担当教員：山口 航平　研究室：A210　E-mail:yamaguchi.kohei@math.nagoya-u.ac.jp

集合と写像

実施日：April 12, 2024

集合と写像は, 数学における様々な主張を述べる際に不可欠な概念である. 初回の演習では, これらの基本的な用語に慣れることから始めよう.

集合

定義 1. (「定義する」とは「名前を付けること」である.)

- ものの集まりを**集合**と呼ぶ.
- 集合を構成する各要素を集合の**元**という.
- A を集合とする. x が A の元であることを, 「$x \in A$」と表し, x は A に属するという. x が A の元でない時には, 「$x \notin A$」と表す.

集合については高校でも多少学んだと思うが, 大学での数学での言葉つかいに慣れていない 1 年生には, 抽象的すぎて呪文のように何を言っているのか分からないかもしれない. そこで, 次の馴染みのある例を見ておこう.

例. $\mathbb{R}$ を実数全体の集合とする. 整数, 有理数, 無理数は全て実数なので, 例えば

$$0 \in \mathbb{R}, \quad -1 \in \mathbb{R}, \quad \frac{1}{3} \in \mathbb{R}, \quad \pi \in \mathbb{R}$$

となる. ただし, 複素数単位 $i = \sqrt{-1}$ は実数ではないので, $i \notin \mathbb{R}$ である.

このように, 大学の数学では「r は実数である」と書く代わりに, 「$r \in \mathbb{R}$」, と書くことが多い. ちなみに, 属する元が一つもない集合を**空集合**と呼び, $\emptyset$ と表す.

補足 1. 実数全体の集合 $\mathbb{R}$ の他にも, 高校までに学習した数のなす集合はよく使われるので記号が与えられている:

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$: 自然数全体の集合.
- $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, \ldots\}$: 整数全体の集合.
- $\mathbb{Q} = \{\frac{q}{p} \mid p, q \in \mathbb{Z}, p \neq 0\}$: 有理数全体の集合.
- $\mathbb{C} = \{x + iy \mid x, y \in \mathbb{R}\}$: 複素数全体の集合.

集合を定める際には, 上で用いた記法

$$A = \{a, b, c, \ldots\} \quad \text{または} \quad A = \{x \mid x \text{ はかくかくしかじかを満たす}\}$$

のように, 元を全て列挙する方法と, 集合に含まれるためのかくかくしかじかの条件を書き下す方法の 2 通りがある.

担当教員：山口 航平　研究室：A210　E-mail:yamaguchi.kohei@math.nagoya-u.ac.jp

また, 高校までに扱った平面ベクトルや空間ベクトルは

- $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$: 2 個の実数の組み全体の集合.
  (これは xy-平面に他ならない.)
- $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$: 3 個の実数の組み全体の集合.
  (これは xyz-空間に他ならない.)

という集合の元である ($\mathbb{Z}^2$, $\mathbb{C}^3$,... なども同様に定義される).

定義 2. A, B を集合とする.

- 任意の $x \in A$ に対して $x \in B$ が成立するとき, A は B の**部分集合**であるといい, $A \subset B$ と表す.
- $A \subset B$ かつ $B \subset A$ が成立するとき, $A = B$ と表す.

補足 2. 上の定義で, 「任意の $x \in A$ に対して...」という文の意味は, 「どのような $x \in A$ を取ってきても, x に対して...」という意味である. 数学の文献では頻繁に用いられる.

例題 1. 次の主張の真偽を判定せよ.

(1) $A = \{2, 4\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, とすると, $B \subset A$.

(2) $A = \mathbb{Z}$, $B = \mathbb{Q}$ とすると $A \subset B$ である.

(3) $A =$ この教室にいる学生全体の集合, $B =$ 名古屋大学の学生全体の集合, とすると $A \subset B$.

【解答】

(1) 偽.　(2) 真.　(3) (この教室に外部からの侵入者がいなければ) 真.

写像

写像とは, 「集合から集合への関数」のようなものである.

定義 3. A, B を集合とする. A から B への**写像** f とは

「任意の $x \in A$ に対して, ただ一つ $f(x) \in B$ を与える対応」

であり,

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

なる図式で表される. (単に $f : A \to B$ とだけ書くこともある.) 写像 f により, $x \in A$ に対応する $f(x) \in B$ を, f による x の**像**という.

担当教員：山口 航平　研究室：A210　　E-mail:yamaguchi.kohei@math.nagoya-u.ac.jp

例.

- 実数係数の多項式 $f(x)$ は, 与えられた $x \in \mathbb{R}$ に対してその値 $f(x) \in \mathbb{R}$ を対応させているので, $\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}$ への写像を一つ定めている. 同様に, $\mathbb{R}$ を定義域とする実数値関数 $f(x)$ は全て $\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}$ への写像である.

  ただし, 例えば有理関数 $f(x) = 1/x$ は $x = 0$ に対して実数の値を対応させることができないので, $\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}$ への写像ではない (無限大 ∞ は実数ではない).

- a, b, c, d を実数の定数とする. $\mathbb{R}^2$ からそれ自身への写像

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \cup & & \cup \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix} \end{array}$$

  は **1 次変換**と呼ばれる[a]. これは与えられた xy-平面上の点を, xy-平面上の新たな点に写す写像であり, 線形代数における**行列**の概念と密接に関わる.

- $A = \{a, b, c\}$ を 3 つの元からなる集合, $B = \{X, Y\}$ を 2 つの元からなる集合として, 例えば

$$f(a) = X, \quad f(b) = Y, \quad f(c) = Y$$

  と定めた対応 $f : A \to B$ は写像である. 他にも,

$$g(a) = X, \quad g(b) = X, \quad g(c) = X$$

  として定まる対応 $g : A \to B$ も写像である. 上の f のように, 異なる 2 つの A の元が, B の同一の元に対応してもよいし, g のように $Y \in B$ に対応する A の元が一つもなくてもよい.

[a] 高校までは xy-平面上の点 (ベクトル) を, (x, y) のように数を横に並べて書いていたが, 大学では縦に並べて書くことも多い. 大学では, 横ベクトルを **行ベクトル**, 縦ベクトルを**列ベクトル**と呼ぶ.

問題 1. 上の最後の例のように, $A = \{a, b, c\}$ を 3 つの元からなる集合, $B = \{X, Y\}$ を 2 つの元からなる集合とする. この時, A から B への写像はいくつあるか答えよ.

(より一般に, A を p 個の元からなる集合, B を q 個の元からなる集合とした時, A から B への写像の個数を p, q を用いて表せ.)

担当教員：山口 航平　研究室：A210　E-mail:yamaguchi.kohei@math.nagoya-u.ac.jp

定義 4. $f : A \to B$ を集合 A から集合 B への写像とする．

- $x \neq x'$ ならば必ず $f(x) \neq f(x')$ が成り立つとき，f は**単射**であるという．
- 任意の $y \in B$ に対し，$y = f(x)$ となる $x \in A$ が必ず存在するとき，f は**全射**であるという．
- 単射かつ全射である写像を**全単射**という．
  f が全単射ならば，任意の x に対して $g(f(x)) = x$ が成り立つような写像 $g : B \to A$ が必ず存在する．この g を f の**逆写像**と呼ぶ．

例.

- 先の例と同様に，集合 A, B を $A = \{a, b, c\}$, $B = \{X, Y\}$ と定める．

$$f(a) = X, \quad f(b) = Y, \quad f(c) = Y$$

  と定めた写像 $f : A \to B$ は，$X, Y \in B$ のどちらにも写される A の元が存在するので全射である．しかし，$b, c \in A$ という 2 つの要素がともに $Y \in B$ に写っているので f は単射ではない．

- 上と同じく $A = \{a, b, c\}$, $B = \{X, Y\}$ とし，写像 $g : B \to A$ を

$$g(X) = a, \quad g(Y) = b$$

  により定める．$X, Y \in B$ に対応する A の元が異なるので g は単射である．
  しかし，$c \in A$ に対応する B の元が存在しないので g は全射でない．

- 3 つの元からなる 2 つの集合 $A = \{a, b, c\}$, $B = \{X, Y, Z\}$ を考える．

$$f(a) = X, \quad f(b) = Y, \quad f(c) = Z$$

  により定まる写像 $f : A \to B$ は全単射である．その逆写像 $g : B \to A$ は

$$g(X) = a, \quad g(Y) = b, \quad g(Z) = c$$

  により与えられる．

問題 2. 上の例のように，集合 A, B を $A = \{a, b, c\}$, $B = \{X, Y\}$ と定める．

(1) A から B への写像のうち，単射であるものはいくつあるか答えよ．

(2) A から B への写像のうち，全射であるものはいくつあるか答えよ．

担当教員：山口 航平　研究室：A210　E-mail:yamaguchi.kohei@math.nagoya-u.ac.jp

問題 3. 自然数全体の集合を $\mathbb{N}$, 整数全体の集合を $\mathbb{Z}$ とする．次の写像 f が単射であるかどうか, また, 全射であるかどうかを答えよ．

(1) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z},\quad f(n) = n + 1.$　　(2) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\quad f(n) = n + 1.$

(3) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z},\quad f(n) = \begin{cases} -\dfrac{n-1}{2} & n : \text{奇数} \\ \dfrac{n}{2} & n : \text{偶数} \end{cases}$

問題 4. 以下の各々の関数（$\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}$ への写像）が単射であるかどうか答えよ．また, 全射であるかどうか答えよ．

(1) $f_1(x) = 3x$

(2) $f_2(x) = \sin x$

(3) $f_3(x) = \exp x$　　($\exp x$ は e^x と同じものです．)

(4) $f_4(x) = x(x^2 - 1)$

問題 5.

(1) a, b を実数の定数とし, 以下の $\mathbb{R}^2$ から $\mathbb{R}$ への写像を考える．

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{f_1} & \mathbb{R} \\ \cup & & \cup \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} ax + by \end{pmatrix} \end{array}$$

f_1 が全射であるために a, b が満たす条件を求めよ．

(2) a, b, c, d を実数の定数とし, 次の 1 次変換 ($\mathbb{R}^2$ から $\mathbb{R}^2$ への写像) を考える．

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{f_2} & \mathbb{R}^2 \\ \cup & & \cup \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix} \end{array}$$

f_2 が全射であるために a, b, c, d が満たす条件を求めよ．

(3) $a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3$ を実数の定数とし, 以下の $\mathbb{R}^2$ から $\mathbb{R}^3$ への写像を考える．

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{f_3} & \mathbb{R}^3 \\ \cup & & \cup \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} a_1x + b_1y \\ a_2x + b_2y \\ a_3x + b_3y \end{pmatrix} \end{array}$$

f_3 を全射にする $a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3$ は存在するか答えよ．

担当教員：山口 航平　研究室：A210　E-mail:yamaguchi.kohei@math.nagoya-u.ac.jp

問題 6. (チャレンジ問題) p と q を互いに素な 2 以上の整数とし, 集合 A, B を

$$\begin{aligned} A &= \{r \mid r \in \{1,2,\ldots,pq-1\} \text{ であり}, r \text{ と } pq \text{ は互いに素}\} \\ B &= \{(m,n) \mid m \in \{1,2,\ldots,p-1\}, n \in \{1,2,\ldots,q-1\} \\ &\qquad \text{であり}, m \text{ と } p \text{ は互いに素, かつ } n \text{ と } q \text{ は互いに素}\} \end{aligned}$$

と定める. この時, ある全単射 $f : A \to B$ が存在することを示せ.

(例えば $p = 4$, $q = 9$ のときは $pq = 36$ なので

$$A = \{1, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 25, 29, 31, 35\}$$

$$B = \{(1,1),(1,2),(1,4),(1,5),(1,7),(1,8),(3,1),(3,2),(3,4),(3,5),(3,7),(3,8)\}$$

はともに 12 個の元からなる集合である. 実は, **有限個の元からなる集合の間に全単射が存在することと, 含まれる元の個数が等しいことは必要十分条件である** (各自考えてみよ). 従って, 少なくとも $p = 4$, $q = 9$ の時には A から B への全単射は必ず存在する.)

補足 3. 問題 6 のように, 「**集合としては全く別物であるが, それらの間に全単射が存在するような集合の組**」が数学では度々現れる. この現象は数学の豊かさを表している.

例えば 2 つの集合 A, B の間に全単射が存在したとき, 上でも注意したように「集合 A に含まれる元の個数 $=$ 集合 B に含まれる元の個数」が成り立つ. もし集合 A に含まれる元を全て書き下すことや, A に含まれる元の個数を数えることが困難でも, 集合 B の方では同様の問題が簡単になることがあり得る. 例えば問題 6 の帰結として, 「与えられた数 N と互いに素な数の個数を数える」という問題は「$N = p_1^{k_1} \cdots p_\ell^{k_\ell}$ を素因数分解とした際に, ($p_1^{k_1}$ と互いに素な数の個数) $\times \cdots \times$ ($p_\ell^{k_\ell}$ と互いに素な数の個数) を計算する」という問題に帰着される. p を素数とすると「p^k と互いに素な数の個数は $p^k - p^{k-1}$」となるので, 後者は容易である. 詳細は省略するが, 結果として

$$\boxed{\{1,\ldots,N-1\} \text{ のうち } N \text{ と互いに素な数の個数} = N \times \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \times \cdots \times \left(1 - \frac{1}{p_\ell}\right)}$$

(ただし, $N = p_1^{k_1} \cdots p_\ell^{k_\ell}$ を N の素因数分解とする)

という公式が導かれる. $N = 36 = 2^2 \times 3^2$ を当てはめると, 右辺の値は

$$36 \times \left(1 - \frac{1}{2}\right) \times \left(1 - \frac{1}{3}\right) = 36 \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = 12$$

となり, 上で数えた 36 と互いに素な数の個数と確かに一致している. しかし, 四角で囲った公式を左辺の定義から直ちに導くことは容易ではない.

このように, 「**一見全く異なる数学的対象を, 写像を通じて比較することで, 予想外の数学的公式が導かれる**」ということが起こり得る. そのような非自明な公式を導くために世界最先端の数学者たちは日々研究を続けており, その研究においても集合や写像の概念は基本的であり, かつ必要不可欠なものである.