担当教員：山口 航平　研究室：A210　E-mail:yamaguchi.kohei@math.nagoya-u.ac.jp

1変数関数の連続性と微分　略解

問題 1. $a \in \mathbb{R}$ を任意の実数とする.

$$|\sin x - \sin a| = 2\left|\cos\left(\frac{x+a}{2}\right)\sin\left(\frac{x-a}{2}\right)\right| \leq 2\left|\sin\left(\frac{x-a}{2}\right)\right| \leq |x-a| \xrightarrow[x\to a]{} 0.$$

したがって,

$$\lim_{x\to a}\sin(x) = \sin(a) = f(a).$$

となり, $f(x) = \sin x$ は点 $x = a$ で連続.

問題 2.

(1)

$$|f(x)| = |x|\left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq |x| \xrightarrow[x\to 0]{} 0.$$

したがって,

$$\lim_{n\to\infty} f(x) = 0\big(= f(0)\big).$$

ゆえに f は点 $x = 0$ で連続.

(2) $x = 0$ で f が連続でないことを示す.

$$x_n = \frac{1}{2n\pi},\ y_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$$

とおくと, $x_n \to 0$, $y_n \to 0$ で

$$f(x_n) = \sin(2n\pi) = 0,\ f(y_n) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = 1.$$

よって,

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0 \neq 1 = \lim_{n\to\infty} f(y_n)$$

となり極限値が存在しない. 従って, f は点 $x = 0$ で連続でない.

問題 3. $x \neq 0$ のとき,

$$f(x) = x^3(1 + a_2x^{-1} + a_1x^{-2} + a_0x^{-3}).$$

$x \to \infty$ のとき,

$$x^3 \to \infty, \quad 1 + a_2x^{-1} + a_1x^{-2} + a_0x^{-3} \to 1$$

であるから

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty.$$

また, $x \to -\infty$ のとき

$$x^3 \to -\infty, \quad 1 + a_2x^{-1} + a_1x^{-2} + a_0x^{-3} \to 1$$

担当教員：山口 航平　研究室：A210　E-mail:yamaguchi.kohei@math.nagoya-u.ac.jp

だから

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty.$$

ゆえに, 十分大きい $K > 0$ をとると, $x \geq K$ のとき $f(x) > 0$, $x \leq -K$ のとき $f(x) < 0$ となる. 区間 $[-K, K]$ で考える. $f(-K) < 0$, $f(K) > 0$ だから, 中間値の定理からある $c \in (-K, K)$ が存在して, $f(c) = 0$ となる. したがって, 方程式 $f(x) = 0$ は少なくとも一つの解を持つ.

問題 4. $x \neq 0$ のとき

$$f(x) = x^4(1 + a_3x^{-1} + a_2x^{-2} + a_1x^{-0} + a_1x^{-4})$$

である. $x \to \pm\infty$ のとき

$$x^4 \to \infty, \quad 1 + a_3x^{-1} + a_2x^{-2} + a_1x^{-0} + a_1x^{-4} \to 1.$$

である. $K > 0$ が十分大きいとき, $x \leq -K$ または $x \geq K$ で

$$1 + a_3x^{-1} + a_2x^{-2} + a_1x^{-0} + a_1x^{-4} \geq \frac{1}{2}$$

となる. よって, $x \leq -K$ または $x \geq K$ のとき,

$$f(x) \geq \frac{1}{2}K^4.$$

K が十分大きいとすると,

$$\frac{1}{2}K^4 > a_0 = f(0)$$

となる. つまり, $x \leq -K$ または $x \geq K$ のとき,

$$f(x) > f(0).$$

一方, $[-K, K]$ 上では f の最小値 m が存在する. $f(0) \geq m$ により, $x \leq -K$ または, $x \geq K$ のとき, $f(x) > f(0) \geq m$. すべての $x \in \mathbb{R}$ に対して, $f(x) \geq m$ となるので, m が $\mathbb{R}$ 上での f の最小値である.

問題 5.

(1) $y \in [1, 2]$ とする. $x^2 + 1 = y$ とおくと, $x = \pm\sqrt{y-1}$ である. $x \in [0, 1]$ とすると, $x = \sqrt{y-1}$ となり, x が一意的にきまる. したがって, f の逆関数 $f^{-1} : [1, 2] \to [0, 1]$ は存在し,

$$f^{-1}(y) = \sqrt{y-1}.$$

(2) $y \in [0, 1]$ にたいして, $x^2 = y$ とすると, $x = \pm\sqrt{y}$ である. $\sqrt{y}$ と $-\sqrt{y}$ はともに, $[-1, 1]$ にはいっているから, $x \in [-1, 1]$ が一意的に決まらない. よって, 逆関数 f^{-1} は存在しない.

担当教員：山口 航平　研究室：A210　E-mail:yamaguchi.kohei@math.nagoya-u.ac.jp

問題 6.

(1) $\frac{\pi}{4}$　(2) $-\frac{\pi}{4}$　(3) $\mathrm{Arccos}\left(-\frac{1}{2}\right) = 2 \times \frac{2\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$

問題 7.

(1) $y = \mathrm{Arcsin}x$ とおく．$-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$. $\sin y = x$. $\cos y = \sqrt{1-\sin^2 y} = \sqrt{1-x^2}$. よって, $y = \mathrm{Arccos}\sqrt{1-x^2}$ である．よって,

$$\cos(\mathrm{Arcsin}x) = \cos\left(\mathrm{Arccos}\sqrt{1-x^2}\right) = \sqrt{1-x^2}.$$

(2) $y = \mathrm{Arcsin}x$ とおく．$-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$. $x = \sin y = \cos(\frac{\pi}{2} - y)$ より,

$$\mathrm{Arcsin}x + \mathrm{Arccos}x = y + \mathrm{Arccos}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - y\right)\right) = y + \frac{\pi}{2} - y = \frac{\pi}{2}.$$

(3) $x = \mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{2}\right)$, $y = \mathrm{Arctan}(\frac{1}{3})$ とおく．

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}} = 1$$

となる．よって,

$$\mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{2}\right) + \mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{3}\right) = x + y = \mathrm{Arctan}1 = \frac{\pi}{4}.$$

(4) $x = \mathrm{Arcsin}(\frac{3}{5}), y = \mathrm{Arcsin}(\frac{4}{5})$ とおく．$-\frac{\pi}{2} \leq x, y \leq \frac{\pi}{2}$.

$$\begin{aligned}\sin(x+y) &= \sin x \cos y + \cos x \sin y \\ &= \sin x\sqrt{1-\sin y^2} + \sqrt{1-\sin^2 x}\sin y \\ &= \frac{3}{5}\cdot\sqrt{1-\frac{16}{25}} + \sqrt{1-\frac{9}{25}}\cdot\frac{4}{5} \\ &= 1\end{aligned}$$

ゆえに

$$\mathrm{Arcsin}\left(\frac{3}{5}\right) + \mathrm{Arcsin}\left(\frac{4}{5}\right) = x + y = \mathrm{Arcsin}1 = \frac{\pi}{2}.$$

問題 8.

(1) $f^{(n)}(0) = n!$　(2) $f^{(n)}(0) = \begin{cases}(-1)^{\frac{n-1}{2}} & n:\text{奇数} \\ 0 & n:\text{偶数}\end{cases}$　(3) $f^{(n)}(0) = \begin{cases}0 & n:\text{奇数} \\ (-1)^{\frac{n}{2}} & n:\text{偶数}\end{cases}$

問題 9.

(1) $f^{(n)}(x) = (x+n)e^x$　(2) $f^{(n)}(x) = \frac{(n-1)!}{x}$

担当教員： 山口 航平　研究室： A210　E-mail:yamaguchi.kohei@math.nagoya-u.ac.jp

問題 10.

(1) $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$　　(2) $\frac{1}{1+x^2}$

問題 11.

(1) $e^x \mathrm{Arcsin} x + \frac{e^x}{\sqrt{1-x^2}}$　　(2) $-\frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$　　(3) $\frac{3x^2+x^4}{(1+x^2)^2+x^6}$

(4)

$$-\frac{\mathrm{Arctan}(\mathrm{Arcsin} x)}{\sqrt{1-x^2}} + \mathrm{Arccos} x \cdot \frac{1}{1+(\mathrm{Arcsin} x)^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

問題 12.

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = x\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

よって

$$\left|\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right| = \left|x\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)\right| \leq |x| \to 0\ (x\to 0).$$

ゆえに, $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0$ となり, f は $x=0$ で微分可能. $f'(0)=0$ である.

問題 13. $\varepsilon > 0$ を任意の正の実数とする. 数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は 0 に収束するので, 任意の正の実数 $\varepsilon_1 > 0$ に対して, ある $N_1 \in \mathbb{N}$ が存在して, $n > N_1$ となる任意の n に対して $|a_n| < \varepsilon_1$ となる. ε_1 は任意であるので, $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2}$ ととってよい. このとき, $n > N_1$ となる n に対して,

$$\left|\frac{\sum_{k=1}^n a_k}{n}\right| \leq \left|\frac{\sum_{k=1}^{N_1} a_k}{n}\right| + \left|\frac{\sum_{k=N_1+1}^n a_k}{n}\right| = \frac{\left|\sum_{k=1}^{N_1} a_k\right|}{n} + \frac{\left|\sum_{k=N_1+1}^n a_k\right|}{n}$$

のように, 和を, 1 から N_1 まで, および, N_1+1 から n までと分けておく. 第一項の分子は決まった有限個の実数 $a_1, \cdots, a_{N_1}$ の和の絶対値であるため, 定数である. (N_1 は固定されていることに注意.) 従って, アルキメデスの原理より, ある自然数 $N_2 \in \mathbb{N}$ が存在して,

$$N_2\frac{\varepsilon}{2} > \left|\sum_{k=1}^{N_1} a_k\right|$$

となる. このとき, $n > N_2$ となる任意の n に対して,

$$\frac{\varepsilon}{2} > \frac{\left|\sum_{k=1}^{N_1} a_k\right|}{n}$$

となる. 一方, 第二項に関しては,

$$\frac{\left|\sum_{k=N_1+1}^n a_k\right|}{n} < \frac{n-N_1}{n}\frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2}$$

が成り立つ．よって，$N = \max(N_1, N_2)$ とすると，$n > N$ となる任意の n ついて，

$$\left| \frac{\sum_{k=1}^{n} a_k}{n} - 0 \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

となる．つまり，任意の正の実数 $\varepsilon > 0$ に対して，ある自然数 $N \in \mathbb{N}$ が存在し，$n > N$ となるすべての n に対して上の不等式が成り立つので，

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} a_k}{n} = 0$$

である．

問題 14. a を有理数とする．$f(a) = 1/p$ とかける．ただし，$a = q/p$, p と q は互いに素，$p > 0$ である．無理数は $\mathbb{R}$ で稠密であるから，無理数からなる実数列 $\{x_n\}_{n=1,2,\ldots}$ があって，$x_n \to a$ となる．f の定義から

$$f(x_n) = 0 \ (n = 1, 2, \ldots).$$

よって，

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0 \neq \frac{1}{p} = f(a).$$

したがって，f は点 a で連続でない．

a を無理数とする．このとき，$f(a) = 0$ である．(ここからが ε-δ 論法！) $\varepsilon > 0$ を任意の正の実数とする．$\varepsilon > 1/p$ なる自然数 $p \in \mathbb{N}$ をとる．有限区間内にある整数の数は有限であるので，ある自然数 $p_i \in \mathbb{N}$ に対して，$a - 1 < \frac{n_i}{p_i} < a + 1$ を満たす整数 $n_i \in \mathbb{N}$ の個数は有限個である．p_i と q_i は互いに素な整数とし，$x_i = q_i/p_i$ とすると，$a - 1 < x_i < a + 1$ を満たす q_i は $a - 1 < \frac{n_i}{p_i} < a + 1$ を満たす整数 n_i の一部であるため，q_i の個数は n_i の個数以下である．よって，$a - 1 < x_i < a + 1$ を満たす x_i は有限個である．従って，開区間 $(a-1, a+1)$ で，$f(x) = 1/p_i$ となる x は有限個である．f の像は $\{0\} \cup \{1/n | n \in \mathbb{N}\}$ である．このうち，$f(x) \geq 1/p$ 満たすものは，$\{1/p_i | p_i$ は p 以下小さい自然数$\}$ であり，有限個である．従って，$(a-1, a+1)$ で，$f(x) \geq 1/p$ を満たす x の個数は，有限値の有限和であるため，有限である．その中で $|x - a|$ が最小になる x を x_p と定義する．x_p は有理数，a は無理数であるため $|x_p - a| \neq 0$ であり $|x_p - a|$ は真に 0 より大きい．つまり，$|x_p - a| > 0$ となる．$0 < |x_p - a| = 2\delta$ とおく．このとき $|x - a| < \delta$ を満たす任意の x について，$|x - a| < \delta < |x_p - a|$ となる．x_p の定義より，$|x - a| < |x_p - a|$ を満たす x について，$f(x) \geq 1/p$ となる x は存在しないので，$|x - a| < \delta$ となる x は $f(x) < 1/p < \varepsilon$ を満たす．従って任意の正の実数 $\varepsilon > 0$ について，ある正の実数 $\delta > 0$ が存在し，$|x - a| < \delta$ を満たす任意の x について $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ が示せたので (今，a は無理数なので，$f(a) = 0$ であることに注意)，f は点 a で連続である．