担当教員：山口 航平　研究室：A210　E-mail:yamaguchi.kohei@math.nagoya-u.ac.jp

集合と写像　略解

問題 1. A から B への写像は, A の各元に対して一つ対応する B の元を決めたら定まる. 従って, A を p 個の元, B を q 個の元からなる集合とした時, A から B への写像の個数は q^p 個である. $A = \{a, b, c\}$, $B = \{X, Y\}$ の時に $2^3 = 8$ 個の写像を全て書き下すと,

$$
\begin{array}{rlll}
\text{(i)} & f(a) = X, & f(b) = X, & f(c) = X \\
\text{(ii)} & f(a) = X, & f(b) = X, & f(c) = Y \\
\text{(iii)} & f(a) = X, & f(b) = Y, & f(c) = X \\
\text{(iv)} & f(a) = X, & f(b) = Y, & f(c) = Y \\
\text{(v)} & f(a) = Y, & f(b) = X, & f(c) = X \\
\text{(vi)} & f(a) = Y, & f(b) = X, & f(c) = Y \\
\text{(vii)} & f(a) = Y, & f(b) = Y, & f(c) = X \\
\text{(viii)} & f(a) = Y, & f(b) = Y, & f(c) = Y.
\end{array}
$$

問題 2.

(1) 一般に, A から B への単射が存在するならば, (A の元の個数) $\leq$ (B の元の個数) である (さもなくば, 必ずある B の元に写される A の元が複数個存在する). 従って, 今の場合は (A の元の個数) $= 3 > 2 =$ (B の元の個数) であるので, A から B への単射は存在しない. 従って答えは 0 個.

(2) 問題 1 のリストうち, 全射でないものは (i), (viii) の 2 つなので, A から B への全射は 6 個ある.

補足：一般に, A から B への全射が存在するならば, (A の元の個数) $\geq$ (B の元の個数) である (さもなくば, A の元から写されない B の元が必ず存在する). (1) の説明と合わせると, A から B への全単射が存在するならば,

$$(A \text{ の元の個数}) = (B \text{ の元の個数})$$

であることが分かる.

問題 3.

(1) 単射であるが, 全射でない.　(2) 全単射である.　(3) 全単射である.

問題 4.

(1) 全単射である.

(2) 単射でも全射でもない.

(3) 単射である. 全射ではない

(4) 単射でないが全射である.

担当教員：山口 航平　研究室：A210　E-mail:yamaguchi.kohei@math.nagoya-u.ac.jp

問題 5.

(1) $a \neq 0$ もしくは $b \neq 0$

(2) $ad - bc \neq 0$.

(3) 全射にはなりえない.

問題 6. $r \in A$ に対して,

$$\begin{cases} r \text{ を } p \text{ で割った余りを } m \\ r \text{ を } q \text{ で割った余りを } n \end{cases}$$

と定める. $r \in A$ という仮定より r は p とも互いに素なので, m は p と互いに素である. 同様に n と q も互いに素なので, $f(r) = (m,n)$ という対応により, 写像 $f : A \to B$ が得られる. p,q が互いに素であるという条件を用いて, この写像 f が全射かつ単射であることを示せばよい. 詳細は省略する.

問題では p と q が互いに素としていたが, これを $\gcd(p,q) = 1$ と置き換え ($\gcd(p,q)$ は p と q の最大公約数のこと), さらに A,B も

$$\begin{aligned} A &= \{r \mid r \in \{1,2,\ldots,pq\} \text{ であり}, \gcd(r,pq) = 1\} \\ B &= \{(m,n) \mid m \in \{1,2,\ldots,p\}, n \in \{1,2,\ldots,q\} \\ &\qquad\qquad \text{であり}, \gcd(m,p) = 1, \text{ かつ } \gcd(n,q) = 1\} \end{aligned}$$

とすることで, p, q の範囲を「p,q は 1 以上」に拡張できる.