担当教員：山口 航平　研究室：A210　E-mail:yamaguchi.kohei@math.nagoya-u.ac.jp

行列の基本変形と連立一次方程式 略解

問題 1.

(1)
$$\begin{pmatrix} 3 & -6 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & -6 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(2)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -9 & -1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{(3)}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{9} & \frac{2}{9} \end{pmatrix} \xrightarrow{(4)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{8}{9} & \frac{7}{9} \\ 0 & 1 & \frac{1}{9} & \frac{2}{9} \end{pmatrix}$$

ここで (1) は第 1 行と第 2 行を入れ替える, (2) は第 2 行に第 1 行の (-3) 倍を加える, (3) は第 2 行を (-9) で割る, (4) は第 1 行に第 2 行の (-1) 倍を加える, 基本変形を表す. 階数は 2 である.

(2)
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{pmatrix} \xrightarrow{(2)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{(3)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ここで (1) は第 2 行に第 1 行の (-4) 倍を加え, 第 3 行に第 1 行の (-7) 倍を加える, (2) は第 2 行を (-3) でわり, 第 3 行を (-6) で割る, (3) は第 3 行に第 2 行の (-1) 倍を加える, 基本変形を表す. 階数は 2 である.

問題 2. $ad - bc \neq 0$ より, a または c のどちらかは 0 でないので, (必要なら行を入れ替える基本変形を施すことで) $a \neq 0$ と仮定しても一般性を失わない. 行基本変形を施すと,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \xrightarrow{(1)} \begin{pmatrix} 1 & b/a \\ c & d \end{pmatrix} \xrightarrow{(2)} \begin{pmatrix} 1 & b/a \\ 0 & d-(bc/a) \end{pmatrix} \xrightarrow{(3)} \begin{pmatrix} 1 & b/a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(4)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ここで (1) は第 1 行を a で割る, (2) は第 2 行に第 1 行の $(-c)$ 倍を加える, (3) は第 2 行を $d-(bc/a) = (ad-bc)/a \neq 0$ で割る, (4) は第 1 行に第 2 行の $-b/a$ 倍を加える, という基本変形を表す. 従って階数は 2 である. □

問題 3. 拡大係数行列を行基本変形で簡約化して得られる行列は

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

である (例題 2 を参照). もし仮に, 解 $\boldsymbol{x}$ が存在すると仮定すると, それは命題 1 により

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 = 1 \\ 0 = 1 \end{cases}$$

を満たすはずだが, 特に 3 番目の方程式は決して成り立たないので矛盾. ゆえに, 方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ は解を持たない. □

担当教員：山口 航平　研究室：A210　E-mail:yamaguchi.kohei@math.nagoya-u.ac.jp

問題 4.

(1)
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a-b \\ a \\ b \\ b \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (a, b \text{ は任意定数}).$$

(2) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.　(3) 解なし.　(4) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

問題 5.

(1) 省略.　(2) $X^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -c & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.　(3) 第 1 行に第 2 行の $(-c)$ 倍を加える操作.

問題 6.

(1) $X = X^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.　(2) $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.　(3) $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

問題 7. 一般に A を $m \times n$ 行列とした時, $\operatorname{rank} A \leq \min\{m, n\}$ であることを注意しておく.

(1) まず, 「f が単射ならば $\operatorname{rank} A = n$ である」ことを示す. 仮に $\operatorname{rank} A \neq n$ であるとすると, 冒頭の注意により $\operatorname{rank} A < n$ である. A の標準系 A' の主成分の個数は n より少ないので, n 個の未知変数に対する連立一次方程式 $A'\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ は (連立している方程式の個数が n より少ないので) 必ず非自明な解を持つ[1]. その解を $\boldsymbol{x}$ $(\neq \mathbf{0})$ と書くと, 命題 1 よりこれは $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ の解でもある. 一方, $A\mathbf{0} = \mathbf{0}$ も成り立つ[2] ので, 「$\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$ であるが $f(\boldsymbol{x}) = f(\mathbf{0})$」となる. これは f が単射でないことを意味しており, 従って (対偶を考えることにより), f が単射ならば必ず $\operatorname{rank} A = n$ である.

次に, 「$\operatorname{rank} A = n$ ならば f が単射である」ことを示す. $\operatorname{rank} A = n$ ならば, 冒頭の注意により必ず $m \geq n$ である. 特に, A の標準系は次の形をしている:

$$\begin{pmatrix} I_n \\ O \end{pmatrix} \qquad (\text{ただし } I_n \text{ は } n \text{ 次の単位行列}, O \text{ は } (m-n) \times n \text{ の零行列.})$$

これより, $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ を満たすのは $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ のみであることが分かる. これは $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid f(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}\} = \{\mathbf{0}\}$ であることを意味するので, 補足 3 で説明したことにより f が単射であることが結論づけられる. □

(2) 省略 (各自考えてみよ).

[1] これは定理 3 の主張そのものである.

[2] 左辺の $\mathbf{0}$ は $\mathbb{R}^n$ の零ベクトルで, 右辺の $\mathbf{0}$ は $\mathbb{R}^m$ の零ベクトルである. 本当は区別すべきであるが同じ記号で略記している.