $x = \pm 1$ となる。これは $x \in \mu_{q-1} \backslash \{\pm 1\}$ に反する。ゆえに $b = 0$ である。c についても同様の議論から $c = 0$ であることが分かる。
$\cdot\ det(g) = ad - bc = ad = 1$
このことから $d = a^{-1}$ であることがわかる。
以上のことから $g = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$
(d). $C_G(d'(\xi)) = T'$ を示すには $C_{GL_{\mathbb{F}_{\shortparallel}(\mathbb{F}_{q^2})}}(\xi) = \mathbb{F}_{q^2}^{\times} \cdots \heartsuit$ を示せば良い。何故ならば、$d' :\ GL_{\mathbb{F}_q}(\mathbb{F}_{q^2}) \xrightarrow{\sim} GL_2(\mathbb{F}_q)$ によって $\heartsuit$ は $C_{GL_2(\mathbb{F}_q)}(d'(\xi)) = d'(\mathbb{F}_{q^2}^{\times})$ となる[5]。$\forall \eta \in \mathbb{F}_{q^2}^{\times}$ としたとき $\eta\xi = \xi\eta$ である。$d'(\eta\xi) = d'(\xi\eta) \Leftrightarrow d'(\eta)d'(\xi) = d'(\xi)d'(\eta)$ で $d'(\eta)$ が $SL_2((F_q))$ の元であるには $\eta \in \mu_{q+1}$ となる必要がある。一方、$g \in C_{GL_2(\mathbb{F}_q)}(d'(\xi))$ としたとき、$gd'(\xi) = d'(\xi)g$ であり $\heartsuit$ を認めれば、$g = d'(\eta)$ とかける。$d'(\eta)$ が $SL_2((F_q))$ の元であるには $\eta \in \mu_{q+1}$ となる必要がある。
さて $\heartsuit$ の証明をしよう。
$C_{GL_{\mathbb{F}_{\shortparallel}(\mathbb{F}_{q^2})}}(\xi) \supset \mathbb{F}_{q^2}^{\times}$ は明らか。一方、$g \in C_{GL_{\mathbb{F}_{\shortparallel}(\mathbb{F}_{q^2})}}(\xi)$ とする。このとき $g\xi = \xi g$ である。$\xi_0 := g(1) \in \mathbb{F}_{q^2}^{\times}, \forall a, b \in \mathbb{F}_q$ とする。

$$\begin{aligned} g(a + b\xi) &= g(a) + g(b) \\ &= ag(1) + bg(\xi) \\ &= ag(1) + bg(\xi \cdot 1) \\ &= ag(1) + b\xi g(1) \\ &= \xi_0(a + b\xi) \end{aligned}$$

[5] 一般に群 G, G' に対して同型写像 $\phi : G \to G'$ があったとき $H = C_G(g)$ とすると $C_{G'}(\phi(g)) = \phi(H)$ が成り立つ

$\xi \in \mu_{q+1} \backslash \{\pm 1\}$ であるから $\xi^q = \xi^{-1} \neq \xi$ より $\xi \notin \mathbb{F}_q$ ゆえに $\mathbb{F}_{q^2} = \mathbb{F}_q \oplus \mathbb{F}_q \xi$ したがって $g = \xi_0 \in \mathbb{F}_{q^2}^\times$ □

系 1.4.2

(a).$q > 3$ のとき $C_G(T) = T$ であって $N_G(T) = N$ である。また $q = 3$ のとき $T = Z = \{\pm I_2\}$ であって $N_G(T) = C_G(T) = G$ である。
(b).$C_G(T') = T'$ であり $N_G(T') = N'$ である。

Proof.
$q = 3$ のときは簡単に示せる。$q > 3$ とする。$C_G(T) = T$ を示す。$T \subset C_G(T)$ は明らか。$g \in C_G(T)$ をとる。$q > 3$ なので $\mathbb{F}_q^\times$ の元であって $\neq \pm 1$ である元 a がある。このとき g は $d(a) \in T$ と可換である。したがって命題 1.4.1(c) により $g \in T$ である。これで $C_G(T) = T$ が言えた。
次に $N_G(T) = N$ を示す。$N = T \sqcup sT$ であり $T \subset N_G(T)$ は明らかなので $sT \subset N_G(T)$ を示す。$sd(a) \in sT, d(b) \in T$ を任意にとる。このとき

$$\begin{aligned} sd(a)d(b)(sd(a))^{-1} &= sd(a)d(b)d(a)^{-1}s^{-1} \\ &= sd(aba^{-1})s^{-1} \\ &= sd(d)s^{-1} \\ &= d(b^{-1})ss^{-1} \\ &= d(b^{-1}) \in T \subset N \end{aligned}$$

となり $N \subset N_G(T)$ が言えた。一方、$\forall g \in N_G(T)$ とするとき、ある $d(b) \in T$ があって $gd(a)g^{-1} = d(b)$ を満たす。このような $d(b)$ は $a = b$ か $a = b^{-1}$ のいずれかしかない[6]。
もし $a = b$ のとき命題??(c) により $g \in T$ である。また、もし $a = b^{-1}$ ならば $g = st$ $(t \in T)$ は $(sg)d(a)(sg)^{-1} = d(a^{-1})$ を満たす。したがって $g = st \in sT \subset N$ である。
(b). (a) の証明と同様の方法で示せるので略。

1.4.2 パラメーター付け (Parametrisation)

$\overline{\mathbb{F}}_p^\times$ における関係 "$\equiv$" を $x \equiv y \overset{def}{\Longleftrightarrow} y \in \{x, x^{-1}\}$ と定義する。これは同値関係である。さて、非平方数である $\mathbb{F}_q$ の元 z_0 を一つ固定する。(q は奇素数だから z_0 のような元がある。) また G の元 u_+, u_- を

$$u_+ = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad u_- = \begin{pmatrix} 1 & z_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とする。

定理 1.4.3

G は $q + 4$ 個の共役類をもつ。また

$$\{I_2, -I_2\} \cup \{u_+, u_-, -u_+, -u_-\} \cup \{d(a) | a \in [(\mu_{q-1} \backslash \{\pm 1\}) / \equiv]\} \cup \{d'(\xi) | \xi \in [(\mu_{q+1} \backslash \{\pm 1\}) / \equiv]\}$$

によって完全代表系が与えられる。

Proof.1.
$\mathscr{E} = \{I_2, -I_2\} \cup \{u_+, u_-, -u_+, -u_-\} \cup \{d(a) | a \in [(\mu_{q-1} \backslash \{\pm 1\}) / \equiv]\} \cup \{d'(\xi) | \xi \in [(\mu_{q+1} \backslash \{\pm 1\}) / \equiv]\}$ とする。$\mathscr{E}$ の異なる 2 つの元 g, g' を取ったときそれらが G において共役でないことを示す。実際、ほとんどの場合 $GL_2(\mathbb{F}_q)$ で共役でない[7]。もっとも注意すべきは u_+ と u_-($-u_+$ と $-u_-$) が G において共役でないことである。今からそれを示す。
今、$hu_+h^{-1} = u_-$ となる $h \in G$ が存在すると仮定する。$Ker(u_+ - I_2) = Ker(u_- - I_2) = \mathbb{F}_q \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ であり、h は直線 $\mathbb{F}_q \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ を保つ。したがって $h \in B$ であることが分かる。$h = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$ と書けているとすると簡単な計算によって $z_0 = a^2$ となるが、これは z_0 が非平方数であることに反する。よって示せた。□
Proof.2.

[6] それは簡単な計算でわかる
[7] $\overline{\mathbb{F}_p}$ 上の固有値をそれぞれ比較することで分かる。

$Cl_G(g)$ を G における共役類とする。

$$\sum_{g\in\varepsilon}|Cl_G(g)| = |G|$$

を示せば十分である。命題 1.4.1 によって

$$\begin{aligned}\sum_{g\in\varepsilon}|Cl_G(g)| &= \sum_{g\in\varepsilon}\frac{|G|}{|C_G(g)|}\\ &= 2+4\times\frac{(q-1)(q+1)}{2}+\frac{q-3}{2}\times q(q+1)+\frac{q-1}{2}\times q(q-1)\\ &= q(q-1)(q+1)\\ &= |G|\end{aligned}$$

となり示せた。□

Table 1: 共役類

代表元 (Representative)	$\pm I_2$	d(a) $a\in\mu_{q-1}\backslash\{\pm1\}$	d'(ξ) $\xi\in\mu_{q+1}\backslash\{\pm1\}$	$\left(\begin{smallmatrix}\varepsilon & a\\ 0 & \varepsilon\end{smallmatrix}\right)$ $\varepsilon\in\{\pm1\}, a\in\mathbb{F}_q^\times$
類の数 (Number of claes)	2	$\frac{q-3}{2}$	$\frac{q-1}{2}$	4
位数 (Order)	$o(\pm1)$	$o(a)$	$o(\xi)$	$p\cdot o(\varepsilon)$
中心 (Centraliser)	G	T	T'	ZU

Chapter2　ドリンフェルト曲線の幾何 (The Geometry of the Drinfeld Curve)

この章では簡単のため $\mathbb{F}=\overline{\mathbb{F}}_p$ とする。$\mathbf{Y}$ をドリンフェルト曲線 (Drinfeld Curve) とする。

$$\mathbf{Y}=\{(x,y)\in\mathbf{A}^2(\mathbb{F})|xy^q-yx^q=1\}$$

これは以下を満たす。

- G は $\mathbf{A}^2(\mathbb{F})$ に線型に作用し $(g\cdot(x,y)=(ax+by,cx+dy), g=\left(\begin{smallmatrix}a & b\\ c & d\end{smallmatrix}\right))$ さらに $\mathbf{Y}$ を保つ。
- μ_{q+1} は $\mathbf{A}^2(\mathbb{F})$ に作用し $(\xi\cdot(x,y)=(\xi x,\xi y), \xi\in\mu_{q+1})$ さらに $\mathbf{Y}$ を保つ。
- フロベニウス自己準同型 $F:\mathbf{A}^2(\mathbb{F})\longrightarrow\mathbf{A}^2(\mathbb{F}),(x,y)\longmapsto(x^q,y^q)$ は $\mathbf{Y}$ を保つ。

さらに、$g\in G,\xi\in\mu_{q+1}$ のとき $\mathbf{A}^2(\mathbb{F})$ または $\mathbf{Y}$ の自己準同型として

$$\begin{aligned}g\circ\xi &= \xi\circ g\\ g\circ F &= F\circ g\\ F\circ\xi &= \xi^{-1}\circ F\end{aligned}$$

となる。したがってモノイド

$$G\times(\mu_{q+1}\rtimes\langle F\rangle_{mon})$$

が $\mathbf{A}^2(\mathbb{F})$ に作用し、さらに $\mathbf{Y}$ を保つことがわかる。

2.1　基本的な性質 (Elementary Properties)

命題 2.1.1

曲線 $\mathbf{Y}$ は affine で smooth かつ既約である。

Proof. $\mathbf{Y}$ は $\mathbf{A}^2(\mathbb{F})$ の閉じた部分空間だから affine。多項式 $f=xy^q-yx^q-1$ の微分によってヤコビアン $(f_x,f_y)=(y^q,-x^q)$ を得るが、$(0,0)\notin\mathbf{Y}$ より $\mathbf{Y}$ は smooth であることがわかる。最後に既約性を証明しよう。$(Z,T)=(\frac{X}{Y},\frac{1}{Y})$ と変数変換すると $XY^q-YX^q-1=\frac{1}{T^{q+1}}(Z-Z^q-T^{q+1})$ となり $Z-Z^q-T^{q+1}\in(\overline{\mathbb{F}}_q[Z])[T]$ である。Z は $\overline{\mathbb{F}}_q[Z]$ における素元であり、アイゼンシュタインの既約性判定法[8]により $Z-Z^q-T^{q+1}$ は既約。□

[8]適当な代数学の教科書を参照せよ

命題 2.1.2

G の $\mathbf{Y}$ への作用が freely。

Proof. $g \in G, (x,y) \in \mathbf{Y}$ であって $g \cdot (x,y) = (x,y)$ を満たすものを考える。このとき 1 は G の固有値であり適当な元 $P \in G$ で conjugate すれば $g = \left(\begin{smallmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ としてよい。このとき $g \cdot (x,y) = (x+ay, y)$ より $ay = 0$。しかし $y \neq 0$ より $a = 0$。□

命題 2.1.3

μ_{q+1} の $\mathbb{A}^2(\overline{\mathbb{F}}_q)\backslash\{(0,0)\}$ と $\mathbf{Y}$ への作用が freely。

Proof. 体上より明らか。□

しかしながら、$G \times \mu_{q+1}$ の $\mathbf{Y}$ への作用は freely でない。なぜなら $(-I_2, -1)$ は identity として $\mathbf{Y}$ に作用するからである。

2.2 Interesting Quotients

命題 2.2.1

V, W を smooth で既約な多様体で $\varphi : V \to W$ を多様体の射とし有限群 Γ が V に作用しているとする。以下の 3 つの性質を満たすと仮定したとき φ によって誘導された射 $\overline{\varphi} : V/\Gamma \to W$ は多様体の同型射になる。
(1). φ は全射。
(2). $\varphi(v) = \varphi(v') \Leftrightarrow \mathrm{Orb}_\Gamma(v) = \mathrm{Orb}_\Gamma(v')$
(3). ある元 $v_0 \in V$ が存在して、微分写像 $d\varphi_{v_0}$ は全射になる。

Proof. Borel の *Linear algebraic groups* の命題 6.6 をみよ。

2.2.1 Quotient by G

射

$$\begin{array}{rccc} \gamma : & \mathbf{Y} & \longrightarrow & \mathbb{A}^1(\mathbb{F}) \\ & (x,y) & \longmapsto & xy^{q^2} - yx^{q^2} \end{array}$$

は多様体の射であり、$\mu_{q+1} \rtimes \langle F \rangle_{mon}$ − 同変である (μ_{q+1} の $\mathbb{A}^1(\mathbb{F})$ への作用は $\xi \cdot z = \xi^2 z$ で、F の作用は $z \mapsto z^q$)。簡単な計算で γ が G 軌道上で constant($\gamma(g \cdot (x,y)) = \gamma(x,y)$) であることが示される。

定理 2.2.2

多様体の射 $\overline{\varphi} : \mathbf{Y}/G \to \mathbb{A}^1(\mathbb{F})$ は $\mu_{q+1} \rtimes \langle F \rangle_{mon}$-同変で同型射。

Proof. $\mu_{q+1} \rtimes \langle F \rangle_{mon}$-同変であることは簡単な計算で確かめられる。$\overline{\gamma}$ が同型であることを示す。そのためには命題 2.2.1 の (1),(2),(3) をチェックすればよい。まず (1),(2) から始める。$a \in \mathbb{A}^1(\mathbb{F})$ をとる。$|\gamma^{-1}(a)| = |G|$ を示せば十分である。$\gamma^{-1}(a) \ni (x,y)$ は $xy^{q^2} - yx^{q^2} = a, xy^q - yx^q = 1$ を満たす。$(z,t) = (x, y/x)$ と変数変換をして全単射 $\gamma^{-1}(a) \xrightarrow{\sim} \mathscr{E}_a$ を考える。

$$\mathscr{E}_a = \{(z,t) \in \mathbb{F}^\times \times \mathbb{F}^\times | t^q - t = \frac{1}{z^{q+1}}, t^{q^2} - t = \frac{a}{z^{q^2+1}}\}$$

また第 2 式は $t^{q^2} - 1 = (t^q - t)^q + (t^q - 1)$ によって $z^{q^2-1} - az^{q-1} + 1 = 0$ と書き換えられる。また z に関して微分することで重根がないことがわかる。ゆえに $|\mathscr{E}_a| = q(q^2-1) = |G|$ がいえた。最後に (3) を証明しよう。$v_0 = (x_0, y_0) \in \mathbf{Y}$ に対し $d_{v_0}(\gamma)$ の表現行列は $(y_0^{q^2}, -x_0^{q^2})$ でランクが 1 であることから従う。□

2.2.2 Quotient by U

射

$$\begin{array}{rccc} \upsilon : & \mathbf{Y} & \longrightarrow & \mathbb{A}^1(\mathbb{F})\backslash\{0\} \\ & (x,y) & \longmapsto & y \end{array}$$

は well-defined で多様体の射である。$\mu_{q+1} \rtimes \langle F \rangle$-同変である ($\mu_{q+1}$ の $\mathbb{A}^1(\mathbb{F})\backslash\{0\}$ への作用は $\xi \cdot z = \xi z$ で、F の作用は $z \mapsto z^q$ で与えられる)。また υ は U の軌道上で constant である。

定理 2.2.3

多様体の射 $\overline{\upsilon} : \mathbf{Y}/U \to \mathbb{A}^1(\mathbb{F})\backslash\{0\}$ は $\mu_{q+1} \rtimes \langle F \rangle$-同変で同型射である。

Proof. $\mu_{q+1} \rtimes \langle F \rangle$-同変は明らか。$\upsilon$ が全射であるのも明らか。

$$\upsilon(x,y) = \upsilon(x',y') \Leftrightarrow \exists u \in U, (x',y') = u \cdot (x,y)$$

も成り立つ。実際、$(x,y),(x',y') \in \mathbf{Y}$ で $y = y'$ であるような元を考えたとき、$\mathbf{Y}$ の関係式より

$$\left(\frac{x}{y}\right)^q - \frac{x}{y} = \left(\frac{x'}{y}\right)^q - \frac{x'}{y}$$

でありこれは $\frac{x'-x}{y} \in \mathbb{F}_q$ を意味する。今、$a = \frac{x'-x}{y} \in \mathbb{F}_q$ とすれば

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

となる。これで (2) が示され (3) はすぐに従う。□

2.2.3 Quotient by μ_{q+1}

射

$$\begin{array}{cccc} \pi : & \mathbf{Y} & \longrightarrow & \mathbb{P}^1(\mathbb{F})\backslash\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_p) \\ & (x,y) & \longmapsto & [x:y] \end{array}$$

は well-defined で多様体の射である。$G \times \langle F \rangle$-同変である ($G$ の $\mathbb{P}^1(\mathbb{F})\backslash\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_p)$ への作用は自然なもので、F の作用は $[x,y] \mapsto [x^q, y^q]$ で与えられる)。π は μ_{q+1} の軌道上で constant である。

定理 2.2.4

多様体の射 $\overline{\pi} : \mathbf{Y}/\mu_{q+1} \to \mathbb{P}^1(\mathbb{F})\backslash\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_p)$ は $G \times \langle F \rangle$-同変で同型射である。

Proof. $\forall [x,y] = [1,\alpha] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{F})\backslash\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_p)$ に対して $\xi^{q+1}(\alpha^q - \alpha) = 1$ を満たす ξ をとれば $xy^q - yx^q = 1, (x,y) = \xi(1,\alpha)$ を満たし π の全射性がいえる。(2) を示す。$\pi((x,y)) = \pi((x',y')) \Leftrightarrow [x,y] = [x',y'] \Leftrightarrow \xi \in \mathbb{F}^\times$ が存在して $(x,y) = \xi(x',y')$ を満たす。ここで $\mathbf{Y}$ の定義式から $xy^q - yx^q = 1 \Leftrightarrow \xi^{q+1}(x'y'^q - y'x'^q) = 1 \Leftrightarrow \xi^{q+1} = 1 \Leftrightarrow \xi \in \mu_{q+1}$ となり示された。

Chapter3　ハリッシュ・チャンドラ誘導 (Harish-Chandra Induction)

3.1　両側加群 (Bimodules)

K は標数 0 の体とする。Γ,Γ' を有限群とし、M を有限型の両側 $(K\Gamma, K\Gamma')$ 加群とする。M の双対 $M^* = \mathrm{Hom}(M,K)$ は自然な両側 $(K\Gamma', K\Gamma)$ 加群になる。さて次の２つの関手を定義する。

$$\begin{array}{cccc} \mathscr{F}_M : & K\Gamma' - \mathrm{mod} & \longrightarrow & K\Gamma - \mathrm{mod} \\ & V' & \longmapsto & M \otimes_{K\Gamma'} V' \end{array} \tag{8}$$

$$\begin{array}{cccc} {}^*\mathscr{F}_M : & K\Gamma - \mathrm{mod} & \longrightarrow & K\Gamma' - \mathrm{mod} \\ & V & \longmapsto & M^* \otimes_{K\Gamma} V \end{array} \tag{9}$$

体 K が標数 0 であるので $K\Gamma, K\Gamma'$ は半単純であり、M は左 $K\Gamma$ 加群としても右 $K\Gamma'$ 加群としても射影的である。これらのことから ${}^*\mathscr{F}_M$ は $\mathscr{F}_M$ の随伴作用素になっている。

$$\mathrm{Hom}_{K\Gamma}(V, \mathscr{F}_M V') \simeq \mathrm{Hom}_{K\Gamma'}({}^*\mathscr{F}_M V, V') \tag{10}$$

$$\mathrm{Hom}_{K\Gamma}(\mathscr{F}_M V', V) \simeq \mathrm{Hom}_{K\Gamma'}(V', {}^*\mathscr{F}_M V) \tag{11}$$

$\mathscr{K}_0(K\Gamma'), \mathscr{K}_0(K\Gamma)$ をそれぞれ左 $K\Gamma, K\Gamma'$ 加群の圏のグロタンディック群[9]とする。$\mathscr{F}_M$ と ${}^*\mathscr{F}_M$ から以下の $\mathbb{Z}$-線型写像が誘導される。

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{F}_M\colon \mathscr{K}_0(K\Gamma') & \longrightarrow & \mathscr{K}_0(K\Gamma) \\ {[V']_{\Gamma'}} & \longmapsto & [M \otimes_{K\Gamma'} V']_{\Gamma} \end{array} \tag{12}$$

$$\begin{array}{rcl} {}^*\mathrm{F}_M\colon \mathscr{K}_0(K\Gamma) & \longrightarrow & \mathscr{K}_0(K\Gamma') \\ {[V]_{\Gamma}} & \longmapsto & [M^* \otimes_{K\Gamma} V']_{\Gamma'} \end{array} \tag{13}$$

$\mathscr{K}_0(K\Gamma)$ に次のように内積を定義する。$[V],[W] \in \mathscr{K}_0(K\Gamma)$ に対して

$$\langle [V],[W] \rangle_{\Gamma} = \mathrm{dim}_{\mathrm{K}}\mathrm{Hom}_{\mathrm{K}\Gamma}([V],[W]) \tag{14}$$

$\mathscr{K}_0(K\Gamma)$ は Γ の指標群と同一視できる。その同一視のもとで (12),(13) と (14) から

$$\langle \chi, \mathrm{F}_M(\chi') \rangle_{\Gamma} = \langle {}^*\mathrm{F}_M(\chi), \chi' \rangle_{\Gamma'} \tag{15}$$

が成り立つ。

$\chi \in \mathscr{K}_0(K\Gamma)$ と $\chi' \in \mathscr{K}_0(K\Gamma')$ を任意にとる。$(\gamma,\gamma') \in \Gamma \times \Gamma'$ とするとき、M 上の (γ,γ') のトレースを $Tr_M(\gamma,\gamma')$ とかく。このとき、

$$\mathrm{F}_M\chi'(\gamma) = \frac{1}{|\Gamma'|}\sum_{\gamma'\in\Gamma'} Tr_M(\gamma,\gamma')\chi'(\gamma'^{-1}) \tag{16}$$

と

$$ {}^*\mathrm{F}_M\chi(\gamma') = \frac{1}{|\Gamma|}\sum_{\gamma\in\Gamma} Tr_M(\gamma,\gamma')\chi(\gamma^{-1}) \tag{17}$$

が成り立つ。

3.2 ハリッシュ・チャンドラ誘導 (Harish-Chandra Induction)

3.2.1 定義 (Definition)

ハリッシュ・チャンドラ誘導は両側加群 $K[G/U]$ を使って定義される。$K[G/U]$ は G/U を基底にもつ K ベクトル空間であり、G と T がそれぞれ左と右から作用している。$K[G/U]$ の双対空間は自然に $K[U\backslash G]$ と同一視でき、これは G と T がそれぞれ右と左から作用している。(8),(9) と同じ方法で２つの関手を得る。

$$\begin{array}{rcl} \mathscr{R}_K\colon KT-\mathrm{mod} & \longrightarrow & KG-\mathrm{mod} \\ V & \longmapsto & K[G/U] \otimes_{KT} V \end{array} \tag{18}$$

$$\begin{array}{rcl} {}^*\mathscr{R}_K\colon KG-\mathrm{mod} & \longrightarrow & KT-\mathrm{mod} \\ W & \longmapsto & K[U\backslash G] \otimes_{KG} W \end{array} \tag{19}$$

(18),(19) をそれぞれハリッシュ・チャンドラ誘導 (Harish-Chandra induction)、ハリッシュ・チャンドラ制限 (Harish-Chandra restriction) と呼ぶ。これらから次の $\mathbb{Z}$-線型写像が従う。

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{R}\colon \mathscr{K}_0(KT) & \longrightarrow & \mathscr{K}_0(KG) \\ {[V]_T} & \longmapsto & [K[G/U] \otimes_{KT} V]_G \end{array} \tag{20}$$

$$\begin{array}{rcl} {}^*\mathrm{R}\colon \mathscr{K}_0(KG) & \longrightarrow & \mathscr{K}_0(KT) \\ {[W]_G} & \longmapsto & [K[U\backslash G] \otimes_{KG} W]_T \end{array} \tag{21}$$

[9] K を体とし A を $K-$ 代数とする。K 上有限次元の左 A 加群の圏のグロタンディック群 (Grothendieck group) を $\mathscr{K}_0(A)$ とかく。$\mathscr{K}_0(A)$ は自由 $\mathbb{Z}$-加群であり $([S])_{S\in\mathrm{IrrA}}$ を基底にもつ。

3.2.2 他の構造 (Other Constructions)

V は左 KT 加群とする。このとき射影 $\pi\colon B \to T$ によって B から V への作用 $b \cdot v(b \in B, v \in V)$ を $\pi(b)v$ と定義すれば V は B 加群の構造をもつ。このようにして V を KB 加群とみなすとき V を V_B とかく。

命題 3.2.1

V, W をそれぞれ KT 加群、KG 加群とする。このとき、

$$\mathscr{R}_K V \cong \mathrm{Ind}_B^G V_B \tag{22}$$

$$^*\mathscr{R}_K W \cong W^U \tag{23}$$

が成り立つ。

[証明] (22) から示す。まず $\mathrm{Ind}_B^G V_B = KG \otimes_{KB} V_B$ であり、$\mathscr{R}_K(V) = K[G/U] \otimes_{KT} V$ である。さて U の冪等元

$$e_U = \frac{1}{|U|}\sum_{u \in U} u$$

を準備する。次に自然な射影 $KG \to K[G/U]$ を τ_U とし、$K[U\backslash G] \to KG$ $(gU \mapsto ge_U)$ を σ_U とする。このとき

$$\sigma_U \circ \tau_U(g) = ge_U, \tau_U \circ \sigma_U(x) = x$$

が成り立つ。さらに φ と ψ を次のように定義する。

$$\begin{array}{rccc} \varphi\colon & KG \otimes_{KB} V_B & \longrightarrow & K[G/U] \otimes_{KT} V \\ & a \otimes_{KB} v & \longmapsto & \tau_U(a) \otimes_{KT} v \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} \psi\colon & K[G/U] \otimes_{KT} V & \longrightarrow & KG \otimes_{KB} V_B \\ & a \otimes_{KT} v & \longmapsto & \sigma_U(a) \otimes_{KB} v \end{array}$$

いずれも well-defined な KG 加群としての準同型である。さらに $\varphi \circ \psi = \mathrm{Id}_{K[G/U] \otimes_{KG} W}$ は明らかである。また

$$ae_U \otimes_{KB} v = a \otimes_{KB} \pi(e_U)v \qquad (\forall a \in KG, \forall v \in V_B)$$

$\pi(e_U)$ は単位元になるので

$$ae_U \otimes_{KB} v = a \otimes_{KB} v \ (\forall a \in KG, v \in V_B)$$

が成り立ち、ゆえに $\psi \circ \varphi = \mathrm{Id}_{KG \otimes_{KB} V_B}$ である。以上より $\mathscr{R}_K V \cong \mathrm{Ind}_B^G V_B$ が成り立つ。
次に (23) を示す。まず $^*\mathscr{R}_K W = K[U\backslash G] \otimes_{KG} W$ である。さて $\sigma_U^*\colon K[U\backslash G] \to KG$ $(Ug \mapsto e_U g \quad \forall g \in G)$ を準備し以下の 2 つの準同型を定める。

$$\begin{array}{rccc} \varphi'\colon & K[U\backslash G] \otimes_{KG} W & \longrightarrow & W^U \\ & a \otimes_{KG} w & \longmapsto & \sigma_U^*(a)w \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} \psi'\colon & W^U & \longrightarrow & K[U\backslash G] \otimes_{KG} W \\ & w & \longmapsto & U \otimes_{KG} w \end{array}$$

φ'、ψ' のいずれも well-definded で $\varphi' \circ \psi' = \mathrm{Id}_{W_U}$、$\psi' \circ \varphi' = \mathrm{Id}_{K[U\backslash G]}$ となり示された。

系 3.2.2

α を T の指標とする。このとき $\mathrm{R}(\alpha) = \mathrm{Ind}_B^G \alpha_B$

3.2.3 マッキー公式 (Mackey Formula)

群 Γ に対して $\widehat{\Gamma}$ を Γ の指標群とする。

定理 3.2.3

$\alpha \in \mathscr{K}_0(KT), s = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ とする。このとき

$$^*\mathrm{R}\left(\mathrm{R}(\alpha)\right) = \alpha + {}^s\alpha$$

が成り立つ。

定理??を使って T の既約指標からどのくらい G の既約指標が生まれるかを見ていこう。
$\alpha \in \widehat{T} = Irr\ T$ をひとつ固定する。${}^s\alpha(t) = \alpha(s^{-1}ts) = \alpha(t^{-1})$ ゆえ ${}^s\alpha = \alpha^{-1}$ に注意しておく。

- $\alpha^2 \neq 1$ とする。定理??より $\langle \mathrm{R}(\alpha), \mathrm{R}(\alpha)\rangle_G = \langle \alpha, \alpha\rangle_T + \langle \alpha, {}^s\alpha\rangle_T$ で α は T の既約指標であることから $\langle \alpha, \alpha\rangle_T = 1$ となり、仮定 $(\alpha^2 \neq 1 \Leftrightarrow \alpha \neq \alpha^{-1})$ からは $\langle \alpha, {}^s\alpha\rangle_T = 0$ であることが分かる。ゆえに $\mathrm{R}(\alpha) \in Irr\ G$ である。このとき α^{-1} も同様の議論から $\mathrm{R}(\alpha^{-1}) \in Irr\ G$ である。

- $\alpha = \alpha_0$(α_0 は T の唯一の位数 2 の線型指標である。q は奇数だからそのようなものがある。) とする。このとき、$\langle \mathrm{R}(\alpha_0), \mathrm{R}(\alpha_0)\rangle_G = \langle \alpha_0, \alpha_0\rangle_T + \langle \alpha_0, {}^s\alpha_0\rangle_T$ で仮定より $\alpha_0 = {}^s\alpha_0 (= \alpha_0^{-1})$ だから $\langle \mathrm{R}(\alpha_0), \mathrm{R}(\alpha_0)\rangle_G = 2$ となり $\mathrm{R}(\alpha_0)$ は 2 つの G の既約指標に分解する。

$$\mathrm{R}(\alpha_0) = \mathrm{R}_+(\alpha_0) + \mathrm{R}_-(\alpha_0) \qquad (\mathrm{R}_\pm(\alpha_0) \in Irr\ G, \mathrm{R}_+(\alpha_0) \neq \mathrm{R}_-(\alpha_0))$$

- $\alpha = 1_T$(T の単位指標) とする。このとき $\langle \mathrm{R}(1_T), \mathrm{R}(1_T)\rangle_G = \langle 1_T, 1_T\rangle_T + \langle 1_T, 1_T\rangle_T = 2$ であり $\mathrm{R}(1_T)$ は定義から G の単位指標 1_G を含んでいる。$\langle \mathrm{R}(1_T), \mathrm{R}(1_T)\rangle_G = 2$ とその事実を合わせて $\mathrm{R}(1_T)$ は 1_G と G のある 1 つの既約指標の和であることが分かる。そのある既約指標とはスタインバーグ指標 (Steinberg character) 呼ばれるものである。

$$\mathrm{R}(1_T) = 1_G + St_G \qquad (\mathrm{deg} St_G = q)$$

- $\alpha \notin \{\beta, \beta^{-1}\}$ のとき $\langle \mathrm{R}(\alpha), \mathrm{R}(\beta)\rangle_G = 0$

Chapter4 指標表 (The Character Table)

ハリッシュ・チャンドラ誘導によって $\frac{q+5}{2}$ 個の $SL_2(\mathbb{F}_q)$ の既約指標を得ることが出来る。もう約半分 ($\frac{q+3}{2}$ 個) はドリーニュ・ルスティック誘導によって得られる。この章ではハリッシュ・チャンドラ誘導から得られる既約指標を計算していく。

4.1 $\mathbf{R}(\alpha), \alpha^2 \neq 1$ の指標

$\mathfrak{Tr}$ を次のように定義する。

$$\begin{array}{rcl} \mathfrak{Tr} : G \times \mu_{q-1} & \longrightarrow & K \\ (g, a) & \longmapsto & \mathrm{Tr}((g, d(a)), K[G/U]) \end{array}$$

$K[G/U]$ は G の置換表現である。$(g, t) \in G \times T$ をとったとき、

$$\mathrm{Tr}((g, t), K[G/U]) = \#\{xU \in G/U | gxtU = xU\}$$

となる。

- $g = \pm I_2$ のとき $b = \pm 1$ ならば $\mathfrak{Tr}(g, b) = q^2 - 1$ となる。$b \neq \pm 1$ ならば $\mathfrak{Tr}(g, b) = 0$
- $g = d(a), a \in \mu_{q-1} \backslash \{\pm 1\}$ のとき $t = d(c)$ とする。$X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \in G$ として $X^{-1}gXt \in U$ となる x はどのような

ものかを計算して考える。

$$
\begin{aligned}
X^{-1}gXt &= \begin{pmatrix} w & -y \\ -z & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c^{-1} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} abxw - a^{-1}byz & yw(ab^{-1} - a^{-1}b^{-1}) \\ xz(a^{-1}b - ab) & -ab^{-1}zy + a^{-1}b^{-1}xw \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$X^{-1}gXt$ が U に属する条件は

- $abxw - a^{-1}byz = 1$
- $yw(ab^{-1} - a^{-1}b^{-1}) = 0$
- $xz(a^{-1}b - ab) = 0$
- $-ab^{-1}zy + a^{-1}b^{-1}xw = 1$

である。$xw-yz=1$ と $ab^{-1}-a^{-1}b^{-1} \neq 0, a^{-1}b-ab \neq 0$ から $x = \begin{pmatrix} 0 & -y \\ y^{-1} & 0 \end{pmatrix}$ または $\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x^{-1} \end{pmatrix}$ であることが分かる。前者のとき $d(c)=d(a)$ となり後者のとき $d(c)=d(a^{-1})$ となる。したがって $b \in \{a, a^{-1}\}$ のとき $\mathfrak{Tr}(g,b)=q-1$ であり $b \notin \{a, a^{-1}\}$ のとき $\mathfrak{Tr}(g,b)=0$ である。

- $g = d'(\xi), \xi \in \mu_{q+1} \backslash \{\pm 1\}$ のとき $\forall b \in \mu_{q-1}$ に対して $\mathfrak{Tr}(g,b)=0$ である。
- $g = \begin{pmatrix} \varepsilon & a \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix}, \varepsilon \in \{\pm 1\}, a \in \mathbb{F}_q^\times$ のとき $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}, t = d(c)$ として $X^{-1}gXt \in U$ となる x の条件を考えると $\varepsilon = 1$ のとき $c=1$ で X は $X = \begin{pmatrix} x & a \\ 0 & x^{-1} \end{pmatrix}$ という形の行列であることが必要十分だと簡単な計算でわかる。つまり $\mathfrak{Tr}(g,b)=q-1$ となる。同様にして $\varepsilon=-1$ のとき $c=-1$ ないといけないことが分かる。したがってこのときも $\mathfrak{Tr}(g,b)=q-1$ である。

(16) を使うと次のような表が完成する

Table 2: $\mathrm{R}(\alpha)$ の指標の値

代表元 (Representative)	$\pm I_2$	d(a) $a \in \mu_{q-1}\backslash\{\pm 1\}$	d'(ξ) $\xi \in \mu_{q+1}\backslash\{\pm 1\}$	$\left(\begin{smallmatrix} \varepsilon & a \\ 0 & \varepsilon \end{smallmatrix}\right)$ $\varepsilon \in \{\pm 1\}, a \in \mathbb{F}_q^\times$
$\mathrm{R}(\alpha)$	$(q+1)\alpha(\varepsilon)$	$\alpha(a)+\alpha(a^{-1})$	0	$\alpha(\varepsilon)$

4.2 スタインバーグ指標

$\mathrm{R}(1_T)(g), (g \in G)$ の値は (16) から $\mathrm{R}(1_T)(g) = \frac{1}{|T|}\sum_{t \in T} \mathrm{Tr}_{K[G/U]}(g,t)$ であるが、これは旗多様体 $K[\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_q)]$ に g を基底変換として作用させたときの固定点の数である。実際に群同型 $G/U \cong \mathbb{F}_q^2 - \{\vec{0}\} \left(xU \mapsto x \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ によって $xU = gxtU$ となる xU を数えることは $t = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$ とすると

$$
gxt \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow ag \left(x \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \end{pmatrix} \right) = x \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow g \left(x \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \end{pmatrix} \right) = a^{-1} \left(x \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \end{pmatrix} \right)
$$

となり g の固有ベクトルを数えることに他ならない。また $\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_q)$ 上で考えると t の作用は自明になるので、固有ベクトルの個数を $|T| = q-1$ で割る。以上の考察から分かるように計算の方針として、共役類ごとに $g \in G$ に対して $g \cdot v = \lambda \cdot v$ であるような $v \in K[\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_q)]$ を数えていく。$K[\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_q)]$ の点の数は q+1 個であることに注意する。

- $g = \pm I_2$ のとき、どの点も動かないので $\mathrm{R}(1_T)(g) = q+1$ である。
- $g = d(a), a \in \mu_{q-1}\backslash\{\pm 1\}$ のとき、$d(a)$ の固有値は a, a^{-1} である。それぞれの固有空間は $V_a = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \middle| x \in \mathbb{F}_q \right\}, V_{a^{-1}} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix} \middle| x \in \mathbb{F}_q \right\}$ 従って、$\mathrm{R}(1_T)(g) = 2$
- $g = d'(\xi), \xi \in \mu_{q+1}\backslash\{\pm 1\}$ のとき、$d(a)$ のときと同様に計算するのだがこの場合は固有方程式の根が $\mathbb{F}_q$ 上にない。

ゆえに $\mathrm{R}(1_T)(g)=0$

- $g=\begin{pmatrix}\varepsilon & x\\ 0 & \varepsilon\end{pmatrix}, \varepsilon\in\{\pm1\}, x\in\mathbb{F}_q^\times$ のとき、固有値は ε であり固有空間は $V_\varepsilon=\left\{\begin{pmatrix}c\\0\end{pmatrix}\middle| c\in\mathbb{F}_q\right\}$ であるので $\mathrm{R}(1_T)(g)=1$

St_G の値は $\mathrm{R}(1_T)$ の値から 1 を引いたものであるよって次の表が完成する。

Table 3: St_G の指標の値

代表元 (Representative)	$\pm I_2$	d(a) $a\in\mu_{q-1}\backslash\{\pm1\}$	d'(ξ) $\xi\in\mu_{q+1}\backslash\{\pm1\}$	$\left(\begin{smallmatrix}\varepsilon & a\\ 0 & \varepsilon\end{smallmatrix}\right)$ $\varepsilon\in\{\pm1\}, a\in\mathbb{F}_q^\times$
St_G	q	1	-1	0

4.3 $R_\pm(\alpha_0), \alpha_0^2=1$ の指標

次は $\mathrm{R}_\pm(\alpha_0)(g)$ を計算していく。次の命題からほとんどの場合が $\mathrm{R}(\alpha_0)$ で計算出来ることが分かる。

命題 4.3.1

$g\in G, \alpha\in\mu_{q-1}^\wedge$ とする。このとき
(a).$\mathrm{R}(\alpha)(-g)=\alpha(-1)\mathrm{R}(\alpha)(g)$
(b),$\mathrm{R}_\pm(\alpha_0)(-g)=\alpha_0(-1)\mathrm{R}_\pm(\alpha_0)(g)$
(c).g が半単純ならば $\mathrm{R}_\pm(\alpha_0)(g)=\frac{1}{2}\mathrm{R}(\alpha_0)(g)$
の 3 つが成り立つ。

Proof.
(a) は明らかである。(b) は (a) からすぐに従う。(c) は $\mathrm{R}_+(\alpha_0)$ と $\mathrm{R}_-(\alpha_0)$ が $GL_2(\mathbb{F}_q)$ 上で共役であることが証明のポイントである。□

これから $\mathrm{R}_\pm(\alpha_0)(u_\pm)$ を計算するのだが、それにはいくつかの準備が必要だ。
$\mathbb{F}_q^+$ の非自明な線型指標 χ_+ を固定する。写像

$$\begin{array}{ccc}\mathbb{F}_q^+ & \longrightarrow & (\mathbb{F}_q^+)^\wedge\\ z & \longmapsto & (z'\mapsto\chi_+(zz'))\end{array}\tag{24}$$

は群として同型[10]である。さて、$\mathscr{C}$ を $\mathbb{F}_q^\times$ の平方数全体とし、$z_0\in\mathbb{F}_q^\times\backslash\mathscr{C}$ とする。この状況で以下を準備する。

$$\begin{array}{cccc}\Upsilon_+: & U & \longrightarrow & K\\ & u(z) & \longmapsto & \sum_{c\in\mathscr{C}}\chi_+(cz)\end{array}\quad and\quad \begin{array}{cccc}\Upsilon_-: & U & \longrightarrow & K\\ & u(z) & \longmapsto & \sum_{c\in\mathscr{C}}\chi_+(cz_0z)\end{array}$$

このとき U の正則表現を reg_U とすると

$$\mathrm{reg}_U=\Upsilon_++\Upsilon_-+1_U\tag{25}$$

が成り立つ。実際、$(\Upsilon_++\Upsilon_-+1_U)(I_2)=q=|U|$ であり $g\neq I_2$ なら $(\Upsilon_++\Upsilon_-+1_U)(g)=0$ であることが $\Upsilon_\pm$ の定義から容易に従う。次の命題は重要である。

命題 4.3.2

$$\mathrm{Res}_U^G\mathrm{R}_\pm(\alpha_0)=1_U+\Upsilon_\pm$$

この命題から分かるように $\mathrm{R}_\pm(\alpha_0)(u_\pm)$ を計算するには $\Upsilon_+(u_\pm)$ と $\Upsilon_-(u_\pm)$ を計算すればよい。いま、$\gamma:=\sum_{z\in\mathbb{F}_q^\times}\alpha_0(z)\chi_+(z)$ と定義する。そのとき $\gamma^2=\alpha_0(-1)q$ となることを示そう。

Proof. まず、γ を二乗すると

$$\gamma^2=\sum_{z,z'\in\mathbb{F}_q^\times}\alpha_0(zz')\chi_+(z+z')$$

[10]単射性を示せば十分である。それは χ_+ が非自明であることから簡単に従う。

となる。さて $z'' = z^{-1}z'$ とおく。すると

$$\gamma^2 = \sum_{z,z'' \in \mathbb{F}_q^\times} \alpha_0(z'')\chi_+(z(1+z''))$$

となる。したがって

$$\begin{aligned}\gamma^2 &= \sum_{z'' \in \mathbb{F}_q^\times} \left(\alpha_0(z'') \sum_{z \in \mathbb{F}_q^\times} \chi_+(z(1+z''))\right) \\ &= (q-1)\alpha_0(-1) + \sum_{z'' \in \mathbb{F}_q^\times \backslash \{-1\}} \left(\alpha_0(z'') \sum_{z \in \mathbb{F}_q^\times} \chi_+(z(1+z''))\right)\end{aligned}$$

である。しかし、もし $z'' \neq -1$ ならばこのとき

$$\sum_{z \in \mathbb{F}_q^\times} \chi_+(z(1+z'')) = -1 + \sum_{z \in \mathbb{F}_q^+} \chi_+(z(1+z'')) = -1$$

となる。最後に

$$\gamma^2 = (q-1)\alpha_0(-1) - \sum_{z'' \in \mathbb{F}_q^\times \backslash \{-1\}} \alpha_0(z'') = q\alpha_0(-1) - \sum_{z'' \in \mathbb{F}_q^\times} \alpha_0(z'') = q\alpha_0(-1)$$

となり示せた □
以後 $\gamma = \sqrt{\alpha_0(-1)q}$ とかく。以上から次の補題が従う。

補題 4.3.3

$$\Upsilon_+(u_\pm) = \frac{-1 \pm \sqrt{\alpha_0(-1)q}}{2} \quad and \quad \Upsilon_-(u_\pm) = -\frac{1 \pm \sqrt{\alpha_0(-1)q}}{2}$$

Proof. (25) と $\Upsilon_+(u_+) - \Upsilon_-(u_+) = \gamma$ (γ の定義) から従う。

4.4 $SL_2(\mathbb{F}_q)$ の指標表

Table 4: $G = SL_2(\mathbb{F}_q)$ の指標表

g	ϵI_2 $\epsilon \in \{\pm 1\}$	d(a) $a \in \mathbb{F}_q^\times \backslash \{\pm 1\}$	d'(ξ) $\xi \in \mu_{q+1} \backslash \{\pm 1\}$	ϵu_τ $\varepsilon \in \{\pm 1\}, \tau \in \{\pm\}$
1_G	1	1	1	1
$\mathrm{R}(\alpha), \alpha^2 \neq 1$	$(q+1)\alpha(\varepsilon)$	$\alpha(a) + \alpha(a^{-1})$	0	$\alpha(\varepsilon)$
St_G	q	1	-1	0
$\mathrm{R}_\sigma(\alpha_0), \sigma \in \{\pm\}$	$\frac{(q+1)\alpha_0(\varepsilon)}{2}$	$\alpha_0(a)$	0	$\alpha_0(\varepsilon)\frac{1+\sigma\tau\sqrt{q_0}}{2}$
$\mathrm{R}'(\theta), \theta^2 \neq 1$	$(q-1)\theta(\varepsilon)$	0	$-\theta(\xi) - \theta(\xi)^{-1}$	$-\theta(\varepsilon)$
$\mathrm{R}'_\sigma(\theta_0), \sigma \in \{\pm\}$	$\frac{(q-1)\theta_0(\varepsilon)}{2}$	0	$-\theta_0(\xi)$	$\theta_0(\xi)\frac{-1+\sigma\tau\sqrt{q_0}}{2}$