担当教員：山口 航平　研究室：A210　E-mail:yamaguchi.kohei@math.nagoya-u.ac.jp

行列の演算　略解

問題 1.

(1)

$$AB = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \ BA = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

(2)

$$AB = \begin{pmatrix} 10 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \ BA = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 13 \\ 2 & 5 & 8 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

(3)

$$AB = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta & \cos\theta\cos\varphi & -\cos\theta\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}, \ BA = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta\cos\varphi & \cos\theta\cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

問題 2. 一般に, 対角行列同士の積は対角成分同士の積によって計算される:

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & b_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1a_2 & 0 \\ 0 & b_1b_2 \end{pmatrix}.$$

この性質と k に関する帰納法から容易に主張は従う.

問題 3. $X = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ とおく. 行列の積の定義に従い計算すると,

$$\begin{aligned} AX &= \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} ad+b(-c) & a(-b)+ba \\ cd+d(-c) & c(-b)+da \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ XA &= \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} da+(-b)c & db+(-b)d \\ (-c)a+ac & (-c)b+ad \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

従って $A^{-1} = X$ である.

問題 4.

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = \left(A(BB^{-1})\right)A^{-1} = (AI_n)A^{-1} = AA^{-1} = I_n.$$

同様に

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = \left(B^{-1}(A^{-1}A)\right)B = (B^{-1}I_n)B = B^{-1}B = I_n.$$

このように, AB との積が単位行列となるような行列が存在するので AB は正則行列である. また, 例題 2 により逆行列は一意的なので, $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ である.

問題 5. 単位行列 I_n と任意の n 次正方行列 A の積は交換する $(I_nA = AI_n)$ ので,

$$\begin{aligned} (I_n - A)(I_n + A + A^2 + \cdots + A^{k-1}) &= I_n - A^k \\ (I_n + A + A^2 + \cdots + A^{k-1})(I_n - A) &= I_n - A^k \end{aligned}$$

担当教員：山口 航平　研究室：A210　E-mail:yamaguchi.kohei@math.nagoya-u.ac.jp

が任意の $k \geq 1$ に対して成り立つ. 特に, $A^k = O$ となる場合には

$$\begin{aligned}(I_n - A)(I_n + A + A^2 + \cdots + A^{k-1}) &= I_n \\ (I_n + A + A^2 + \cdots + A^{k-1})(I_n - A) &= I_n\end{aligned}$$

となる. ゆえに $I_n - A$ は正則行列で, $(I_n - A)^{-1} = I_n + A + A^2 + \cdots + A^{k-1}$ である.

補足 1. 問題 5 の解答では, 多項式の恒等式

$$(x-y)(x^{k-1} + x^{k-2}y + \cdots + xy^{k-2} + y^{k-1}) = x^k - y^k$$

において, $x = I_n$, $y = A$ のように「変数に行列を代入する」という操作を行ったが, この操作は一般には注意が必要である. 例えば, $k = 2$ の場合の恒等式 $x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$ に行列 A, B を代入すると, 左辺は $A^2 - B^2$ であるのに対し, 右辺は

$$(A+B)(A-B) = A(A-B) + B(A-B) = A^2 - AB + BA - B^2$$

となる. 問題プリントの補足 2(g) でも述べたように, 行列の世界では $AB \neq BA$ となることがあるので, $A^2 - B^2 = (A+B)(A-B)$ は一般には成立しない. ($AB = BA$ ならばこの等式は成り立つ. この問題の場合, $I_nA = A = AI_n$ より, この等式を使ってよい.)

問題 6.

(1) 成分表示で書くと両辺とも,

$$\left(\sum_{k=1}^{2} a_{ik} \left(b_{kj} + c_{kj} \right) \right)_{1 \leq i,j \leq 2}$$

となる.

(2) 成分表示で書くと両辺とも,

$$\left(\sum_{k=1}^{2} \sum_{l=1}^{2} a_{ik} b_{kl} c_{lj} \right)_{1 \leq i,j \leq 2}$$

となる.

担当教員： 山口 航平　研究室： A210　E-mail:yamaguchi.kohei@math.nagoya-u.ac.jp

問題 7. 例えば

$$
\begin{aligned}
&\sigma_x\sigma_y - \sigma_y\sigma_x \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2i & 0 \\ 0 & -2i \end{pmatrix} = 2i\sigma_z
\end{aligned}
$$

その他も同様.

問題 8.

(1) $abc \neq 0$ が A が正則であるための必要十分条件. この時の逆行列は

$$
A^{-1} = \begin{pmatrix} a^{-1} & -a^{-1}b^{-1} & a^{-1}b^{-1}c^{-1} \\ 0 & b^{-1} & -b^{-1}c^{-1} \\ 0 & 0 & c^{-1} \end{pmatrix} = \frac{1}{abc}\begin{pmatrix} bc & -c & 1 \\ 0 & ac & -a \\ 0 & 0 & ab \end{pmatrix}.
$$

(2) 数学的帰納法などで,

$$
A^k = \begin{pmatrix} a^k & ka^{k-1} \\ 0 & a^k \end{pmatrix}.
$$

が成り立つことを示すことができる.