

◀ Koornwinder 多項式の Littlewood-Richardson 係数 ▶^{1/12}

山口 航平 (Kohei Yamaguchi) 名古屋大 D1

2021 / 3 / 2 @ 第17回数学総合若手研究集会 ~ 数学の交差点 ~

A, 12:00 ~ 12:30 Zoom

前半... 問題背景や基本的な事実の確認.

(Macdonald 多項式, Koornwinder 多項式, Littlewood-Richardson 係数)

後半... 主結果の説明. Koornwinder 多項式の Littlewood-Richardson 係数

(ピルゴージ経路)

今日は 表現論に現れる特殊関数 のはなしです。

3/12

まずは例からはじめよう。

$G = GL_N(\mathbb{C})$: 一般線型群

G の既約な多項式表現 (の同型類) は N の分割で
10ラ×トライズ"されます。

$$\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_N) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^N$$

s.t. $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_N$

$$P_N \ni \lambda \xleftrightarrow{1:1} V_\lambda \in \text{Rep}^{\text{irr.}}(G)$$

問. 2つの既約表現のテンソル積 $V_\lambda \otimes V_\mu \in$
既約表現の直和に分解せよ。

$$V_\lambda \otimes V_\mu = \bigoplus_{\nu} V_\nu^{\oplus C_{\lambda\mu}^\nu}$$

ν : un の感じのルール
を走る。

Littlewood-Richardson 係数.

一方で N 変数多項式環 $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_N]$ を考えます。

これには N 次対称群 S_N が変数の入れ換えで作用します。

$$A := \mathbb{C}[x_1, \dots, x_N]^{S_N} = \{ \text{対称多項式} \}$$

N の分割 $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_N) \in \mathcal{P}_N$ に対して

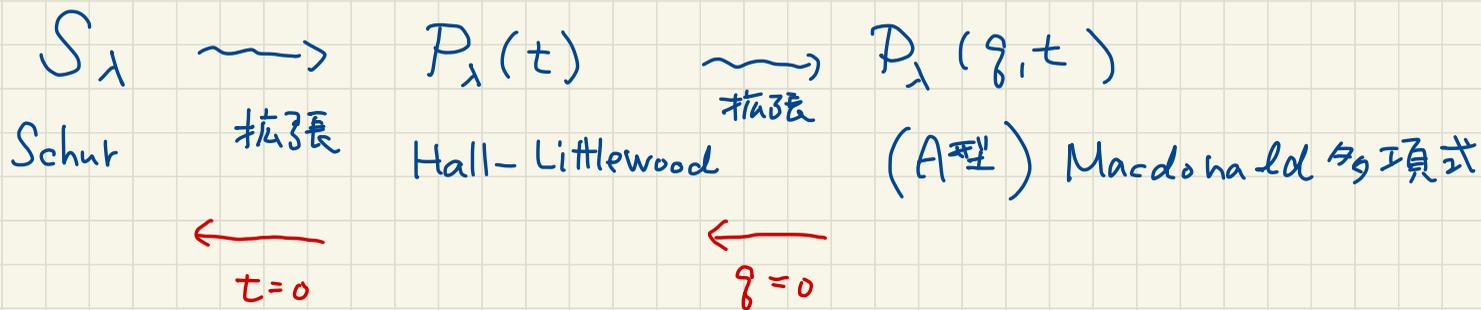
$$S_\lambda = \frac{\det(x_j^{\lambda_i + N - i})}{\det(x_j^{N-i})} \in A \quad \text{で} \quad \{S_\lambda\}_{\lambda \in \mathcal{P}_N} \text{ は } A \text{ の基底に}$$

なっている。

$$S_\lambda S_\mu = \sum_{\nu: \text{いい感じの}} m_{\lambda\mu}^\nu S_\nu \in A$$

ν : いい感じの
レベルをさす

実は $C_{\lambda\mu}^\nu = m_{\lambda\mu}^\nu$ である。



- Macdonald 多項式 $P_\lambda(x | q, t_i)$ は一般のアフィンルート系に付随して得られる直交多項式の族. (Macdonald, 1987)
- Macdonald 多項式, 特に A 型のものは現在では様々な分野 (表現論, 数理物理, 特殊函数論, ...) に現れる 大変重要な対象.

Askey - Wilson 多項式 (1985)

(1992 ~ 1995)

$$p_n\left(\frac{x+x^{-1}}{2}; a, b, c, d|q\right) := a^{-n}(ab, ac, ad; q)_n$$

$$\cdot {}_4\phi_3\left[\begin{matrix} q^{-n}, q^{n-1}abcd, ax, a/x \\ ab, ac, ad \end{matrix}; q, q\right].$$

↓ 1変数版

Koornwinder 多項式 (1992)

$$P_\lambda(x|q, t, a, b, c, d)$$

野海 - Sahi Stokman
(1995 ~ 2000)

Macdonald - Cherednik 理論
(affine Hecke 環をもちいた)
Macdonald 多項式の理論

↓

(C_n^\vee, C_n) 型の Macdonald

$$P_\lambda^{\text{Mac}}(x|q, t, t_0, t_n, u_0, u_n)$$

Notation. $x = (x_1, \dots, x_n)$: Koornwinder 多項式の変数.

7/12

$\mathcal{L}_Z^* = P = \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Z} \epsilon_i$: C_n 型のウエイト格子

$(\mathcal{L}_Z^*)_+ = \{ \lambda = (\lambda_i) \in \mathcal{L}_Z^* \mid \lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0 \}$: ドミナント・ウエイトの集合

$K := \mathbb{Q}(q^{1/2}, t^{1/2}, t_0^{1/2}, t_n^{1/2}, u_0^{1/2}, u_n^{1/2})$: 基礎体

$W_0 = \{\pm 1\}^n \rtimes S_n = \langle s_1, \dots, s_n \rangle$: C_n 型のWeyl群

Koornwinder 多項式を

$P_\lambda(x) := P_\lambda(x \mid q, t, t_0, t_n, u_0, u_n) \in K[x^{\pm 1}]^{W_0}$ ($\lambda \in (\mathcal{L}_Z^*)_+$)
により表します.

以下の問を考えます.

$P_\lambda(x) P_\mu(x) = \sum_{\nu \in (\mathcal{L}_Z^*)_+} C_{\lambda\mu}^\nu P_\nu(x)$ としたときの $C_{\lambda\mu}^\nu$ を明示的にかけ.

主結果 (Y. Theorem 3.4.2)

$\lambda, \mu \in (\mathfrak{g}_\mathbb{Z}^*)_+$ に対して

$$P_\lambda(x) P_\mu(x) = \frac{1}{t_{w_\lambda}^{-\frac{1}{2}} W_\lambda(t)} \sum_{v \in W^M} \sum_{p \in \Gamma_2^c(\overrightarrow{w(\lambda)^{-1}}, (v \cdot w(\mu))^{-1})} A_p B_p C_p P_{-w_0 w(\mu)}^{(x)}$$

① p は 色付きの アルコーク経路 (alcove walk) の集合
 $\Gamma_2^c(\overrightarrow{w(\lambda)^{-1}}, (v \cdot w(\mu))^{-1})$ 全体を走る.

② A_p, B_p, C_p は 因子化 している.

詳しくは 予稿をご覧下さい.

アノコ一フ" 経路について説明します.

基本アノコ一フ"

9/12

- $A := \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathfrak{g}_{\mathbb{R}}^* \mid \frac{1}{2} \geq x_1 \geq \dots \geq x_n \geq 0\} \subset \mathfrak{g}_{\mathbb{R}}^*$
- $W = t(P) \rtimes W_0 = \langle s_0, s_1, \dots, s_n \rangle$ $P \perp$ Weyl 群

$$W \curvearrowright \mathfrak{g}_{\mathbb{R}}^* \quad \text{by} \quad \begin{cases} s_0 \cdot x = (1 - x_1, x_2, \dots, x_n) \\ s_j \cdot x = (x_1, \dots, x_{j+1}, x_j, \dots, x_n) \quad (1 \leq j \leq n-1) \\ s_n \cdot x = (x_1, \dots, x_{n-1}, -x_n) \end{cases}$$

$w \in W$ に対して定まる閉集合 $w \cdot A \subset \mathfrak{g}_{\mathbb{R}}^*$ をアノコ一フ" といいます.

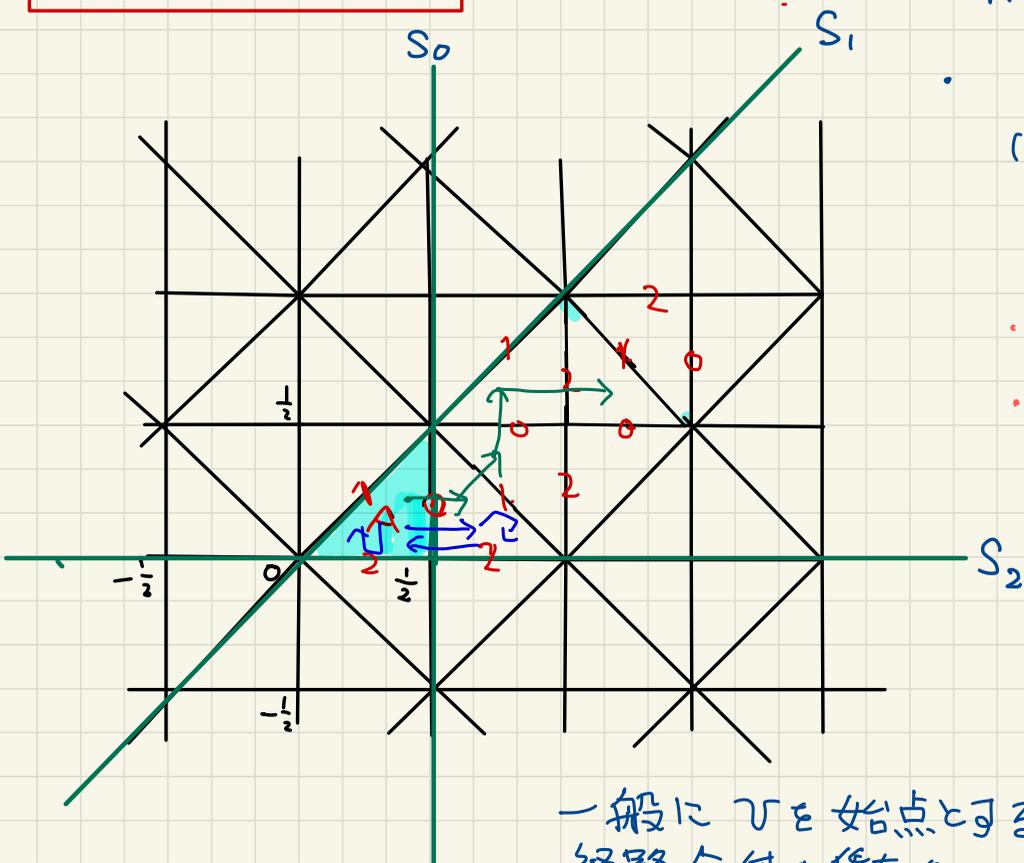
最短表示 $w = s_{i_1} \cdots s_{i_\ell} \in W$ と ℓ 個の列 $b = (b_1, \dots, b_\ell) \in \{0, 1\}^\ell$ をとります.

$v \in W$ に対して アノコ一フ" の列

$$p = (vA, v s_{i_1}^{b_1} A, \dots, v s_{i_1}^{b_1} \cdots s_{i_\ell}^{b_\ell} A) \text{ を } \underline{v \text{ と始点とす}}$$

$\vec{w} = (i_1, \dots, i_\ell)$ 型の アノコ一フ" 経路 といいます.

$n=2$ のときの例



$W = \langle S_0, S_1, S_2 \rangle$ $10/12$

- $e \in W$ を始点とする (単位元)

$\vec{w} = (0, 1, 0, 2)$ 型のピロ-7 経路

- $b = (1, 1, 1, 1)$
- $b = (1, 0, 1, 0)$

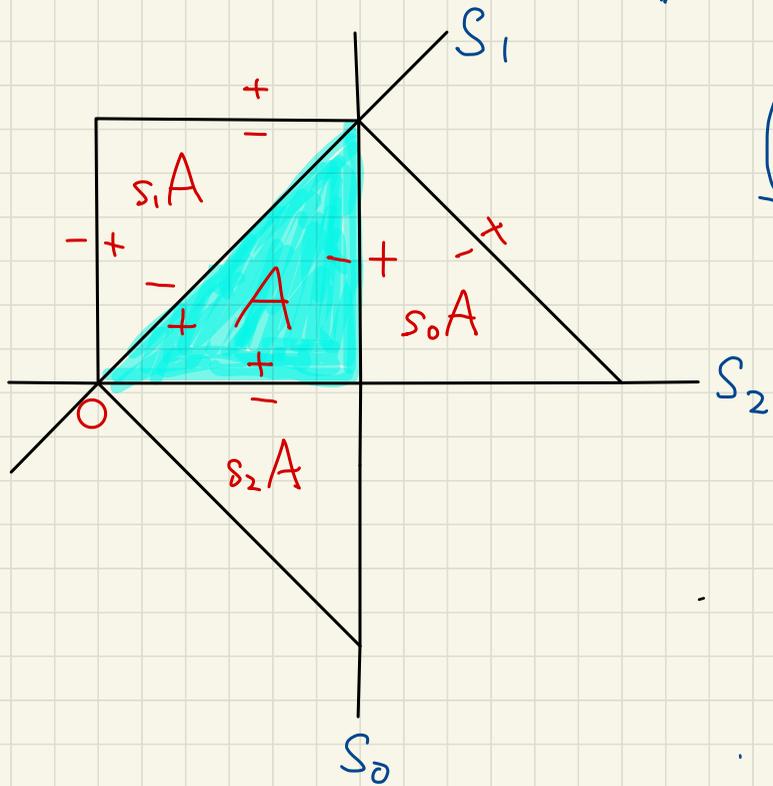
$\Gamma(\vec{w}, v) = 2^l$

一般に $v \in W$ を始点とする $\vec{w} = (i_1, \dots, i_n)$ 型のピロ-7 経路全体の集合を

$\Gamma(\vec{w}, v)$ とおきます。

これから「ALゴ-7」に情報も加えていきます。

- ① 境界線に +, - を配置する。
- ② 経路を4つの Type に分類して名前をつけます。



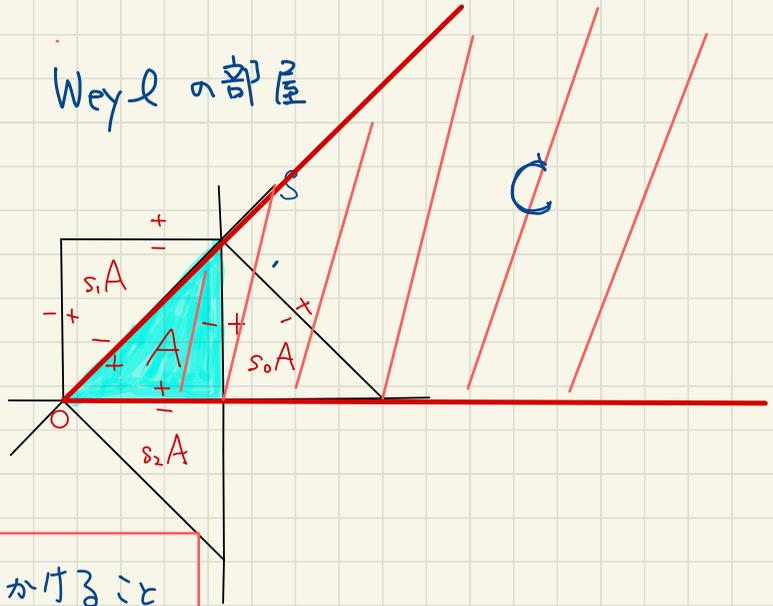
vA vs_1A - + 正の通過	$+$ $-$ 正の折り返し
vA vs_1A + - 負の通過	$-$ $+$ 負の折り返し

• 折り返しのステップに黒色と灰色の2色をつけます。

• $C := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1 \geq \dots \geq x_n \geq 0\}$: Weyl の部屋

$\Gamma_2^C(\vec{w}, \nu)$ で ν を始点とする \vec{w} 型の色付きの

アルゴリズム経路であって各アルゴリズムが C に含まれるものを表す。



以上の4つ経路と2色の色分けに応じて因子をかけることで Kostant-Windler 多項式の Littlewood-Richardson 係数を表した。

$$P_{\vec{\lambda}}(x) P_{\vec{\mu}}(x) = \frac{1}{t_{w_{\lambda}}^{-\frac{1}{2}} W_{\lambda}(t)} \sum_{\nu \in W^{\mu}} \sum_{p \in \Gamma_2^C(\vec{w}(\lambda)^{-1}, (\nu \cdot w_{\mu})^{-1})} A_p B_p C_p P_{-w_{\nu} w_{\rho}}(x)$$

//

参考文献

- ① D. Orr, M. Shimozono, *Specializations of nonsymmetric Macdonald-Koornwinder polynomials*, J. Algebraic Combin., **47** (2018), no. 1, 91–127.
- ② A. Ram, M. Yip, *A combinatorial formula for Macdonald polynomials*, Adv. Math., **226** (2011), 309–331.
- ③ S. Sahi, *Nonsymmetric Koornwinder polynomials and duality*, Ann. Math., **150** (1999), 267–282.
- ④ J.V. Stokman, *Koornwinder Polynomials and Affine Hecke Algebras*, Int. Math. Res. Not., **19** (2000), 1005–1042.
- ⑤ M. Yip, *A Littlewood–Richardson rule for Macdonald polynomials*, Math. Z., **272** (2012), 1259–1290.
- ⑥ K.Y., *A Littlewood–Richardson rule for Koornwinder polynomials*, arXiv:2009.13963.
- ⑦ 野海 正俊, *Macdonald-Koornwinder 多項式と affine Hecke 環*, 数理解析研究所講究録, **919** (1995), 44–55.