担当教員：山口 航平　研究室：A210　E-mail:yamaguchi.kohei@math.nagoya-u.ac.jp

# Taylor の公式

実施日：May 17, 2024

## 中間試験について (重要)

- 来週 5/24 は中間試験を行います．16:35 ∼ 17:55 (80 分) を試験時間とします．
- 範囲は第 1 回目から第 5 回目までとします．($\varepsilon$-$N$ 論法, $\varepsilon$-$\delta$ 論法は含みません．一方で, $\varepsilon$-$N$ 論法, $\varepsilon$-$\delta$ 論法を使っても構いません．)
- 学生証を必ず持参してください.
- 途中退出不可です.
- 水筒, ペットボトル等（こぼれにくい容器）で飲み物を持ち込んでも構いません.
- 筆記用具, 飲み物, 計時機能のみの時計, 以外は鞄の中にしまっておくように.
- 携帯電話は電源を切り, 鞄の中にしまうように．ポケットの中に入れていると, 不正とみなされます．名古屋大学のルールですので, 数学演習 I 以外の試験のときにも携帯電話は鞄の中にしまうようにしましょう.
- 座席指定します．教室のドアもしくは黒板に席次表を張るので, 席次表に従って着席してください.
- 遅刻の場合, 16 : 45 までであれば入室を許可します．それ以降は, 入室できません.

担当教員：山口 航平　研究室：A210　E-mail:yamaguchi.kohei@math.nagoya-u.ac.jp

今回は「Taylor の公式」について学ぶ．その前に, 前回の問題プリントで述べていなかった定理「はさみうちの原理」について書いておく．

**定理 1.（はさみうちの原理）** 3 つの関数 $f$, $g$, $h$ が, 点 $a$ を含むある開区間 $(c, d)$ 上の $a$ 以外の任意の点において, $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ を満たすとする．このとき,

$$\lim_{x \to a} f(x) = A = \lim_{x \to a} h(x)$$

であるなら,

$$\lim_{x \to a} g(x) = A$$

となる．

## Taylor（テイラー）の公式

**定理 2.（Taylor の定理）** $a \in \mathbb{R}$ とし, $f$ を点 $a$ を含むある開区間 $I$ 上で定義された実数値関数とする．もし,

- $f$ は $I$ で $n$ 回微分可能である．

ならば, 任意の $x \in I$ に対して, ある（$x$ に依存する）実数 $\theta \in (0, 1)$ が存在し,

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + R_n(x) \quad (*)$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n)}(a + (x-a)\theta)}{n!}(x-a)^n.$$

と書ける．$(*)$ を点 $x = a$ における **$n$ 次の Taylor の公式**, $R_n$ を **$n$ 次の剰余項**という．

**補足 1.**

(a) 剰余項に現れる引数 $a + (x-a)\theta$ は点 $a$ と点 $x$ の間のとある点である．ゆえに, $n = 1$ の場合の Taylor の定理は平均値の定理に他ならない．

(b) $f(x) = e^x$ とする．任意の正の整数 $n$ に対して, $f^{(n)}(x) = e^x$ であるから, $f^{(n)}(0) = 1$ である．よって Taylor の定理より, 任意の実数 $x \in \mathbb{R}$ に対して

$$f(x) = e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{e^{\theta x}}{n!}x^n$$

なる $\theta \in (0, 1)$ が存在する．特に, $x = 1$ とすると,

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{(n-1)!} + \frac{e^\theta}{n!}$$

担当教員：山口 航平　研究室：A210　E-mail:yamaguchi.kohei@math.nagoya-u.ac.jp

と書ける (この $\theta$ は $x=1$ という値に依存して決まる). この式から, $e$ の近似値を知ることができる. 例えば $n=10$ とすると, ($e \leq 3$ であることは既知とすると) 剰余項は

$$0 < \frac{e^\theta}{10!} < \frac{3}{10!} \approx 0.00000082$$

と評価される (小数第 8 位以下は切り捨て). $1 \leq n \leq 9$ のとき, $\frac{1}{n!}$ の近似値は,

$$\frac{1}{2!} = 0.5,\ \frac{1}{3!} \approx 0.1666666,\ \frac{1}{4!} \approx 0.0416666,\ \frac{1}{5!} \approx 0.0083333,\ \frac{1}{6!} \approx 0.0013888,$$
$$\frac{1}{7!} \approx 0.0001984,\ \frac{1}{8!} \approx 0.0000248,\ \frac{1}{9!} \approx 0.0000027$$

である. これらから, $e \approx 2.71828$ という近似値が得られる.

**問題 1.** 次の関数の点 $x=0$ での $n$ 次の Taylor の公式を求めよ.

(1) $\sin x$　　(2) $\sqrt{1+x}$　　(3) $\dfrac{1}{1-x}$　　(4) $\log(1+x)$

**問題 2.** $f(x) = \cos x$ の点 $x = \dfrac{\pi}{2}$ での $n$ 次の Taylor の公式を求めよ.

**問題 3.** Taylor の公式 (定理 2) を $n=2$ の場合に証明せよ.

ヒント： $t$ に関する関数

$$\varphi(t) = f(x) - \left\{ f(t) + f'(t)(x-t) + \frac{A}{2!}(x-t)^2 \right\}$$

(ここで, $A = \dfrac{2!}{(x-a)^2}\{f(x) - (f(a) + f'(a)(x-a))\}$ は $t$ に依存しない実数) に平均値の定理を適用してみよ.

**問題 4.** $e$ が無理数であることを示せ.

担当教員：山口 航平　研究室：A210　E-mail:yamaguchi.kohei@math.nagoya-u.ac.jp

## Taylor 展開

**定義 1.** 定理 1 において, 関数 $f(x)$ が点 $a$ を含む開区間 $I$ 上で無限階微分可能であり, かつ剰余項 $R_n(x)$ が任意の $x \in I$ に対して $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ を満たす時, $f(x)$ は

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

と表される. このとき $f(x)$ は点 $a$ において **Taylor 展開可能である**といい, 上の式の右辺を $f(x)$ の点 $a$ における **Taylor 展開** (または **Taylor 級数**) と呼ぶ.
($a = 0$ の場合の Taylor 展開は, **Maclaurin 展開**とも呼ばれる.)

**例題 1.** 指数関数 $f(x) = e^x$ は点 $x = 0$ において Taylor 展開可能であることを示せ.

**【解答】** 指数関数の Taylor の公式における剰余項は $R_n(x) = \dfrac{e^{\theta x}}{n!}x^n$ である (補足 1 (b). ただし $0 < \theta < 1$). 任意に $x \in \mathbb{R}$ を取り, $N \in \mathbb{N}$ を $N > |x|$ となるように取れば[1],

$$n > N \text{ ならば} \quad \left|\frac{1}{n!}x^n\right| = \frac{1}{n}\cdot\frac{|x|}{n-1}\cdots\frac{|x|}{N+1}\cdot\frac{|x|}{N}\cdot\frac{|x|}{N-1}\cdots\frac{|x|}{1}\cdot|x|$$
$$< \frac{1}{n}\cdot\frac{N}{n-1}\cdots\frac{N}{N+1}\cdot\frac{N}{N}\cdot\frac{|x|}{N-1}\cdots\frac{|x|}{1}\cdot|x|$$
$$= \frac{1}{n}\cdot\frac{|x|^N}{(N-1)!} \qquad (\text{青字の部分} \le 1)$$

また, $0 < \theta < 1$ より $|e^{\theta x}| < e^{|x|} < e^N$ であるので, $n > N$ ならば

$$0 \le |R_n(x)| = \left|\frac{e^{\theta x}}{n!}x^n\right| < \frac{1}{n}\cdot\frac{e^N|x|^N}{(N-1)!}$$

という不等式が成り立つ. $N$ は $|x|$ に応じて定まる定数であり, $n$ には依存しないので, はさみうちの原理から $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ を得る. □

**補足 2.** 問題 1 の関数は全て $x = 0$ において Taylor 展開可能である. (各自証明してみよ.)
また, 例題 1 の証明から分かるように, 指数関数 $e^x$ の Taylor 展開

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

は, 任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して収束する. 一方で, 例えば

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

は $|x| < 1$ の場合のみ収束する.

[1] アルキメデスの原理によりこのような $N$ は存在する.

担当教員：山口 航平　研究室：A210　E-mail:yamaguchi.kohei@math.nagoya-u.ac.jp

**問題 5.**

(1) $\sin x$ および $\cos x$ の $x=0$ における Taylor 展開を求めよ.

(2) $e^x$ の Taylor 展開に, 形式的に複素数 $ix=\sqrt{-1}x$ を代入したもの

$$e^{ix}=1+(ix)+\frac{(ix)^2}{2!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(ix)^n}{n!}$$

と, $\cos x+i\sin x$ の Taylor 展開が一致することを確認せよ.

**補足 3.** 問題 5 より, $e^{ix}=\cos x+i\sin x$ という不思議な関係式が得られる. これは **Euler の公式**と呼ばれる, 数学において最も重要な公式の一つである. 極限を用いて定義されるネイピア数 $e=\lim_{t\to 0}(1+t)^{1/t}$ は**解析学**の代表的な数, 方程式 $x^2+1=0$ を解くために導入された複素数 $i$ は**代数学**の代表的な数であり, また三角関数は円や図形に関わる**幾何学**に由来する関数である. 背景が異なるこれらの (関) 数が満たす Euler の公式は実に見事である. また, 指数法則 $e^{ix}e^{iy}=e^{i(x+y)}$ から三角関数の加法定理が簡単に導けたりするなど, Euler の公式は応用の面でも非常に強力である.

**問題 6.**

(1) $a\neq 0$ を定数とする. 関数 $f(x)=\dfrac{1}{x-a}$ の $x=0$ における $n$ 次の Taylor の公式を求めよ (剰余項 $R_n(x)$ の具体形まで求めよ).

(2) (1) における剰余項 $R_n(x)$ が, $|x|<|a|$ ならば $n\to\infty$ において 0 に収束することを示せ. (つまり, $f(x)$ は $x=0$ において Taylor 展開可能であることを示せ.)

ヒント: $0<\theta<1$ に依存している剰余項をそのまま評価するのは難しい. まずは等比数列の和の公式を利用して剰余項の別の表示を求めてみよ.

**問題 7.** 関数 $f(x)=\dfrac{1}{1-x-x^2}$ の $x=0$ での 5 次の Taylor の公式を求めよ. ただし, 剰余項 $R_n(x)$ の具体形は求めなくてもよい.
(この関数の Taylor 展開における係数たちは, ある有名な数列をなしている. 一般項は?)