担当教員： 山口 航平　研究室： A210　E-mail:yamaguchi.kohei@math.nagoya-u.ac.jp

Taylor の公式　略解

以下では $0<\theta<1$ とする.

問題 1.

(1) $n=2k$ のとき,

$$\sin = x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5+\cdots+(-1)^{k-1}\frac{1}{(2k-1)!}x^{2k-1}+(-1)^k\frac{\sin(\theta x)}{(2k)!}x^{2k}.$$

$n=2k-1$ のとき,

$$\sin x = x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5+\cdots+(-1)^{k}\frac{1}{(2k-3)!}x^{2k-3}+(-1)^{k+1}\frac{\cos(\theta x)}{(2k-1)!}x^{2k-1}.$$

(2) $$\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2!\cdot 2^2}x^2+\cdots+\frac{(-1)^{n-2}(2n-5)!!}{(n-1)!\cdot 2^{n-1}}x^{n-1}+\frac{(-1)^{n-1}(2n-3)!!(1+\theta x)^{-\frac{2n-1}{2}}}{n!\cdot 2^n}x^n.$$

(3) $$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}+\frac{1}{(1-\theta x)^{n+1}}x^n.$$

(4) $$\log(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\cdots+\frac{(-1)^{n-2}}{n-1}x^{n-1}+\frac{(-1)^{n-1}}{n(1+\theta x)^n}x^n.$$

問題 2. $n=2k$ のとき,

$$\cos x=-\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{1}{3!}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^3-\frac{1}{5!}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^5+\cdots+\frac{(-1)^k}{(2k-1)!}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^{2k-1}+R_{2k}(x),$$
$$R_{2k}(x)=\frac{(-1)^k}{(2k)!}\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right)\cdot\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^{2k}.$$

$n=2k-1$ のとき,

$$\cos x=-\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{1}{3!}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^3-\frac{1}{5!}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^5+\cdots+\frac{(-1)^{k-1}}{(2k-3)!}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^{2k-3}+R_{2k-1}(x),$$
$$R_{2k-1}(x)=\frac{(-1)^k}{(2k-1)!}\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right)\cdot\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^{2k-1}.$$

問題 3. ヒントに挙げた関数 φ を考えると, $\varphi(a)=\varphi(x)=0$ である. 平均値の定理から $\varphi'(a+\theta(x-a))=0$ となる $\theta\in(0,1)$ が存在する.

$$\varphi'(t)=-f'(t)-f''(t)(x-t)+f'(t)+A(x-t)=(A-f''(t))(x-t)$$

であり, $\varphi'(a+\theta(x-a))=0$ より $A=f''(a+\theta(x-a))$ を得る. これより $n=2$ の場合の Taylor の公式が得られる. □

担当教員：山口 航平　研究室：A210　E-mail:yamaguchi.kohei@math.nagoya-u.ac.jp

問題 4. e が有理数であるとすると，ある整数 m, n ($n \neq 0$) が存在して，$e = \dfrac{m}{n}$ と書ける．e は正だから，$m,\ n > 0$ と仮定してよい．また，補足 1 (b) のように $e = 2.71828...$ は整数でないので，$n \neq 1$，すなわち $n \geq 2$ となる．一方，Taylor の定理より，上で選ばれた n に対して $0 < \theta < 1$ をうまく選べば

$$\left(\frac{m}{n} =\right)\ e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{e^\theta}{(n+1)!}$$

とかける．両辺に $n!$ をかけて整理すると

$$\frac{e^\theta}{n+1} = m(n-1)! - 2 \cdot n! - \frac{n!}{2!} - \frac{n!}{3!} - \cdots - 1.$$

という式を得る．この式の右辺の和に現れる項は全て整数なので，右辺は整数である．一方，$0 < e^\theta < 3, \quad n + 1 \geq 3$ であるから

$$0 < \frac{e^\theta}{n+1} < 1.$$

となり，左辺は整数でない．これは矛盾であり，ゆえに e は無理数である．　$\square$

問題 5.

(1) $\sin x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}, \quad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}.$

(2) x の偶数べき，奇数べきに分けてやると，($i^{2n} = (-1)^n$ であるので)

$$\begin{aligned} e^{ix} &= 1 + ix + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \cdots + \frac{(ix)^{2n}}{(2n)!} + \frac{(ix)^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots \\ &= \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} + \cdots\right) + i\left(x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} + \cdots\right) \\ &= \cos x + i \sin x \end{aligned}$$

となっている．(ただし，この形式的な式変形だけでは Euler の公式を完璧に証明した，とは言えない．厳密には，「“絶対収束”する無限和の項の順序を任意に交換可能しても収束値は変わらない」ことを証明せねばならないが，ここでは省略する.)　$\square$

問題 6.

(1) $f'(x) = -\dfrac{1}{(x-a)^2},\ f''(x) = \dfrac{2}{(x-a)^3},\ \ldots,\ f^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^n n!}{(x-a)^{n+1}}$ である (数学的帰納法で容易に示される) ので，$x = 0$ における n 次の Taylor の公式は，

$$\begin{aligned} \frac{1}{x-a} &= -\frac{1}{a} - \frac{x}{a^2} - \cdots - \frac{x^{n-1}}{a^n} + R_n(x) = -\sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{a^{k+1}} + R_n(x), \\ R_n(x) &= \frac{(-1)^n x^n}{(x\theta - a)^{n+1}} \end{aligned}$$

である．ただし，$\theta \in (0,1)$ は x に応じて定まる．

担当教員：山口 航平　研究室：A210　E-mail:yamaguchi.kohei@math.nagoya-u.ac.jp

(2) 等比数列の和の公式を用いれば,

$$-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{x^k}{a^{k+1}} = -\frac{1}{a}\cdot\frac{1-\dfrac{x^n}{a^n}}{1-\dfrac{x}{a}} = \frac{1}{x-a}\left(1-\frac{x^n}{a^n}\right)$$

ゆえに,

$$R_n(x) = \frac{1}{x-a} - \left(-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{x^k}{a^{k+1}}\right) = \frac{1}{x-a}\cdot\frac{x^n}{a^n}$$

ゆえに, $|x| < |a|$ ならば $|x/a| < 1$ であるので,「第4回の問題3(1)」により $\displaystyle\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ であることが示される. □

問題 7. $f(x) = 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 5x^4 + R_n(x)$. □

実は, この係数たちは **Fibonatti 数列** ($a_0 = a_1 = 1, a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$ により定まる数列) をなしている. このことは, 例えば次のようにしてわかる.

$1 - x - x^2 = 0$ の 2 つの解を α, β とすると, 部分分数分解により

$$\frac{1}{1-x-x^2} = -\frac{1}{(x-\alpha)(x-\beta)} = -\frac{1}{\alpha-\beta}\left(\frac{1}{x-\alpha} - \frac{1}{x-\beta}\right)$$

となる. ここで問題 6 より, $|x| < \min\{|\alpha|, |\beta|\}$ において

$$\frac{1}{x-\alpha} - \frac{1}{x-\beta} = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{\alpha^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{\beta^{n+1}} = -\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\alpha^{n+1}} - \frac{1}{\beta^{n+1}}\right)x^n$$

と Taylor 展開されるので, これより $f(x)$ の $x = 0$ における Taylor 展開は

$$f(x) = \frac{1}{1-x-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\alpha-\beta}\left(\frac{1}{\alpha^{n+1}} - \frac{1}{\beta^{n+1}}\right)x^n$$

となることがわかる. $a_n = \dfrac{1}{\alpha-\beta}\left(\dfrac{1}{\alpha^{n+1}} - \dfrac{1}{\beta^{n+1}}\right)$ が Fibonatti 数列の一般項を与えることは簡単な計算で確かめられる.