担当教員：山口 航平　研究室：A210　E-mail:yamaguchi.kohei@math.nagoya-u.ac.jp

行列の基本変形と連立一次方程式

実施日：April 26, 2024

今日の演習では「行列の基本変形による簡約化」に関する計算を習得し, それが連立 1 次方程式の解法にどのように用いられているのかを学ぶ. 例題などで自分で手を動かしながら書いてあることを確認しつつ, 理解を深めてほしい.

(以下,「定数」とは, 特に断らない限り「実数または複素数の定数」とする.)

行基本変形

定義 1. $m \times n$ 行列

$$A = (a_{ij})_{1\leq i\leq m, 1\leq j\leq n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

に対する, 次の 3 つの操作を**行に関する基本変形** (または単に**行基本変形**) という:

(i) A の第 i 行と第 j 行を入れ替える $(1 \leq i, j \leq m)$.

(ii) A の第 i 行を c 倍する ($c \neq 0$ は定数).

(iii) A の第 i 行に第 j 行の c 倍を加える (c は定数, $1 \leq i, j \leq m$).

補足 1. 上の定義における「行」を全て「列」に置き換えることで, **列基本変形**も定義される. (例えば, 第 j 列の c 倍を第 i 列に加える, 等の操作が列基本変形である.)

例 1.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$$

を例に取って行基本変形をいくつか施してみよう.

(1) $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{第 1 行と第 3 行の入れ替え}} \begin{pmatrix} 9 & 10 & 11 & 12 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

(2) $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{第 2 行を 3 倍}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 15 & 18 & 21 & 24 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$$

(3) $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{第 2 行に第 1 行の } (-3) \text{ 倍を加える}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5+(-3)\times 1 & 6+(-3)\times 2 & 7+(-3)\times 3 & 8+(-3)\times 4 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & -2 & -4 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$$

担当教員：山口 航平　研究室：A210　E-mail:yamaguchi.kohei@math.nagoya-u.ac.jp

定義 2.

(i) 第 i 行の左端から見て最初の 0 でない成分を第 i 行の**主成分**と言う.
(行ベクトルが零ベクトルである場合, その行に対する主成分は定義されない.)

(ii) 以下の (a) ∼ (d) をみたす行列を**簡約行列** (または簡約階段行列) と呼ぶ:

(a) 零ベクトルである行ベクトルは零ベクトルでない行ベクトルより下にある.

(b) 零ベクトルでない行ベクトルの主成分は 1 である.

(c) 各行ベクトルの主成分は下の行ほど右にある. つまり, 第 i 行の主成分が第 j_i 列の成分であるとすると, $j_1 < j_2 < j_3 < \cdots$ となる.

(d) 各行ベクトルの主成分を含む列ベクトルの, 主成分以外の成分は全て 0 である.

つまり, 簡約行列は以下のような形をしている. 左下の空白部分の成分は全て 0 であり, $*$ は 0 とは限らない成分を表している.

$$\begin{pmatrix}
0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * \\
 & & & & & & & & & & & 0 & & \vdots & \\
 & & & & & & & & & \ddots & & \vdots & & \vdots & \\
 & & & & & & & & & & & 0 & & \vdots & \\
 & & & & & & & & & & & 1 & * & \cdots & * \\
 & & & & & & & & & & & & & & \\
\end{pmatrix}$$

例題 1. 以下の行列のうち, 簡約行列を全て挙げよ.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$　(3) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$　(4) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

【解答】 (1) と (4) が簡約行列である.
(2) の行列は, 2 行目と 3 行目の主成分が同じ列に属している. 従って, 定義 2 (ii) の (c) 及び (d) を満たしていない. ((a), (b) は満たしている.)
(3) の行列は, 2 行目の主成分が属する 3 列目の 1 行目に 0 でない成分が現れているので, 定義 2 (ii) の (d) を満たしていない. ((a), (b), (c) は満たしている.) □

担当教員：山口 航平　研究室：A210　E-mail:yamaguchi.kohei@math.nagoya-u.ac.jp

定理 1. 任意の $m \times n$ 行列 A に対し, 行基本変形を有限回施して簡約行列にすることができる. 得られる簡約行列は, 途中の行基本変形の仕方によらず一意に定まる.

定義 3. 定理 1 で得られた簡約行列を A の**標準形**と呼ぶ. また, A の標準形の主成分の個数を A の**階数**と呼び, $\mathrm{rank}\, A$ とかく. (A が零行列ならば $\mathrm{rank}\, A = 0$ である.)

例題 2. 行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 5 & 10 \end{pmatrix}$ の標準形と階数を求めよ.

【解答】 例えば, 以下のように行基本変形を 5 回施せば良い:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 5 & 10 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 5 & 10 \end{pmatrix} \xrightarrow{(2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 20 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{(3)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 13 \end{pmatrix} \xrightarrow{(4)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(5)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ここで

(1) 第 1 行に第 2 行の (-1) 倍を加える.

(2) 第 2 行に第 1 行の (-2) 倍を加え, 第 3 行に第 1 行の (-5) 倍を加える,
(定義 2 (ii) の 条件 (c) が成り立つように, 1 列目の成分をなるべく 0 にする)

(3) 第 3 行に第 2 行の (-1) 倍を加える,
(今度は 2 列目の成分をなるべく 0 にする)

(4) 第 3 行を 13 で割る.
(定義 2 (ii) の 条件 (b) が成り立つように, 3 行目の主成分を 1 にする)

(5) 第 2 行に第 3 行の (-7) 倍を加え, 第 1 行に第 3 行の 2 倍を加える.
(定義 2 (ii) の 条件 (d) が成り立つように, 3 行目の主成分の上にある数を 0 にする.)

という基本変形を行った. 従って A の標準形は上の赤字の簡約行列である. (別の順番で簡約化しても上の行列が現れることを, 各自確かめてみるとよい.) また, 標準形が 3 つの主成分 (青字の 1) を持つので, A の階数は 3 である. □

問題 1. 次の行列の標準形と階数を求めよ.

(1) $\begin{pmatrix} 3 & -6 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$　　(2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

問題 2. 行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が $ad - bc \neq 0$ を満たすとき, A の階数は 2 であることを示せ.

担当教員：山口 航平　研究室：A210　E-mail:yamaguchi.kohei@math.nagoya-u.ac.jp

連立一次方程式

定義 4.

(i) 未知変数 $x_1, \ldots, x_n$ に対する**連立一次方程式**とは, $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ なる形に表される方程式のことである. ただし,

- $\boldsymbol{x} = (x_j)_{1 \le j \le n}$ は未知変数を並べた列ベクトル,
- $A = (a_{ij})_{1 \le i \le m, 1 \le j \le n}$ は与えられた $m \times n$ 行列 (**係数行列**と呼ばれる),
- $\boldsymbol{b} = (b_i)_{1 \le i \le m}$ は与えられた列ベクトル.

である. 成分ごとに書き下すと次のようになる:

$$
(*) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}
$$

(ii) 係数行列 A と列ベクトル $\mathbf{b}$ を並べてできる $m \times (n+1)$ 行列

$$
\tilde{A} = (A\ \boldsymbol{b}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}
$$

を, 連立一次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の**拡大係数行列**と呼ぶ.

上のような連立一次方程式を解く際に, 行基本変形による行列の簡略化 (定理 1) は非常に有効である. 鍵になるのは次の事実である:

命題 1. 次の 2 条件は互いに同値 (必要十分条件) である:

(i) $\boldsymbol{x}$ は連立一次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解である.

(ii) $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の拡大係数行列 $\tilde{A} = (A\ \boldsymbol{b})$ に対し, 行基本変形を施して得られた新たな行列を $\tilde{A}' = (A'\ \boldsymbol{b}')$ とした時, $\boldsymbol{x}$ は $\tilde{A}'$ を拡大係数行列とする連立一次方程式 $A'\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}'$ の解である.

拡大係数行列に対する行基本変形 (定義 1) の内容は

定義 1 の (i)　$\leftrightarrow$　$(*)$ の方程式たちの順番の入れ替え

定義 1 の (ii)　$\leftrightarrow$　$(*)$ の中の 1 つの方程式の両辺に 0 でない定数をかける

定義 1 の (iii)　$\leftrightarrow$　$(*)$ の中の 1 つの方程式の定数倍を別の方程式に加える

という操作に対応する. これらの操作で解は変わらないので, 上の命題は当然正しい.

担当教員：山口 航平　研究室：A210　E-mail:yamaguchi.kohei@math.nagoya-u.ac.jp

定理 1 により, どんな連立一次方程式の拡大係数行列も基本変形により簡約行列にすることができる. 命題 1 により, その簡略化の過程で連立一次方程式の解は変わらない. 以上により, 方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ を解く際に, 行基本変形で拡大係数行列 $\tilde{A}$ を標準形にしてから解を求めてもよいのである. (A ではなく $\tilde{A}$ を簡略化しないといけない点に注意せよ.)

例題 3. 次の連立一次方程式の一般解を求めよ.

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 1 \\ 2x_1 + 8x_2 + x_3 + x_4 = -3 \\ -x_1 - 4x_2 - x_4 = 2 \end{cases}$$

【解答】 拡大係数行列 $\tilde{A}$ は次である.

$$\tilde{A} = (A\ \mathbf{b}) = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & -2 & 1 \\ 2 & 8 & 1 & 1 & -3 \\ -1 & -4 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$\tilde{A}$ に行基本変形を施し, 標準形にする.

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & -2 & 1 \\ 2 & 8 & 1 & 1 & -3 \\ -1 & -4 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1)} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{(2)} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(3)} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{(4)} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{(5)} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となる. ここで, (1) は第 2 行に第 1 行の (-2) 倍を加え, 第 3 行に第 1 行を加える, (2) は第 2 行を 5 で割り, 第 3 行を 3 で割る, (3) は第 3 行に第 2 行を加える, (4) は第 2 行を (-1) 倍する, (5) は第 1 行に第 2 行の (-3) 倍を加える, という行基本変形を表す. こうして得られた $\tilde{A}$ の標準系を拡大係数行列とする連立一次方程式

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + x_4 = -2 \\ x_3 - x_4 = 1 \end{cases}$$

を解けばよい. (標準形の第 3 行に対応する方程式は $0 = 0$ という式で, 考えなくて良い.) この方程式の解は無数にある. 実際, $x_2 = a$ と $x_4 = b$ を任意定数として $x_3 = x_4 + 1 = b + 1$, $x_1 = -4x_2 - x_4 - 2 = -4a - b - 2$ としたものが一般解を与える. まとめると, 元の方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の一般解は次のように書ける:

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4a - b - 2 \\ a \\ b + 1 \\ b \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (a, b \text{ は任意定数})$$

□

補足 2. 連立一次方程式は解を持たないこともある. 次の問題を解いてみよ.

問題 3.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 10 \end{pmatrix}$$

を係数に持つ $\boldsymbol{x} = (x_i)_{1 \leq i \leq 3}$ に対する連立一次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ は解を持たないことを示せ. (ヒント: この方程式の拡大係数行列は例題 2 で扱った.)

問題 4. 次の連立一次方程式の一般解を求めよ. (解がなければ, 理由を説明せよ.)

$$(1) \begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ -2x_1 + 6x_2 - 3x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 - 9x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 0 \\ 2x_1 - 6x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \qquad (2) \begin{cases} 3x_1 - 4x_2 + 8x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -1 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} -x_2 - 3x_3 = 1 \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 0 \\ 3x_1 + 7x_2 + 9x_3 = 1 \end{cases} \qquad (4) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$$

解の存在に関して, 次の事実が知られている.

定理 2. 連立一次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ に解が存在するための必要十分条件は

$$\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} (A \ \boldsymbol{b})$$

である. また, 解が存在するとき, 解に含まれる任意定数の個数は $n - \operatorname{rank} A$ である. (ただし, n は未知変数 $x_1, \ldots, x_n$ の個数.)

特に $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ の場合を考えてみよう. 連立一次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ は $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ という解を必ず持つ[1]. この解を**自明な解**といい, $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ なる解を**非自明な解**という.

定理 3. 連立一次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ が非自明な解を持つための必要十分条件は

$$\operatorname{rank} A < n$$

である. また, 非自明な解が存在するとき, 解に含まれる任意定数の個数は $n - \operatorname{rank} A$ である. (ただし n は未知変数 $x_1, \ldots, x_n$ の個数.)

[1] 行基本変形において, 零ベクトルである列には全く何も起こらないので $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} (A \ \boldsymbol{0})$ である. 従って, 自明な解が必ず存在することは定理 2 の主張と整合している.

担当教員：山口 航平　研究室：A210　E-mail:yamaguchi.kohei@math.nagoya-u.ac.jp

問題 5. c を定数とし, $X = \begin{pmatrix} 1 & c & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ とする. この時, 以下の問いに答えよ.

(1) A を $3 \times n$ 行列とする. 行列 XA は, A に「第 2 行の c 倍を第 1 行に加える」という行基本変形で得られた行列であることを示せ.

(2) X は正則行列であることを示し, 逆行列 X^{-1} を求めよ.

(3) X^{-1} を左からかける操作はどのような行基本変形になっているか答えよ.

「i 行目と j 行目の入れ替え」や「i 行目に 0 でない定数 c をかける」という行基本変形も, 問題 5 と同様に, 適当な正則行列を左からかける操作で実現できる. これを示そう.

問題 6. A を $3 \times n$ 行列とする.

(1) 行列 XA が, A に「1 行目と 3 行目の入れ替え」という行基本変形を施して得られた行列になるような 3 次正方行列 X を求めよ. また X が正則であることを示し, 逆行列 X^{-1} を求めよ.

(実は $X^{-1} = X$ となる. つまり $X^2 = I_3$ (=3 次の単位行列) となるのだが, これは行の入れ替えを 2 回行うと元の行列に戻ることを表している.)

(2) (1) と同様に, 左からのかけ算により, 基本変形「2 行目と 3 行目の入れ替え」を実現するような 3 次正方行列 X を求めよ.

(3) (1) と同様に, 左からのかけ算により, 基本変形「2 行目に 0 でない定数 c をかける」を実現するような 3 次正方行列 X を求めよ.

問題 7. A を実数を成分とする $m \times n$ 行列とする. 左からのかけ算により, A は写像

$$f : \mathbb{R}^n \ni \boldsymbol{x} \mapsto A\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m$$

を定める. 次の問いに答えよ.

(1) 写像 f が単射であるための必要十分条件は, $\operatorname{rank} A = n$ であることを示せ.

(2) 写像 f が全射であるための必要十分条件は, $\operatorname{rank} A = m$ であることを示せ.

補足 3. 問題 7 の, 行列 A が定める写像 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ について, 次が知られている:

$$f \text{ が単射} \quad \Longleftrightarrow \quad \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}\} = \{\boldsymbol{0}\}$$

「$\Rightarrow$」は単射の定義からすぐ従うので, 「$\Leftarrow$」を証明しよう.

もし $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in \mathbb{R}^n$ が $f(\boldsymbol{x}_1) = f(\boldsymbol{x}_2)$, つまり $A\boldsymbol{x}_1 = A\boldsymbol{x}_2$ を満たしたとすると, 移項して $A(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2) = \boldsymbol{0}$ となる. つまり, $f(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2) = \boldsymbol{0}$ だが, 仮定より写像 f により $\boldsymbol{0}$ に写るベクトルは $\boldsymbol{0}$ のみなので $\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{0}$, すなわち $\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}_2$ でなければならない. こうして, 「$f(\boldsymbol{x}_1) = f(\boldsymbol{x}_2)$ ならば $\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}_2$ である」ことが示せたので, f は単射である.

(ちなみに, 写像 f により $\boldsymbol{0}$ に写るベクトルの集合 $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}\}$ は, f の**核**と呼ばれ, 線形代数において大事な集合である. 一般的なことは後期に学ぶ.)