affine Hecke環とMacdonald多項式の組合せ論的表示

山口 航平

神戸大学大学院理学研究科数学専攻 修士2年

概要

Macdonald多項式とは, 1980年代後半にI.G.Macdonaldによって導入されたルート系に付随して定義される多変数q直交多項式の一族である. 1990年代前半にMacdonald多項式の理論をaffine Hecke環を基礎として展開する研究がCherednikによってなされた(Macdonald-Cherednik理論). その理論により非対称Macdonald多項式が導入され, 2008年にA.Ram-M.Yipによって任意のルート系(A∼G型)に対する非対称Macdonald多項式で通用する組合せ論的表示(Ram-Yip公式)がdouble affine Hecke環の代数構造を基礎にして構成された. 本ポスターではRam-Yipの結果をA_{n-1}型の場合に限って概説する.

affine Hecke環

実n次ベクトル空間$V=\mathbb{R}^n=\mathbb{R}\epsilon_1\oplus\cdots\oplus\mathbb{R}\epsilon_n$とかく. 但し, $\epsilon_i,\ i\in\{1,\dots,n\}$は標準基底であり$V$の内積$\langle\ ,\ \rangle$に関して正規直交するものを取っている(すなわち$\langle\epsilon_i,\epsilon_j\rangle=\delta_{i,j}$.). さて,$V$の部分集合$R=\{\epsilon_i-\epsilon_j \mid i,j\in\{1,\dots,n\}, i\neq j\}$を$A_{n-1}$型の**ルート系**という. $\alpha_i=\epsilon_i-\epsilon_{i+1}\ (i=1,\dots,n-1)$を**単純ルート**という. また,

$$Q=\mathbb{Z}\alpha_1\oplus\cdots\oplus\mathbb{Z}\alpha_{n-1}\subset P=\mathbb{Z}\omega_1\oplus\cdots\oplus\mathbb{Z}\omega_n=\bigoplus_{i=1}^{n}\mathbb{Z}\epsilon_i \tag{1}$$

をそれぞれ**ルート格子**, **ウェイト格子**という. 但し, $\omega_i=\epsilon_1+\cdots+\epsilon_i\ (i=1,\dots,n)$で**基本ウェイト**は呼ばれるものである. 今後の議論に重要なP上の(半)順序を定義しておく.

$$\lambda\geq\mu\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda_1+\dots\lambda_i\geq\mu_1+\cdots+\mu_i & (i=1,\dots,n-1)\\ \lambda_1+\cdots+\lambda_n=\mu_1+\cdots+\mu_n\end{cases} \tag{2}$$

順序$\geq$を**優順序**という. さらに$P_+=\{\lambda\in P\mid\langle\lambda,\alpha_i\rangle,\ \forall i\in\{1,\dots,n-1\}\}$に属す元を**優ウェイト**と呼ぶ. $Q_+=\mathbb{Z}_{\geq0}\alpha_1\oplus\cdots\oplus\mathbb{Z}_{\geq0}\alpha_{n-1}$として, $R_+=Q_+\cap R$に属する元を**正ルート**と呼び, $R_-=-R_+$に属する元を**負ルート**と呼ぶ. $R=R_+\sqcup R_-$に注意しておく. Vを少し拡張した空間$\tilde{V}=V\oplus\mathbb{R}\delta$を導入する. δは**零ルート**と呼ばれる元である. $\tilde{V}$の部分集合$S=S(R)=\{\alpha+k\delta\mid\alpha\in R,k\in\mathbb{Z}\}$と$\alpha_0=\delta-\epsilon_1+\epsilon_n$を定義する. n次対称群$W_R=\langle s_1,\dots,s_{n-1}\rangle=\mathfrak{S}_n$は$V$に添字の入れ替えに関して作用する. つまり

$$s_i(\epsilon_j)=\begin{cases}\epsilon_{i+1} & (j=i)\\ \epsilon_i & (j=i+1)\\ \epsilon_j & (j\neq i,i+1)\end{cases}\qquad (i=1,\dots,n-1;\ \ j=1,\dots,n) \tag{3}$$

さらに, W_Rを含む群$W_S=\langle s_0,s_1,\dots,s_{n-1};\pi\rangle$を定義しこれを$A_{n-1}$型の**拡大アフィンワイル群**という. 但し,

$$s_0(\epsilon_i)=\begin{cases}\epsilon_n+\delta & (i=1)\\ \epsilon_1-\delta & (i=n)\\ \epsilon_i & (i\neq1,n)\end{cases}\qquad \pi(\epsilon_i)=\begin{cases}\epsilon_{i+1} & (i=1,\dots,n-1)\\ \epsilon_1-\delta & (i=n)\end{cases} \tag{4}$$

さて, affine Hecke環を定義しよう. $\mathbb{C}$を複素数体とし, パラメータ$q,t\in\mathbb{C}$を考える. $T_0,T_1,\dots,T_{n-1},\pi^{\pm1}$を生成元とし, 基本関係式を

$$(T_i+t^{1/2})(T_i-t^{-1/2})=0 \qquad (i=0,1,\dots,n-1) \tag{5}$$
$$T_iT_j=T_jT_i \qquad (j\neq i,i\pm1) \tag{6}$$
$$T_iT_jT_i=T_jT_iT_j \qquad (j\equiv i\pm1;n\geq3) \tag{7}$$
$$\pi T_i=T_{i+1}\pi \qquad (i\in\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \tag{8}$$

とする代数を(拡大)**affine Hecke環**と呼び, $H(W_S)$とかく. さて, $t(\epsilon_i)=s_{i-1}\cdots s_1\pi s_{n-1}\cdots s_i$ $(i=1,\dots,n)$を定義してこれを線型に拡張することで一般の$t(\mu),\ \mu\in P$を定義する. $t(P)=\{t(\mu)\mid\mu\in P\}$とかき, これは$P$の平行移動のなす集合である. 実は$W_S=t(P)\rtimes W_R$という構造になっている. $t(\epsilon_i)$たちを$H(W_S)$で実現したのが

$$Y_i=T_{i-1}^{-1}\cdots T_1^{-1}\pi T_{n-1}\cdots T_i \quad (i=1,\dots,n) \tag{9}$$

であり,$H(W_S)$の基本関係式からY_iたちは互いに可換であることが従う. これを**$q-$Dunkl作用素**という.

非対称Macdonald多項式

n変数$x=(x_1,\dots,x_n)$に対してq差分作用素$\tau=(\tau_1,\dots,\tau_n)$を$\tau_i(x_j)=x_jq^{\delta_{i,j}}$で定義する. 一般の$\lambda\in P$に対して$x^\lambda=x_1^{\lambda_1}\cdots x_n^{\lambda_n},\quad \tau^\lambda=\tau_1^{\lambda_1}\cdots\tau_n^{\lambda_n}$という記法を用いる. 但し, $\lambda_i=\langle\lambda,\epsilon_i\rangle,\ i\in\{1,\dots,n\}$である. $\mathcal{D}_{q,x}=\mathbb{C}(x)[\tau^{\pm1}]=\{\sum_{\mu\in\mathbb{Z}^n}f_\mu(x)\tau^\mu\mid f_\mu(x)\in\mathbb{C}(x)\}$を**$q$差分作用素環**という($\mathbb{C}(x)$は$\mathbb{C}$上の有理函数体を表す). W_Rは$\mathcal{D}_{q,x}$にも作用する.(上の作用を拡張する.) その作用に関する接合積によって**W_Rつきq差分作用素環**$\mathcal{D}_{q,x}[W_R]=\bigoplus_{w\in W_R}\mathcal{D}_{q,x}w$を導入する. 次に, **Lusztig作用素**と呼ばれるものを以下で定義する.

$$\rho(T_i)=t^{1/2}+t^{-1/2}\frac{1-tx_i/x_{i+1}}{1-x_i/x_{i+1}}(s_i-1)\quad(i=1,\dots,n-1) \tag{10}$$

$$\rho(T_0)=t^{1/2}+t^{-1/2}\frac{1-qtx_n/x_1}{1-qx_n/x_1}(s_0-1),\quad \rho(\pi)=\tau_1^{-1}s_1\cdots s_{n-1} \tag{11}$$

$$s_i(x_j)=\begin{cases}x_{i+1} & (j=i)\\ x_i & (j=i+1)\\ x_j & (j\neq i,i+1)\end{cases}\qquad s_0(x_j)=\begin{cases}q^{-1}x_1 & (j=n)\\ qx_n & (j=1)\\ x_j & (j\neq1,n)\end{cases} \tag{12}$$

と作用を定めると, $\rho(T_0),\rho(T_1),\dots,\rho(T_{n-1}),\rho(\pi)$は$H(W_S)$の基本関係式を満たす.すなわち$\mathbb{C}$代数としての準同型$\rho:H(W_S)\hookrightarrow\mathcal{D}_{q,x}[W_R]$を構成したことになる. 大切な事実をまとめておく.

- $\{\rho(Y_i)\mid i=1,\dots,n\}$は可換な作用素の族である.
- $\rho(T_i),\rho(Y_i)$たちの$\mathbb{C}(x)$への作用はローラン多項式環$\mathbb{C}[x^{\pm1}]$を保つ.

以後, $\rho(T_i),\rho(Y_i)$たちをT_i,Y_iとかき, $\rho(\pi)$も単にπとかく.

定理(非対称Macdonald多項式)

$\mathbb{C}[x^{\pm1}]$の$\mathbb{C}$基底$\{E_\lambda(x;q,t)\}_{\lambda\in P}$であって以下の2条件を満たすものがただ一つ存在する.

(1). $E_\lambda(x)=x^\lambda+\sum_{\mu\prec\lambda}c_{\lambda\mu}x^\mu,\ c_{\lambda\mu}\in\mathbb{C}$

(2). $f(Y)E_\lambda(x)=E_\lambda(x)f(q^{-\lambda}t^{-\rho(\lambda)}),\quad f(Y)\in\mathbb{C}[Y^{\pm1}],\quad \rho(\lambda)=\frac{1}{2}\sum_{\alpha\in R_+}\sigma(\langle\lambda,\alpha\rangle)\alpha$

定理の$E_\lambda(x)$を**非対称Macdonald多項式**と呼ぶ. 定理中の順序$\preceq$は,

$$\mu\preceq\lambda\Leftrightarrow\ (\mu)_+\leq(\lambda)_+\ or\ (\mu)_+=(\lambda)_+,\ \mu\geq\lambda \tag{13}$$

であり, $\sigma(k)=\begin{cases}1\ (k>0)\\ -1\ (k\leq0)\end{cases}$, $(\lambda)_+$はλのW_R軌道上の優ウェイトであって, それはただ一つに決まる.すなわち, $W_R\,\lambda\cap P_+=\{(\lambda)_+\}$.

Ram-Yip公式

この章では, Ram-Yip公式と呼ばれる非対称Macdonald多項式の組合せ論的な公式を概説することを目標にする. そのために**double affine Hecke 環**$DH(W_R):=\mathbb{C}[x^{\pm1}]\otimes_{\mathbb{C}}H(W_R)\otimes_{\mathbb{C}}\mathbb{C}[Y^{\pm1}]$を導入する.

定理(Cherednik)

$\mathbb{C}$代数としての反対合(anti involution) $\phi:DH(W_R)\longrightarrow DH(W_R)$であって以下を満たすものがただ一つ存在する.

$$\phi\ :\ \begin{cases}x_i\mapsto Y_i^{-1} & (i=1,\dots,n)\\ Y_i\mapsto x_i^{-1} & (i=1,\dots,n)\\ T_i\mapsto T_i & (i=1,\dots,n-1)\end{cases} \tag{14}$$

Intertwining作用素と呼ばれる作用素$S_i^x:=T_i-\frac{t^{1/2}-t^{-1/2}}{1-x^{\alpha_i}}=T_i^{-1}+\frac{t^{1/2}-t^{-1/2}}{1-x^{-\alpha_i}}\ (i=0,1,\dots,n-1)$を定義する. 以後$\varphi^{\pm}(x^\alpha)=\mp\frac{t^{1/2}-t^{-1/2}}{1-x^{\pm\alpha_i}},\quad w=s_{i_1}\cdots s_{i_p}\pi^k\in W_S$に対して, $S_w^x:=S_{i_1}^x\cdots S_{i_p}^x\pi^k$という記法を用いる.このとき$DH(W_R)$の関係式から$S_i^xx^\lambda=x^{s_i(\lambda)}S_i^x\ \ (\lambda\in P)$を満たす. これに形式的に$\phi$を施すと,$S_i^Y:=\phi(S_i^x)=T_i+\varphi^+(Y^{-\alpha_i}),\quad S_i^YY^\lambda=Y^{s_i(\lambda)}S_i^Y$. このとき$S_i^Y$は非対称Macdonald多項式$E_\lambda(x)$の**固有値を動かす働き**をする.すなわち,

$$Y^\mu S_i^YE_\lambda(x)=S_i^YY^{s_i(\mu)}E_\lambda(x) \tag{15}$$
$$=S_i^YE_\lambda(x)q^{-\langle\mu,s_i(\lambda)\rangle}t^{-\langle\mu,\rho(s_i(\lambda))\rangle} \tag{16}$$

により, $S_i^YE_\lambda(x)=\mathrm{Const}.E_{s_i(\lambda)}(x)$である. 特に$(0^n)=(0,\dots,0)$に対応する非対称Macdonald多項式は1であり, $\lambda=w((0^n))\ (w\in W_S)$と書いたとき, $E_\lambda(x)$は$\phi(S_{w^{-1}}^x).1=S_w^Y.1=\mathrm{Const}.E_\lambda(x)$となる. $w=s_{i_1}\cdots s_{i_p}\pi^k=t(\mu)v\ \ (v\in W_R,\ k\in\mathbb{Z})$と$i_1,\dots,i_p$の部分列$I=k_1,\dots,k_m$に対して, $w_I=s_{k_1}\cdots s_{k_m}\pi^k=t(\mu_I)v_I$とする.

$$S_{w^{-1}}^x=\sum_{I\subseteq\{1,\dots,p\}}\prod_{k\notin I}\varphi^{\varepsilon(I_{<k},k)}(x^{\beta_k})\overleftarrow{\prod_{k_j\in I}}T_{k_j}^{\varepsilon(s_{k_1}\cdots s_{k_{j-1}}(\alpha_{k_j}))} \tag{17}$$

$$=\sum_{I\subseteq\{1,\dots,p\}}\prod_{k\notin I}\varphi^{\varepsilon(I_{<k},k)}(x^{\beta_k})T_{v_I^{-1}}Y^{-\mu_I} \tag{18}$$

但し, $\beta_k=u^{-1}s_{i_1}\cdots s_{i_{k-1}}(\alpha_k)$であり, $I=\{k_1,\dots,k_m\}\ (k_1<\cdots<k_m)$. また, $I_{<k}=\{k_{i_1},\dots,k_{i_n}\}\ (k_{i_1}<\cdots<k_{i_n})$は$I$の中で$k$より真に小さいものの集合を表す. このとき$\varepsilon(I_{<k},k)=(s_{k_{i_1}}\cdots s_{k_{i_n}}(\alpha_{i_k})$のclassical partの符号)と定義する. 式(18)の導出には, 次の補題を用いている.

補題

$w=s_{i_1}\cdots s_{i_p}u=t(\mu)v\in W_S\ \ (v\in W_R,\ \mu\in P)$に対して,

$$T_{v^{-1}}Y^{-\mu}=T_{u^{-1}}T_{i_p}^{\epsilon_p}\cdots T_{i_1}^{\epsilon_1},\ \epsilon_k=(s_{i_1}\cdots s_{i_{k-1}}(\alpha_k)\text{のclassical partの符号}) \tag{19}$$

これにϕを施すと,

$$S_w^Y=\phi(S_{w^{-1}}^x)=\sum_{I\subseteq\{1,\dots,p\}}\prod_{k\notin I}x^{\mu_I}T_{v_I}\varphi^{\varepsilon(I_{<k},k)}(Y^{-\beta_k}) \tag{20}$$

でこれを$E_{(0^n)}(x)=1\ \ ((0^n)=(0,\dots,0))$にあてると, **非対称Macdonald多項式の明示公式**

$$\mathrm{Const}.E_\lambda(x)=S_w^Y.1=\sum_{I\subseteq\{1,\dots,p\}}\prod_{k\notin I}x^{\mu_I}\varphi^{\varepsilon(I_{<k},k)}(q^{\langle\beta_k,\mu\rangle}t^{\langle\beta_k,\rho(\mu)\rangle})t^{|I|/2} \tag{21}$$

が導出できる. この式をalcove pathに読み替えたものが, Ram-Yip公式である.

謝辞

本ポスターは指導教官である野海正俊 先生とのセミナーに基づくものです. 先生からは有益な助言を多く頂き, 励ましながら丁寧にご指導頂きました. 深く感謝いたします. また貴重な時間を割いて話を聴いてくださった渋川元樹 氏, 小寺諒介 氏に深く感謝いたします.

References

[M] I.G. Macdonald: *Affine Hecke algebras and orthogonal polynomials,* Cambridge University Press, 2003

[MN] K.Mimachi and M.Noumi: A reproducing kernel for nonsymmetric Macdonald polynomials, Duke Math. J. **91** (1998), 621-634

[RY] A.Ram and M.Yip: A combinatorial formula for Macdonald polynomials, Adv. Math. **226** (2011), no. 1, 309-331