担当教員：山口 航平　研究室：A210　E-mail:yamaguchi.kohei@math.nagoya-u.ac.jp

1 変数関数の連続性と微分

実施日：May 10, 2024

今回は，関数の連続性や微分可能性に関して学ぶ．後半は，あいまいさのない極限の定義（ε-δ 論法）につい取り扱う．ε-δ 論法は高度な題材であり，名大のカリキュラムでは学部二年生の（数学科の）授業で習うことになっている．ただ，数学に興味がある学生は早めに厳密な論理・論法に慣れておいた方がよいため，後半に説明を載せることにした．演習での詳しい解説は行わない．興味のある学生・より詳しい説明がほしい学生は授業中（問題を解いている時間）や CafeDavid 等で質問してください．

なお，ε-δ 論法は中間・期末試験のテスト範囲には含まれない．

この演習では以下の記号を用いる: a, b を $a < b$ なる実数としたとき，

- $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ という形の $\mathbb{R}$ の部分集合を**開区間**, $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ という形の $\mathbb{R}$ の部分集合を**閉区間**と呼ぶ.
- $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$ や $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$ などを**半開区間**と呼ぶ.
- a または b を $\pm\infty$ とみなした $\mathbb{R}$ の部分集合 (例えば $(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$ や $[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$ など) は**無限区間**と呼ばれる.
- 以上を総称して**区間**と呼ぶ. また, 上の a や b を区間の**端点**と呼ぶ. (開区間は端点を区間に含まない.)

関数の連続性

定義 1.　f を開区間 (c, d) 上の実数値関数とする．$a \in (c, d)$ とする．f が点 $x = a$ において**連続**であるとは，

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

となることである．すべての $a \in (c, d)$ にたいして，f が点 $x = a$ で連続のとき **f は (c, d) 上連続**であるという．

補足 1.　$\lim_{x \to a} f(x) = A$ は, 次と同値である.

- $\lim_{n \to \infty} x_n = a$ となる (c, d) 内のすべての点列 $\{x_n\}_{n=1,2,\ldots} \subset (c, d)$ に対して,

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = A.$$

数列の極限を厳密に定義するには, ε-N 論法が必要である. 興味のある学生は, この演習プリントの後半を参照されたい.

担当教員：山口 航平　研究室：A210　E-mail:yamaguchi.kohei@math.nagoya-u.ac.jp

例題 1. $f(x) = \cos x$ が連続関数であることを示せ．(つまり，任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して，点 $x = a$ で f は連続であることを示せ.) 必要ならば，$|\sin x| \leq |x|$ を証明なしで用いて良い．

【解答】 $a \in \mathbb{R}$ を任意の実数とする．

$$\cos x - \cos a = \cos\frac{(x+a)+(x-a)}{2} - \cos\frac{(x+a)-(x-a)}{2} = -2\sin\frac{(x+a)}{2}\sin\frac{(x-a)}{2}.$$

ゆえに

$$|\cos x - \cos a| \leq 2\left|\sin\frac{(x-a)}{2}\right| \leq |(x-a)| \to 0.$$

したがって，

$$\lim_{x\to a}\cos x = \cos a.$$

$f(x) = \cos x$ は $x = a$ で連続．□

問題 1. 例題 1 にならって $f(x) = \sin x$ が連続関数であることを示せ．必要ならば，$|\sin x| \leq |x|$ を証明なしで用いて良い．

問題 2.

(1) 関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を次で定義する．

$$f(x) = \begin{cases} x\sin(\frac{1}{x}) & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

このとき，f は $x = 0$ で連続であることを示せ．

(2) $a \in \mathbb{R}$ を任意の実数とする．関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を次で定義する．

$$f(x) = \begin{cases} \sin(\frac{1}{x}) & (x \neq 0) \\ a & (x = 0) \end{cases}$$

このとき，f は $x = 0$ で連続でないことを示せ (ヒント: 0 に収束する数列 $x_n = \frac{1}{2n\pi}$，$y_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi}$ を考えよ)．

連続関数に対する基本的な性質を紹介しておこう．

命題 1. 2 つの実数値関数 f, g に対し，次が成り立つ:

(i) f, g が点 a において連続ならば，和 $f + g$ および積 fg も点 a において連続である．

(ii) f, g が点 a において連続で，$g(a) \neq 0$ ならば，商 f/g も点 a において連続である．

(iii) f が点 a において連続で，g が点 $b = f(a)$ において連続ならば，合成関数 $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ も点 a において連続である．

担当教員：山口 航平　研究室：A210　E-mail:yamaguchi.kohei@math.nagoya-u.ac.jp

定理 1. (中間値の定理.) f を閉区間 $[a,b]$ で定義されている実数値連続関数とし，$f(a) \neq f(b)$ であるとする．このとき，$f(a)$ と $f(b)$ の間にある任意の実数 α に対し，$f(c) = \alpha$ を満たすような $c \in [a,b]$ が存在する．

例題 2. $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ を $[0,1]$ 上で定義された実数値連続関数とする．すべての $x \in [0,1]$ に対して，$0 \leq f(x) \leq 1$ であるとする．このとき，$x \in [0,1]$ に対する方程式

$$f(x) = x$$

は少なくとも一つの解を持つことを示せ．

【解答】 $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ を $g(x) = f(x) - x$ で定義する．$f(x) = x$ と $g(x) = 0$ は同じ解を持つことに注意．このとき，

$$g(0) = f(0) \geq 0, \quad g(1) = f(1) - 1 \leq 0$$

である．$g(0) = 0$ または $g(1) = 0$ ならば，$f(x) = x$ は解 $x = 0$ または $x = 1$ を持つ．$g(0), g(1) \neq 0$ であるとする．$g(0) > 0$, $g(1) < 0$ である．中間値の定理から，$g(c) = 0$ となる $c \in (0,1)$ が存在する．$x = c$ が $f(x) = x$ の解になる．$\square$

問題 3. $x \in \mathbb{R}$ に対する方程式

$$f(x) := x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0 \qquad (a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R})$$

は少なくとも一つの解を持つことを示せ．

定理 2. (最大・最小値の存在定理.) $a, b \in \mathbb{R}$ とし，f を閉区間 $[a,b]$ 上の実数値連続関数とする．このとき，f は $[a,b]$ で必ず最大値，最小値をとる．つまり，ある $c, d \in [a,b]$ が存在して，任意の $x \in [a,b]$ に対して

$$f(x) \leq f(c), \ \ f(d) \leq f(x)$$

となる．($f(c)$ が最大値，$f(d)$ が最小値である.)

補足 2. 定理 2 において，**閉区間**であることは本質的である．例えば例題 2 の関数 $f(x) = 1/x$ は開区間 $(0,\infty)$ 上で連続だが，その区間内に最大・最小値を与える x は存在しない．

問題 4. 4 次関数 $f(x) = x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ $(a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R})$ は $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ 上で最小値を持つことを示せ．

担当教員：山口 航平　研究室：A210　E-mail:yamaguchi.kohei@math.nagoya-u.ac.jp

逆関数

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ を $[a,b]$ 上の実数値関数とする．

$$f([a,b]):=\{f(x)\,|\,x\in[a,b]\}$$

を f の値域という．

定義 2. $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ を実数値関数とする．任意の $y\in f([a,b])$ に対して，$f(x)=y$ となる x がただ一つ存在するとき，x を y の関数とみなすことができる．その関数を $x=f^{-1}(y)$ と書く．f^{-1} を f の**逆関数**という．$f^{-1}\circ f(x)=x$, $f\circ f^{-1}(y)=y$ を満たす．

- 関数 $f:[0,1]\to[1,4]$, $f(x)=3x+1$ は逆関数 $f^{-1}:[1,4]\to[0,1]$, $f^{-1}(y)=\frac{y-1}{3}$ をもつ．
- 関数 $f:\mathbb{R}\to(0,\infty)$, $f(x)=e^x$ は逆関数 $f^{-1}:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f^{-1}(y)=\log y$ をもつ．
- 関数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=c$ (c は定数) は逆関数をもたない．実際どのような実数 x_1,x_2 を選んでも $f(x_1)=f(x_2)=c$ なので，$f(x)=c$ となる x はただ 1 つに定まらない．

問題 5. 次の関数の逆関数 f^{-1} はあるか? f^{-1} がある場合は f^{-1} を求め，逆関数が存在しない場合は理由を答えよ．

(1) $f:[0,1]\to[1,2],\ f(x)=x^2+1$　　(2) $f:[-1,1]\to[0,1],\ f(x)=x^2$

- $\sin:[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]\to[-1,1]$ は，逆関数をもつ．この逆関数を $\sin^{-1}:[-1,1]\to[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ と書く．$\sin^{-1}$ を **Arcsin（アークサイン）** とも書く．$\sin^{-1}x$ は $\frac{1}{\sin x}$ ではないので注意．
- $\cos:[0,\pi]\to[-1,1]$ は逆関数 $\cos^{-1}:[-1,1]\to[0,\pi]$ をもつ．$\cos^{-1}$ を **Arccos（アークコサイン）** とも書く．
- $\tan:(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})\to(-\infty,\infty)$ は逆関数 $\tan^{-1}:(-\infty,\infty)\to(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ をもつ．**Arctan（アークタンジェント）** とも書く．

例題 3. $\mathrm{Arcsin}\left(\frac{1}{2}\right)$ の値を求めよ．

【解答】 $\mathrm{Arcsin}\left(\frac{1}{2}\right)=x$ $(-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2})$ とおくと，$\sin x=\frac{1}{2}$ である．これを満たす x は $\frac{\pi}{6}$ より，$\mathrm{Arcsin}\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{6}$ である．□

問題 6. 次の値を求めよ．

(1) $\mathrm{Arcsin}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$　　(2) $\mathrm{Arctan}(-1)$　　(3) $2\mathrm{Arccos}\left(-\frac{1}{2}\right)$

問題 7. 次を示せ．

(1) $\cos(\mathrm{Arcsin}x)=\sqrt{1-x^2}$ $(-1\le x\le 1)$
(2) $\mathrm{Arcsin}x+\mathrm{Arccos}x=\frac{\pi}{2}$ $(-1\le x\le 1)$
(3) $\mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{2}\right)+\mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{\pi}{4}$
(4) $\mathrm{Arcsin}\left(\frac{3}{5}\right)+\mathrm{Arcsin}\left(\frac{4}{5}\right)=\frac{\pi}{2}$

担当教員：山口 航平　研究室：A210　E-mail:yamaguchi.kohei@math.nagoya-u.ac.jp

1 変数関数の微分

定義 3. f を開区間 I 上で定義されている実数値関数とし, $a \in I$ とする.

(i) 極限 $\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ が有限値として存在するとき, f は点 a で**微分可能である**という. その極限値を $\dfrac{df}{dx}(a)$ または $f'(a)$ と書き, f の点 a における**微分係数**という.

(ii) 任意の $a \in I$ に対し, f が点 a で微分可能のとき f は I **上微分可能である**という. またその時, $I \ni a \mapsto f'(a) \in \mathbb{R}$ により定まる関数 $f'(x)$ を, f の**導関数**という. f が I のすべての点で n 回微分可能のとき, f を n 回微分して得られる関数を $f^{(n)}(x)$ とかき, f の n **階導関数**という.

微分可能な関数に対する基本的な性質を紹介しておこう.

定理 3. **(Leibnitz(ライプニッツ) の公式)** 2 つの関数 f, g が a で n 回微分可能であるとき,

積 fg も a で n 回微分可能で, $\boxed{(fg)^{(n)}(a) = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k f^{(k)}(a) g^{(n-k)}(a)}$ となる.

定理 4. **(合成関数の微分)** f を a で微分可能, g を $b = f(a)$ で微分可能な関数とすると, 合成 $g \circ f(x) = g(f(x))$ は a で微分可能で, $\boxed{(g \circ f)'(a) = g'(b) f'(a)}$ が成り立つ.

定理 5. **(逆関数の微分)** 関数 f が逆関数 f^{-1} を持つとする. また, f 点 $x = a$ で微分可能で $f'(a) \neq 0$ であるとする. このとき, f^{-1} は点 $A = f(a)$ で微分可能で

$$(f^{-1})'(A) = \frac{1}{f'(a)}$$

となる. $x = f^{-1}(y)$ とかくと, 上の式は

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

とかける.

定理 6. **(平均値の定理)** f を $[a, b]$ 上の実数値連続関数で, (a, b) で微分可能であるとする. このとき, ある $c \in (a, b)$ が存在して $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$ が成り立つ.

補足 3. 平均値の定理は, 局所的な（つまり, 極限値としての）関数の情報を, 大局的な（つまり, 離れた 2 点の）情報に書き換える際に必要となる. 導関数を用いて書いた増減表が正当化されるのは, 厳密には平均値の定理による.

担当教員：山口 航平　研究室：A210　E-mail:yamaguchi.kohei@math.nagoya-u.ac.jp

例 (初等関数の微分).

- $\dfrac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$
- $\dfrac{d}{dx}e^x = e^x$
- $\dfrac{d}{dx}\log|x| = \dfrac{1}{x}$
- $\dfrac{d}{dx}\sin x = \cos x$
- $\dfrac{d}{dx}\cos x = -\sin x$
- $\dfrac{d}{dx}\tan x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

問題 8. 次のそれぞれの関数について, $f^{(n)}(0)$ (=n 階導関数の点 $x=0$ での値) を求めよ.

(1) $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$　(2) $f(x) = \sin x$　(3) $f(x) = \cos x$

問題 9. 次の関数 $f(x)$ の n 階導関数 $f^{(n)}(x)$ を求めよ.

(1) $f(x) = xe^x$　(2) $f(x) = x^{n-1}\log x \quad (x>0)$

問題 10.

(1) Arccos$x$ の導関数 (Arccos$x$)$'$ を求めよ.

(2) Arctan$x$ の導関数 (Arctan$x$)$'$ を求めよ.

問題 11. 次の関数の導関数を求めよ.

(1) e^xArcsin$x$　(2) Arccos(x^2)　(3) Arctan$\left(\frac{x^3}{1+x^2}\right)$　(4) Arccos$x \cdot$ Arctan(Arcsin$x$)

例題 4. 関数 $f(x) = \begin{cases} x\sin(\frac{1}{x}) & (x \neq 0) \\ 0 & (x=0) \end{cases}$ が $x=0$ において微分可能かどうか判定せよ.

【解答】 $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ である. もし $\lim_{x\to 0}\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ が存在したとすると, 補足 1 より 0 に収束する任意の数列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ に対して $\lim_{n\to\infty}\sin\left(\frac{1}{x_n}\right)$ も存在し, それは $\lim_{x\to 0}\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ に一致するはずである. しかし, 例えば, 0 に収束する 2 つの数列 $x_n = \frac{1}{2n\pi}$ および $y_n = \frac{1}{(2n+\frac{1}{2})\pi}$ を考えれば, $\sin\left(\frac{1}{x_n}\right) = 0$, $\sin\left(\frac{1}{y_n}\right) = 1$ が任意の n に対して成り立つので, $\lim_{n\to\infty}\frac{f(x_n)-f(0)}{x_n-0} = 0 \neq 1 = \lim_{n\to\infty}\frac{f(y_n)-f(0)}{y_n-0}$ となる. 従って, $f(x)$ は 0 において微分可能でないことが分かる. □

問題 12. 関数 $f(x) = \begin{cases} x^2\sin(\frac{1}{x^2}) & (x \neq 0) \\ 0 & (x=0) \end{cases}$ が $x=0$ で微分可能かどうか調べよ.

担当教員：山口 航平　研究室：A210　E-mail:yamaguchi.kohei@math.nagoya-u.ac.jp

ε-N 論法

高校では「数列 a_n が a に限りなく近づく」ならば $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ と学んだ. この「限りなく近づく」という表現の曖昧さを消すために,「ε-N **論法**」に基づいて極限を定式化する.

定義 4. $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を実数列とする.

(i) ある $a \in \mathbb{R}$ が存在して次の条件が満たされるとき, 数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は **(a に) 収束する**といい, $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ と表す:

任意の $\varepsilon > 0$ に対し, ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して,
$n > N$ ならば $|a_n - a| < \varepsilon$ となる.

(ii) 数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が収束しないとき, $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は**発散する**という.
特に, 任意の $R > 0$ に対して, ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して, $n > N$ となる任意の n に対して $a_n > R$ となるとき, 数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は**正の無限大に発散する**といい, $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ と表す.

定理 7. (アルキメデスの原理) 任意の 2 つの実数 $a, b > 0$ に対して，$Na > b$ となる自然数 N が存在する

例題 5. $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ を示せ.

【解答】 $\varepsilon > 0$ を任意の正の実数としたとき, アルキメデスの原理から, $N\varepsilon > 1$ となる $N \in \mathbb{N}$ が存在する (この N は ε に依存して決まる). ゆえに,

$$n > N \text{ ならば } n\varepsilon > 1, \text{ すなわち } \left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon \text{ である.}$$

定義 4 により, $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ である. □

以下の問題は, ε-N 論法を用いずに解くことは, 困難である. ε-N 論法を用いて, 以下の問題を解いてみよう.

問題 13. 数列 a_n が $a_n \to 0$ $(n \to \infty)$ ならば,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} a_k}{n} = 0$$

であることを示せ.

担当教員：山口 航平　研究室：A210　E-mail:yamaguchi.kohei@math.nagoya-u.ac.jp

ε-δ 論法

関数の極限値は, ε-N 論法と類似の「ε-δ **論法**」に基づいて定式化される.

定義 5. f を区間 $I \subset \mathbb{R}$ で定義されている実数値関数[a], $a \in \mathbb{R}$ を I の内部の点または端点する[b]. 実数 A が次の条件を満たすとき, A を f の点 a における**極限値**と呼ぶ:

任意の $\varepsilon > 0$ に対し, ある $\delta > 0$ が存在して,

$x \in I$ かつ $0 < |x - a| < \delta$ ならば $|f(x) - A| < \varepsilon$ となる.

また, このとき $\displaystyle\lim_{x \to a} f(x) = A$ と書く.

[a]つまり, $f : I \to \mathbb{R}$ とする. このことを「f は I 上の実数値関数」と言うこともある.

[b]例えば開区間 $I = (a, b)$ を考えると, 点 a は I の端点であるが $a \notin I$ である. このように, 極限値は点 a が定義域 I に含まれない場合にも定義される. 一般的に, 上の定義が意味を持つためには, 全ての $\delta > 0$ に対し $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < |x - a| < \delta\} \cap I \neq \emptyset$ である必要がある. ここで $\cap$ は集合の共通部分, $\emptyset$ は空集合である.

補足 4.

(a) 上のように極限の定義は ε-δ 論法により与えられるが, 具体的な計算は高校で学んだことと全く同様に行われる.

(b) 右極限値 $\displaystyle\lim_{x \to a+0} f(x)$ とは,「任意の $\varepsilon > 0$ に対し, ある $\delta > 0$ が存在して, $x \in I$ かつ $0 < x - a < \delta$ ならば $|f(x) - A| < \varepsilon$ となる」ような A のことである. (左極限値はこの条件式の「$0 < x - a < \delta$」を「$-\delta < x - a < 0$」に変更.)「$\displaystyle\lim_{x \to a} f(x) = A$ である」と「$\displaystyle\lim_{x \to a+0} f(x) = \lim_{x \to a-0} f(x) = A$ である」ことは互いに必要十分条件である.

(c) 「$\displaystyle\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ である」ことは次のように定式化される:「任意の $M > 0$ に対し, ある $\delta > 0$ が存在して, $x \in I$ かつ $0 < |x - a| < \delta$ ならば $f(x) > M$ となる」.

担当教員：山口 航平　研究室：A210　E-mail:yamaguchi.kohei@math.nagoya-u.ac.jp

例題 6. $I=(0,\infty)$ 上の実数値関数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ は, I 上で連続であることを示せ.

【解答】 $a\in I$ を任意に取る. 任意の $\varepsilon>0$ に対し, $\delta=\min\left\{\dfrac{a}{2},\dfrac{\varepsilon a^2}{2}\right\}$ と定めると,

$$|x-a|<\delta \quad \text{ならば} \quad |f(x)-f(a)|=\frac{|x-a|}{x\,a}<\frac{\frac{\varepsilon a^2}{2}}{\frac{a}{2}\cdot a}=\varepsilon$$

(最後の不等式において, 分母は $|x-a|<\delta$ ならば $x>a-\delta\geq\frac{a}{2}$ であること, また分子は $|x-a|<\delta\leq\frac{\varepsilon a^2}{2}$ を用いて評価した) が成り立つので, f は点 a において連続である. これまでの議論で, $a\in I$ は任意に選ばれていたので, f は I 上連続である. □

(上の解答のように, ε-δ 論法では, $\delta>0$ は与えられた $\varepsilon>0$ に応じて決めて良い.)

ε-δ 論法を用い極限を定義することで, 定義 1 から以下の問題のような関数においても連続性が定義される.

問題 14. 関数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を次で定義する.

$$f(x)=\begin{cases}1 & (x=0)\\ \frac{1}{p} & (x\text{ は有理数}, x=q/p,\ p\text{ と }q\text{ は互いに素な整数}, p>0)\\ 0 & (x\text{ は無理数})\end{cases}$$

このとき, a が有理数のとき f は点 $x=a$ で不連続, a が無理数のとき f は点 $x=a$ で連続となることを示せ. ただし, 必要であれば, $[0,1]$ 内で有理数が稠密 (ちゅうみつ) であることを用いてよい. (無理数も稠密である.)

補足 5. 「$[0,1]$ 内で有理数が稠密である.」とは $[0,1]$ 内の任意の点 a に対し, 点 a の任意の近傍が有理数を少なくとも一つ含むことを言う. (無理数の稠密性に関しても同様.)