修 士 学 位 論 文

非対称 Macdonald 多項式の組合せ論的表示

2020 年 2 月 6 日

専 攻 名　数学専攻

学籍番号　182S023S

氏　　名　山口 航平

神戸大学大学院理学研究科博士課程前期課程

非対称 Macdonald 多項式の組合せ論的表示

山口航平 *

2020 年 9 月 23 日

目次

* 神戸大学大学院理学研究科数学専攻 (M2)

1　序論

Macdonald 多項式とは 1987,8 年頃に I.G.Macdonald によって導入されたルート系に付随して定義される多変数 (q,t)-直交多項式のクラスである．1990 年代前半に Cherednik は, Knizhnik-Zamolodchikov 方程式の量子化の観点から, アフィン Hecke 環を基礎として Macdonald 多項式の理論を再構築し, ルート系に付随する Macdonald 多項式の様々な性質を系統的に理解する方法を与えた．Macdonald 多項式は, q 差分作用素の可換族の同時固有函数として定義される対称 (Weyl 群不変な) Laurent 多項式である．アフィン Hecke 環は, いわゆる Dunkl 作用素の生成する可換部分環を含んでおり, Macdonald の q 差分作用素の可換族は, 対称な Dunkl 作用素の, 対称 Laurent 多項式環への作用として実現される．一方, Dunkl 作用素の可換族の Laurent 多項式環への作用から, その同時固有函数系として非対称 Macdonald 多項式が定義され, 本来の Macdonald 多項式は, 非対称 Macdonald 多項式の対称化として得られる．

Ram-Yip [?] は, 非捩れ型のアフィンルート系に付随する非対称 Macdonald 多項式に関して, alcove walk を用いた組合せ論的な明示公式を構成した．本論文では, この Ram-Yip の公式が二重アフィン Hecke 環の構造論と Cherednik 対合から自然に得られることを示す．特に, その具体例として A_{n-1} 型の場合を詳述する．また, 上記の考え方に基づき, Ram-Yip の公式を非対称 Koornwinder 多項式 ($(C^\vee, C)$ 型の非対称 Macdonald 多項式) の場合に拡張する．

なお本論文の結果は, 指導教員である野海正俊氏 (神戸大学大学院理学研究科) との共同研究に基づくものであり, 現在, 英文の共著論文を準備中である．

R を被約かつ既約なルート系, S を R から定まる標準的なアフィンルート系とする．以下, $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(q^{\frac{1}{e}}, t_\alpha^{\frac{1}{2}} | \alpha \in S)$ を基礎体として用いる．ここで e は余ウェイト格子とウェイト格子の間の双線型形式 $\langle\ ,\ \rangle$ について $\langle P^\vee, P\rangle \subseteq \frac{1}{e}\mathbb{Z}$ を満たすものとし, パラメータ t_α $(\alpha \in S)$ は条件「$\alpha, \beta \in S,\ \beta \in W_S.\alpha \implies t_\alpha = t_\beta$」を満たすものとする．拡大アフィン Weyl 群 $\widetilde{W}_S = \langle s_0, s_1, \ldots, s_n; \Omega\rangle$ の Hecke 化である拡大アフィン Hecke 環 $H(\widetilde{W}_S) = \mathbb{K}\langle T_0, \ldots, T_n; \Omega\rangle$ は Dunkl 作用素 Y^μ $(\mu \in P^\vee)$ と呼ばれる要素から生成される可換部分環 $\mathbb{K}[Y^{P^\vee}] = \bigoplus_{\mu\in P^\vee} \mathbb{K}Y^\mu$ を含んでいる．ここで, $H(\widetilde{W}_S)$ の多項式表現 $\rho : H(\widetilde{W}_S) \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}[x^P])$ を次のように定める．

$$\rho(T_i) = t_i^{-\frac{1}{2}} \frac{1 - t_i x^{\alpha_i}}{1 - x^{\alpha_i}} s_i + \frac{t_i^{\frac{1}{2}} - t_i^{-\frac{1}{2}}}{1 - x^{\alpha_i}} \quad (i = 0, 1, \ldots, n), \quad \rho(u) = u \quad (u \in \Omega) \tag{1.1}$$

この表現 ρ を通じて, Y^μ $(\mu \in P^\vee)$ の Laurent 多項式環 $\mathbb{K}[x^P]$ への作用が決まる．非対称 Macdonald 多項式 $E_\lambda(x) \in \mathbb{K}[x^P]$ $(\lambda \in P)$ は, この Dunkl 作用素の可換族 Y^μ $(\mu \in P^\vee)$ の同時固有函数として定義される．

定理 1.1 任意の $\lambda \in P$ に対して, Laurent 多項式 $E_\lambda(x) \in \mathbb{K}[x^P]$ であって次の条件を満たすものが唯一つ存在する.

(1) $E_\lambda(x) = x^\lambda + (\succcurlyeq$ に関して低い項.)

(2) $Y^\mu E_\lambda(x) = \eta^\mu_\lambda E_\lambda(x), \quad (\mu \in P^\vee_+,\ \eta^\mu_\lambda = q^{\langle \mu,\lambda\rangle} \prod_{\alpha\in R_+} t^{\epsilon(\langle\alpha^\vee,\lambda\rangle)\langle\mu,\alpha\rangle})$

非対称 Macdonald 多項式は, Ram-Yip[?] による組合せ論的な明示公式を持つことが知られている. [?] の Ram-Yip の公式を本論文の議論に合わせると以下のように述べることができる.

定理 1.2 (Ram-Yip の公式 (2011)) $0 = (0,0,\dots,0) \in P^\vee$ とする. $\lambda \in P$ に対して, $\lambda^\vee = w(0)$ なる $w \in \widetilde{W}_S$ をとる. $w = s_{i_1}\cdots s_{i_p}u = \tau(\lambda)v$ $(u \in \Omega,\ v \in W_R)$ としたとき次が成り立つ.

$$\mathrm{Const}.E_\lambda(x) = \sum_{I\subseteq\{1,\dots,p\}} x^{\lambda_I} t_{v_I}^{-\frac{1}{2}} \prod_{k\notin I} \varphi_{i_k}^{\epsilon'(s_{I_k}(\alpha_k))}(q^{m_k}t^{\langle-\gamma_k,\rho\rangle}) \tag{1.2}$$

但し, $v \in W_R$ に対して $t_v = \prod_{\alpha\in S_v} t_\alpha$ という記号を用いた.

ここで,

$$\varphi_i^\pm(z) = \mp\frac{t_i^{\frac{1}{2}} - t_i^{-\frac{1}{2}}}{1 - z^{\pm1}} \tag{1.3}$$

と記した. その他の記号については 2 章で詳述する. (1.2) は w の最短表示の添字集合 $\{1,\dots,p\}$ の部分集合全体にわたる和である. この Ram-Yip の公式が二重アフィン Hecke 環の構造論と Cherednik 対合から自然に得られることを示すことが本論文の主目的である.

本論文の構成は以下の通りである.

2 章では, 非捩れ型のアフィンルート系の設定で Ram-Yip の公式が二重アフィン Hecke 環の上の Cherednik 対合と呼ばれる反対合と Lusztig 関係式から自然に導出できることを示す. これは Ram-Yip[?] の別証明になっている.

3 章では 2 章の具体例として A_{n-1} 型の場合の Ram-Yip の公式を具体的に計算した. 一般の非捩れ型のアフィンルート系の設定では顕にならなかった A 型特有の性質が反映されるような記述を行なった.

4 章では 2 章で明らかにした導出の仕組みを援用して, 被約でないアフィンルート系である BC_n 型の非対称 Macdonald 多項式 (非対称 Koornwinder 多項式) の場合にも Ram-Yip の公式を拡張できることを示した. また, ルート系の設定やアフィン Hecke 環の基本表現は [?] に基づく.

5 章では, 非対称 Koornwinder 多項式の一変数の場合に相当する非対称 Askey-Wilson 多項式の組合せ論的表示について論じた.

2　Ram-Yip の公式

2.1　ルート系の設定

R を既約で被約な有限ルート系とし, 単純ルート $\{\alpha_i \mid i \in I\}$ が指定されているとする. I は有限添字集合である. ルート格子とその正錐を

$$Q = \bigoplus_{i \in I} \mathbb{Z}\alpha_i \supset Q_+ = \bigoplus_{i \in I} \mathbb{Z}_{\geq 0}\alpha_i \tag{2.1}$$

で表す. $R_+ := Q_+ \cap R$, $R_- := -R_+$ とすると, $R = R_+ \sqcup R_-$ である. $R^\vee$ を R の双対ルート系とし, 単純余ルートを $\{\alpha_i^\vee \mid i \in I\}$ で表し, 余ルート格子とその正錐を $Q^\vee$, $Q_+^\vee$ で表す. また基本ウェイトを $\{\omega_i \mid i \in I\}$ で表し, ウェイト格子とその正錐を

$$P = \bigoplus_{i \in I} \mathbb{Z}\omega_i \supset P_+ = \bigoplus_{i \in I} \mathbb{Z}_{\geq 0}\omega_i \tag{2.2}$$

で表す. 基本余ウェイトを $\{\omega_i^\vee \mid i \in I\}$ で表す. 余ウェイト格子とその正錐を $P^\vee$, $P_+^\vee$ で表す. $\mathbb{K}$ を標数 0 の体とし, $U = P^\vee \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{K}$, $V = P \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{K}$ とおく. U と V の間の非退化な双線型形式を $\langle\ ,\ \rangle : U \times V \to \mathbb{K}$ で表す. この双線型形式について

$$\langle\ ,\ \rangle : P^\vee \times Q \longrightarrow \mathbb{Z}\ ; \quad \langle \omega_i^\vee, \alpha_j \rangle = \delta_{i,j}. \quad (i, j \in I) \tag{2.3}$$

$$\langle\ ,\ \rangle : Q^\vee \times P \longrightarrow \mathbb{Z}\ ; \quad \langle \alpha_i^\vee, \omega_j \rangle = \delta_{i,j}. \quad (i, j \in I) \tag{2.4}$$

が成り立つ. さらに V 上に標準形式 (対称内積)$(\ |\ )\ :\ V \times V \to \mathbb{K}$ が与えられていて, ルート $\alpha \in R$ と対応する余ルート $\alpha^\vee \in R^\vee$ についての関係式

$$\langle \alpha^\vee, \lambda \rangle = \frac{2(\alpha|\lambda)}{(\alpha|\alpha)}. \quad (\lambda \in V) \tag{2.5}$$

が成り立つ. さて, V を拡大して

$$\widetilde{V} = V \oplus \mathbb{K}\delta \tag{2.6}$$

と定義する. V の内積を拡張して $\widetilde{V}$ の $\mathbb{K}$ 上の対称内積 $(\ |\ )\ :\ \widetilde{V} \times \widetilde{V} \to \mathbb{K}$ を

$$(\lambda|\delta) = (\delta|\lambda) = 0 \quad (\lambda \in V), \quad (\delta|\delta) = 0 \tag{2.7}$$

で定める. 今 $\varphi \in R_+ \cap P_+$ を R の最高ルートとし, $\varphi = \sum_{i \in I} k_i\alpha_i \quad (k_i > 0)$ と表す. このとき

$$\delta = \alpha_0 + \varphi, \quad \alpha_0 = \delta - \varphi \tag{2.8}$$

とする. この関係式によりアフィンルート α_0 を定義する. $S = \{\alpha + k\delta \mid \alpha \in R,\ k \in \mathbb{Z}\}$ を (非振れ型) アフィンルート系という.

2.2 アフィン Weyl 群

アフィンルート $\alpha \in S$ に対して, 鏡映変換 $s_\alpha : \widetilde{V} \to \widetilde{V}$ を, $s_\alpha(\lambda) = \lambda - \langle \alpha^\vee, \lambda \rangle \alpha \quad (\lambda \in \widetilde{V})$ で定義する．特に単純ルート $\alpha_i \quad (i \in I)$ に対しては $s_i := s_{\alpha_i}$ とかく．$s_i \quad (i \in I)$ が生成する有限群

$$W_R = \langle s_i \mid i \in I \rangle \tag{2.9}$$

を有限 Weyl 群という．さらにアフィンルート α_0 に対応する鏡映変換 $s_0 := s_{\alpha_0}$ を加えた無限群

$$W_S = \langle s_0, s_i \mid i \in I \rangle \tag{2.10}$$

をアフィン Weyl 群という．ここで $\mu \in P^\vee$ に対して $\tau(\mu) : \widetilde{V} \to \widetilde{V}$ を

$$\tau(\mu)(\lambda) = \lambda + \langle \mu, \lambda \rangle \delta \tag{2.11}$$

で定義する．アフィン Weyl 群は

$$W_S = \tau(Q^\vee) \rtimes W_R. \quad \tau(Q^\vee) = \{\tau(\alpha^\vee) \mid \alpha \in Q^\vee\} \tag{2.12}$$

という構造をもつ．W_S を次のようにして拡大した無限群

$$\widetilde{W}_S = \tau(P^\vee) \rtimes W_R = W_S \rtimes \Omega = \langle s_0, s_i; u \mid i \in I,\ u \in \Omega \rangle. \quad \tau(P^\vee) = \{\tau(\mu) \mid \mu \in P^\vee\} \tag{2.13}$$

を拡大アフィン Weyl 群という．ここで Ω はディンキン図形の自己同型群の部分群であり

$$\tau : P^\vee / Q^\vee \xrightarrow{\sim} \Omega. \tag{2.14}$$

とみなせる．拡大アフィン Weyl 群の基本関係式は

$$s_i^2 = 1 \qquad (i \in I \cup \{0\}) \tag{2.15}$$

$$\overbrace{s_i s_j \cdots}^{m_{ij}} = \overbrace{s_j s_i \cdots}^{m_{ij}} \tag{2.16}$$

$$u_\sigma u_\tau = u_{\sigma\tau} \qquad (u_\sigma, u_\tau \in \Omega) \tag{2.17}$$

$$u_\sigma s_i = s_{\sigma(i)} u_\sigma \qquad (i \in I \cup \{0\},\ u_\sigma \in \Omega) \tag{2.18}$$

である．ただし m_{ij} は相異なる $i, j \in I \cup \{0\}$ の組 (i, j) 毎に

$$\langle \alpha_i^\vee, \alpha_j \rangle \langle \alpha_j^\vee, \alpha_i \rangle = 0, 1, 2, 3, \geq 4 \tag{2.19}$$

に応じて

$$m_{ij} = 2, 3, 4, 6, \infty \tag{2.20}$$

と定めたものであり, ∞ のときは関係式を課さないものとする．

2.3 アフィン Weyl 群と Bruhat 順序

$w \in \widetilde{W}_S$ に対して

$$S_w := \{\alpha \in S_+ \mid w^{-1}(\alpha) < 0\} \tag{2.21}$$

と定義する．S_w は有限集合であり $\ell(w) := |S_w|$ を w の長さという．また $w = s_{i_1} \cdots s_{i_p}$ かつ $\ell(w) = p$ であるとき $s_{i_1} \cdots s_{i_p}$ を w の最短表示という．また任意の $u \in \Omega$ に対して $\ell(u) = 0$ となることに注意しておく．

命題 2.1 (exchange relation) $w = s_{i_1} \cdots s_{i_p}$ を最短表示とする．このとき $\ell(s_i w) < \ell(w)$ ならばある $k \in \{1, \ldots, p\}$ が存在して $s_i w = s_{i_1} \cdots \hat{s_{i_k}} \cdots s_{i_p}$ となる．

[証明]. $\ell(s_i w) < \ell(w)$ ならば $w^{-1}(\alpha_i) < 0$ であり，$\alpha_i \in S_w$ である．したがって $\alpha_i = \beta_k = s_{i_1} \cdots s_{i_{k-1}}(\alpha_k)$ なる $k \in \{1, \ldots, p\}$ が存在する．よって，$s_i = s_{\beta_k} = (s_{i_1} \cdots s_{i_{k-1}}) s_{i_k} (s_{i_{k-1}} \cdots s_{i_1})$ と書き直せる．ゆえに $s_i w = s_{i_1} \cdots \hat{s_{i_k}} \cdots s_{i_p}$ となる． □

任意の $w, w' \in \widetilde{W}_S$ に対して順序 $\succcurlyeq_{Bru.}$ を

$$w \succcurlyeq_{Bru.} w' \iff \exists\, w = w_0 \leftarrow w_1 \leftarrow \cdots \leftarrow w_p = w' \tag{2.22}$$

$$w_i = s_{\beta_i} w_{i-1}, \quad \beta_i \in S_+ \tag{2.23}$$

$$\ell(w_{i-1}) > \ell(w_i) \tag{2.24}$$

で定義しこれを Bruhat 順序と呼ぶ.

命題 2.2 $w, w' \in W_S$ に対して次の 3 条件は同値. ($w = s_{i_1} \cdots s_{i_p}$ を最短表示としておく.)

(a) $w \succcurlyeq_{Bru.} w'$

(b) $(i_1, \ldots, i_p)$ の部分列 $(j_1, \ldots, j_q)$ が存在して $w' = s_{j_1} \cdots s_{j_q}$ とかける.

(c) $(i_1, \ldots, i_p)$ の部分列 $(j_1, \ldots, j_q)$ が存在して $w' = s_{j_1} \cdots s_{j_q}$ を最短とできる.

[$(a) \Leftrightarrow (b)$ **の証明**] $w \succcurlyeq_{Bru.} w'$ とする．すなわち，W_S の列 $w = w_0 \leftarrow w_1 \leftarrow \cdots \leftarrow w_p = w'$ が存在して $w_i = s_{\beta_i} w_{i-1}$，$\beta_i \in S_+$ かつ $\ell(w_{i-1}) > \ell(w_i)$ 即ち，$w_{i-1}^{-1}(\beta_i) < 0$ である．ここで exchange relation よりある $k \in \{1, \ldots, p\}$ が存在して $w_1 = s_{\beta_1} w_0 = s_{\beta_1} w = s_{i_1} \cdots \hat{s_{i_k}} \cdots s_{i_p}$ である．これを順次繰り返して w' は w から p 文字抜かれた表示 $w' = s_{j_1} \cdots s_{j_q}$ を得る．逆に最短表示 $w = s_{i_1} \cdots s_{i_p}$ に対して w' がその部分ワードで $w' = s_{j_1} \cdots s_{j_q}$ と書けたとする．つまり $w = s_{i_1} \cdots s_{j_1} \cdots s_{j_q} \cdots s_{i_p}$ である．あとは w のワードを右から見て w' のワードにないものを s_β の形にして左に送ることで $w \succcurlyeq_{Bru.} w'$ が言える． □

$\lambda, \mu \in P$ に対して順序 $\geq$ を

$$\lambda \geq \mu \iff \lambda - \mu \in Q_+ \tag{2.25}$$

で定義する．この順序を支配的順序と呼ぶ．次の命題は Bruhat 順序と支配的順序の関係についてのものであり, 目標の Ram-Yip 公式を構成する上でとても重要である．

命題 2.3 $u \in \Omega,\ w, w' \in \widetilde{W}_S,\ \mu, \mu' \in P^\vee,\ v, v' \in W_R$ で $wu = \tau(\mu)v,\ w'u = \tau(\mu')v'$ となっている状況を考える．このとき

$$w \succcurlyeq_{Bru.} w' \Rightarrow \mu_+ > \mu'_+ \text{ or } \begin{cases} \mu_+ = \mu'_+ \\ \mu \geq \mu' \end{cases} \tag{2.26}$$

が成り立つ．但し, $\mu \in P^\vee$ に対して $W_R.\mu \cap P^\vee_+ = \{\mu_+\}$ という記号を用いた．

[証明] $w \succcurlyeq_{Bru.} w'$ だからある $\beta \in S_+$ が存在して $w' = s_\beta w$ かつ $w^{-1}(\beta) < 0$ を満たす．このとき $w'u = s_\beta wu = s_\beta \tau(\mu)v = \tau(s_\beta\mu)s_\beta v$ である．

(1) $\beta \in R_+$ を仮定する．このとき $\mu' = s_\beta\mu,\ v' = s_\beta v$ である．

$$u^{-1}w^{-1}(\beta) = v^{-1}(\tau(-\mu)(\beta)) \tag{2.27}$$
$$= v^{-1}(\beta - \langle\mu, \beta\rangle\delta) = v^{-1}(\beta) - \langle\mu, \beta\rangle\delta < 0 \tag{2.28}$$

ここで $u^{-1}w^{-1}(\beta) < 0$ となる条件を書き下すと上の計算から $\langle\mu, \beta\rangle = 0$ かつ $v^{-1}(\beta) < 0$ または $\langle\mu, \beta\rangle > 0$ であることがわかる．

- $\langle\mu, \beta\rangle = 0$ のとき: $\mu' = s_\beta(\mu) = \mu - \langle\mu, \beta\rangle\beta^\vee = \mu$ であり,$v^{-1}(\beta) < 0$ から $v' = s_\beta v \prec v$ である．
- $\langle\mu, \beta\rangle > 0$ のとき: $\mu' = s_\beta(\mu) = \mu - \langle\mu, \beta\rangle\beta^\vee < \mu$

(2) $\beta \in S_+$ かつ $\beta \notin R_+$ を仮定する．すなわち $\beta = \gamma + m\delta, m \in \mathbb{Z}_{>0}$ とかける．$u^{-1}w^{-1}(\beta) < 0$ の条件を書き下すために次の計算をする．

$$u^{-1}w^{-1}(\beta) = v^{-1}\tau(-\mu)(\gamma + m\delta) \tag{2.29}$$
$$= v^{-1}(\gamma + m\delta - \langle\mu, \gamma\rangle\delta) \tag{2.30}$$
$$= v^{-1}(\gamma + (m - \langle\mu, \gamma\rangle)\delta) \tag{2.31}$$
$$= v^{-1}(\gamma) + (m - \langle\mu, \gamma\rangle)\delta \tag{2.32}$$

上の計算より, $m - \langle\mu, \gamma\rangle = 0$ かつ $v^{-1}(\gamma) < 0$ または $m - \langle\mu, \gamma\rangle < 0$ である．$s_\beta = s_{\gamma+m\delta} =$

$\tau(m\gamma^\vee)s_\gamma$ である．実際, $\lambda \in P$ に対して

$$\begin{aligned} s_\beta(\lambda) &= \lambda - \langle \gamma^\vee + m^\vee c, \lambda \rangle (\gamma + m\delta) && (2.33)\\ &= \lambda - \langle \gamma^\vee, \lambda \rangle (\gamma + m\delta) && (2.34)\\ &= (\lambda - \langle \gamma^\vee, \lambda \rangle \gamma) - \langle m\gamma^\vee, \lambda \rangle \delta && (2.35)\\ &= s_\gamma(\lambda) + \langle m\gamma^\vee, s_\gamma(\lambda) \rangle \delta && (2.36)\\ &= \tau(m\gamma^\vee) s_\gamma(\lambda) && (2.37) \end{aligned}$$

より分かる．さて,

$$\begin{aligned} w'u = s_\beta wu = s_\beta \tau(\mu) v &= \tau(m\gamma^\vee) s_\gamma \tau(\mu) v && (2.38)\\ &= \tau(s_\gamma(\mu) + m\gamma^\vee)) s_\gamma v && (2.39) \end{aligned}$$

つまり $\mu' = s_\gamma(\mu) + m\gamma^\vee$, $v' = s_\gamma v$ である．

- $m - \langle \mu, \gamma \rangle = 0$ かつ $v^{-1}(\gamma) < 0$ のとき: $\mu' = s_\gamma(\mu) + m\gamma^\vee = \mu - (\langle \mu, \gamma \rangle - m)\gamma^\vee = \mu$ であり $v^{-1}(\gamma) < 0$ から $v' = s_\gamma v \preccurlyeq v$ である．
- $m - \langle \mu, \gamma \rangle < 0$ のとき: $\mu' = s_\gamma(\mu) + m\gamma^\vee$, $s_\gamma(\mu) = \mu - \langle \mu, \gamma \rangle \gamma^\vee$ である．$m > 0$, $m - \langle \mu, \gamma \rangle < 0$ より $\langle \mu, \gamma \rangle > 0$ である．ここで $\langle \mu, \gamma \rangle = k$ とおく．$s_\gamma(\mu) = \mu - k\gamma^\vee$ で $\mu' = s_\gamma(\mu) + m\gamma^\vee = \mu + (m-k)\gamma^\vee$, $m - k < 0$ かつ $m > 0$ より $0 < m < k$ である．これで $\mu'_+ < \mu_+$ がいえた． □

2.4 アフィン Hecke 環

以下, ルート系 R の有限添字集合を $I = \{1, \dots, n\}$ とする．また, パラメータの集合 $\{t_\alpha \mid \alpha \in S\}$ は, 条件

$$\alpha, \beta \in S, \quad \beta \in W_S.\alpha \quad \Longrightarrow \quad t_\alpha = t_\beta \tag{2.40}$$

を満たすものとする．特にアフィンの単純ルートの場合は $t_i := t_{\alpha_i} \quad (i \in \{0, 1, \dots, n\})$ とかく．また, $e \in \mathbb{Z}_{>0}$ で

$$\langle P^\vee, P \rangle \subseteq \frac{1}{e}\mathbb{Z} \tag{2.41}$$

を満たすものを固定し, $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(t_\alpha^{\frac{1}{2}}, q^{\frac{1}{e}} | \alpha \in S)$ と定義する．さて, それぞれ W_R, W_S, $\widetilde{W}_S$ の Hecke 化

$$\begin{aligned} H(W_R) &= \mathbb{K}\langle T_1, \dots, T_n \rangle && (2.42)\\ &\cap && (2.43)\\ H(W_S) &= \mathbb{K}\langle T_0, T_1, \dots, T_n \rangle && (2.44)\\ &\text{\rotatebox{90}{$\subseteq$}}\ && (2.45)\\ H(\widetilde{W}_S) &= \mathbb{K}\langle T_0, T_1, \dots, T_n \ ; \ u \ (u \in \Omega) \rangle && (2.46) \end{aligned}$$

を考える. $\widetilde{W}_S$ の Hecke 化を次の基本関係式で定義する.

$$(T_i - t_i^{\frac{1}{2}})(T_i + t_i^{-\frac{1}{2}}) = 0 \quad (i \in \{0,1,\dots,n\}) \tag{2.47}$$
$$\overbrace{T_i T_j \cdots}^{m_{ij}} = \overbrace{T_j T_i \cdots}^{m_{ij}} \tag{2.48}$$
$$u_\sigma u_\tau = u_{\sigma\tau} \qquad (u_\sigma, u_\tau \in \Omega) \tag{2.49}$$
$$u_\sigma T_i = T_{\sigma(i)} u_\sigma \qquad (i \in \{0,1,\dots,n\}\ ;\ u_\sigma \in \Omega) \tag{2.50}$$

$H(W_R),\ H(W_S),\ H(\widetilde{W}_S)$ をそれぞれ有限 Hecke 環, アフィン Hecke 環, 拡大アフィン Hecke 環という.

一般に $\widetilde{w} \in \widetilde{W}_S$ の最短表示 $\widetilde{w} = s_{i_1} \cdots s_{i_p} u,\ w = s_{i_1} \cdots s_{i_p} \in W_S,\ u \in \Omega$ に対して,

$$T(\widetilde{w}) = T(w) T_u = T_{i_1} \cdots T_{i_p} T_u \in H(\widetilde{W}_S) \tag{2.51}$$

とする. このとき $T(\widetilde{w})$ は $\widetilde{w}$ の最短表示の取り方に依らない[*1]. 以後 $T(w)$ を T_w と書くこともある.

2.5 Dunkl 作用素

任意の $\lambda \in P_+^\vee$ に対して,

$$Y^\lambda := T(\tau(\lambda)) \tag{2.52}$$

と定義する. また任意の $\mu = \sum_{i=1}^n \langle \mu, \alpha_i \rangle \omega_i^\vee \in P^\vee$ に対して $\mu = \lambda - \lambda' \quad (\lambda, \lambda' \in P_+^\vee)$ と表示したとする. このとき

$$Y^\mu := T(\tau(\lambda)) T(\tau(\lambda'))^{-1} = Y^\lambda (Y^{\lambda'})^{-1} \tag{2.53}$$

と定義する. このとき Y^μ は λ, λ' の取り方に依らない. また $\rho = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in R_+} \alpha$ とおくと次が成り立つ.

$$\ell(\tau(\lambda)) = \langle \lambda, 2\rho \rangle \qquad (\lambda \in P_+^\vee) \tag{2.54}$$
$$\ell(\tau(\lambda + \lambda')) = \ell(\tau(\lambda)) + \ell(\tau(\lambda')) \quad (\lambda, \lambda' \in P_+^\vee) \tag{2.55}$$

このことに注意すると $\lambda, \lambda' \in P_+^\vee$ のとき

$$Y^{\lambda+\lambda'} = T(\tau(\lambda + \lambda')) = T(\tau(\lambda)) T(\tau(\lambda')) = T(\tau(\lambda')) T(\tau(\lambda)) \tag{2.56}$$
$$= Y^\lambda Y^{\lambda'} = Y^{\lambda'} Y^\lambda \tag{2.57}$$

で $Y^\lambda, Y^{\lambda'}$ は互いに可換であることがわかる. この事実から一般に $\{Y^\mu \mid \mu \in P^\vee\}$ は互いに可換であることが分かる. $\mathbb{K}[Y^{\pm 1}] = \bigoplus_{\mu \in P^\vee} \mathbb{K} Y^\mu \simeq \mathbb{K}[Y^{P^\vee}]$ としたとき,

$$H(\widetilde{W}_S) = H(W_S) \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{K}[\Omega] = H(W_R) \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{K}[Y^{\pm 1}] = \bigoplus_{v \in W_R,\ \mu \in P^\vee} \mathbb{K} T_v \cdot Y^\mu \tag{2.58}$$

[*1] この事実は岩堀・松本の補題と呼ばれている.

が成り立つ. 次に, 一般の $\mu \in P^\vee$ に対して Y^μ を T_w, u $(w \in W_S,\ u \in \Omega)$ たちの積で表示する公式を与える.

命題 2.4 $\widetilde{w} = wu = s_{i_1} \cdots s_{i_p} u = \tau(\mu) v \in \widetilde{W_S}$ で最短表示とは限らないとする. このとき

$$u^{-1} T_{i_p}^{\epsilon'_p} \cdots T_{i_1}^{\epsilon'_1} = T_{v^{-1}} Y^{-\mu} \tag{2.59}$$

が成り立つ. 但し, $k = 1, \ldots, p$ に対して $\beta_k = s_{i_1} \cdots s_{i_{k-1}}(\alpha_k) = \gamma_k + m_k \delta$ $(\gamma_k \in R,\ m_k \in \mathbb{Z})$ とおき, 符号を $\epsilon'_k = \begin{cases} -1 & (\gamma_k \in R_+) \\ +1 & (\gamma_k \in R_-) \end{cases}$ としている.

[**証明**] $\widetilde{w}^{-1} = u^{-1} w^{-1} = u^{-1} s_{i_p} \cdots s_{i_1} = v^{-1} \tau(-\mu)$ を考える. また $\kappa = m\rho^\vee = m(\omega_1^\vee + \cdots + \omega_n^\vee) \in P_+^\vee$ で $\kappa - \mu \in P_+^\vee$ となるように m を十分大きくとる. $\widetilde{w}^{-1}$ に左から $\tau(\kappa)$ を乗じる.

$$u^{-1} s_{i_p} \cdots s_{i_1} \tau(\kappa) = v^{-1} \tau(\kappa - \mu) \tag{2.60}$$

$$u^{-1} T_{i_p}^{\epsilon_p} \cdots T_{i_1}^{\epsilon_1} Y^\kappa = T_{v^{-1}} Y^{\kappa - \mu} \tag{2.61}$$

但し,

$$\epsilon_k = \sigma((\tau(-\kappa) s_{i_1} \cdots s_{i_{k-1}}(\alpha_{i_k})),\ \sigma(\alpha) = \begin{cases} 1 & (\alpha \in S_+) \\ -1 & (\alpha \in S_-) \end{cases} \tag{2.62}$$

である. Y^κ を払うと,

$$u^{-1} T_{i_p}^{\epsilon_p} \cdots T_{i_1}^{\epsilon_1} = T_{v^{-1}} Y^{-\mu} \tag{2.63}$$

となる. さて $\tau(-\kappa)\beta_k = \beta_k - \langle \kappa, \beta_k \rangle \delta$ であることに注意して, $\beta_k = \gamma_k + m_k \delta \quad (\gamma_k \in R)$ と表示すると

$$\tau(-\kappa)\beta_k = \gamma_k + (m_k - \langle \kappa, \gamma_k \rangle)\delta \tag{2.64}$$

である.

$$\epsilon_k = \sigma(\tau(-\kappa)\beta_k) = \sigma(\gamma_k + (m_k - \langle \kappa, \gamma_k \rangle)\delta) \tag{2.65}$$

$\kappa = m\rho^\vee$ の m を十分大きくとると,

$$\begin{cases} \gamma_k > 0 \text{ のときは } m_k - \langle \kappa, \gamma_k \rangle < 0 \\ \gamma_k < 0 \text{ のときは } m_k - \langle \kappa, \gamma_k \rangle > 0 \end{cases} \tag{2.66}$$

となる. よって

$$\epsilon'_k := \begin{cases} 1 & (\gamma_k \in R_-) \\ -1 & (\gamma_k \in R_+) \end{cases} \tag{2.67}$$

とおくと

$$u^{-1} T_{i_p}^{\epsilon'_p} \cdots T_{i_1}^{\epsilon'_1} = T_{v^{-1}} Y^{-\mu} \tag{2.68}$$

とかける. □

2.6 アフィン Hecke 環と非対称 Macdonald 多項式

ウェイト $\lambda \in P$ に対して指数函数の乗法的記号 $x^\lambda = e(\lambda)$ を用いる．また零ルート δ に対しては $x^\delta = e(\delta) = q$ と解釈し, 一般のウェイト $\widetilde{\lambda} = \lambda + k\delta \in \widetilde{P} = P \oplus \frac{1}{e}\mathbb{Z}\delta$ に対しては $x^{\widetilde{\lambda}} = x^\lambda q^k$ と決める．以下, 乗法群 x^P の群環

$$\mathbb{K}[x^P] = \mathbb{K}[x^{\pm\omega_1}, x^{\pm\omega_2}, \dots, x^{\pm\omega_n}] \tag{2.69}$$

を Laurent 多項式環の記号 $\mathbb{K}[x^{\pm 1}]$ で表し, その商体を $\mathbb{K}(x)$ で表す．各 $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ に対して

$$T_i^x = c_i(x^{\alpha_i}) s_i^x + d_i(x^{\alpha_i}) \tag{2.70}$$

と定める．ここで s_i^x は x 変数に関する鏡映で

$$s_i^x(x^\lambda) = x^{s_i(\lambda)} \quad (\lambda \in P). \tag{2.71}$$

また任意のアフィンルート $\widetilde{\alpha} = \alpha + k\delta \in S \quad (\alpha \in W_S.\alpha_i)$ に対して

$$c_i(x^{\widetilde{\alpha}}) = t_i^{-\frac{1}{2}} \frac{1 - t_i x^{\widetilde{\alpha}}}{1 - x^{\widetilde{\alpha}}}, \quad d_i(x^{\widetilde{\alpha}}) = \frac{t_i^{\frac{1}{2}} - t_i^{-\frac{1}{2}}}{1 - x^{\widetilde{\alpha}}}. \tag{2.72}$$

このとき

$$c_i(x^{\widetilde{\alpha}}) + d_i(x^{\widetilde{\alpha}}) = t_i^{\frac{1}{2}}, \quad c_i(x^{\widetilde{\alpha}}) + c_i(x^{-\widetilde{\alpha}}) = t_i^{\frac{1}{2}} + t_i^{-\frac{1}{2}} \tag{2.73}$$

を満たすので, T_i^x は

$$(T_i^x - t_i^{\frac{1}{2}})(T_i^x + t_i^{-\frac{1}{2}}) = 0 \quad (i \in \{0, 1, \dots, n\}) \tag{2.74}$$

を満たす．また T_i^x は組紐関係式を満たすことが直接計算によって確かめられる．よって次の $\mathbb{K}$ 代数としての準同型が得られる．

$$\rho^x : H(W_S) = \mathbb{K}\langle T_0, T_1 \dots, T_n\rangle \to \mathbb{K}(x)[W_S]; \quad \rho^x(T_i) = T_i^x \quad (i \in \{0, 1, \dots, n\}) \tag{2.75}$$

$u_\sigma \in \Omega$ に対して, u_σ^x を次で定める．

$$u_\sigma^x(x^\lambda) = x^{u_\sigma(\lambda)} \quad (\lambda \in P). \tag{2.76}$$

$\rho^x(u_\sigma) = u_\sigma^x$ とみなすことで, 拡大アフィン Hecke 環 $H(\widetilde{W}_S)$ の表現が構成できる．

$$\rho^x : H(\widetilde{W}_S) \to \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}[x^{\pm 1}]) \tag{2.77}$$

また, 任意の $\mu \in P^\vee$ に対して $\tau^x(\mu)$ を

$$\tau^x(\mu)(x^\lambda) = x^{\tau(\mu)(\lambda)} = q^{\langle \mu, \lambda\rangle} x^\lambda \quad (\lambda \in P) \tag{2.78}$$

と定義する．このとき $\tau^x(\mu)$ は q 差分作用素になる．ここで T_i^x $(i\in I)$ の単項式 x^λ $(\lambda\in P)$ への作用を計算する．$\ell=\langle\alpha_i^\vee,\lambda\rangle$ とおき，$\ell\geq 0,\ \ell=0,\ \ell<0$ の3つの場合に分けて計算を行う．また $c_i(x^{\alpha_i})+d_i(x^{\alpha_i})=t_i^{\frac{1}{2}}$ が成り立つので

$$T_i^x=c_i(x^{\alpha_i})s_i^x+d_i(x^{\alpha_i})=t_i^{\frac{1}{2}}s_i^x+\frac{t_i^{\frac{1}{2}}-t_i^{-\frac{1}{2}}}{1-x^{\alpha_i}}(1-s_i^x) \tag{2.79}$$

と表せることに注意する．

$$\begin{aligned}
(\ell\geq 0)\qquad T_i^x(x^\lambda)&=t_i^{\frac{1}{2}}x^{\lambda-\ell\alpha_i}-(t_i^{\frac{1}{2}}-t_i^{-\frac{1}{2}})x^{\lambda-\ell\alpha_i}\frac{1-x^{\ell\alpha_i}}{1-x^{\alpha_i}} && (2.80)\\
&=t_i^{\frac{1}{2}}x^{\lambda-\ell\alpha_i}-(t_i^{\frac{1}{2}}-t_i^{-\frac{1}{2}})x^{\lambda-\ell\alpha_i}(1+x^{\alpha_i}+\cdots+x^{(\ell-1)\alpha_i}) && (2.81)\\
&=t_i^{-\frac{1}{2}}x^{s_i(\lambda)}-(t_i^{\frac{1}{2}}-t_i^{-\frac{1}{2}})(x^{\lambda-(\ell-1)\alpha_i}+\cdots+x^{\lambda-\alpha_i}) && (2.82)\\
(\ell=0)\qquad T_i^x(x^\lambda)&=t_i^{\frac{1}{2}}x^\lambda && (2.83)\\
(\ell<0)\qquad T_i^x(x^\lambda)&=t_i^{\frac{1}{2}}x^{\lambda-\ell\alpha_i}+(t_i^{\frac{1}{2}}-t_i^{-\frac{1}{2}})x^\lambda\frac{1-x^{-\ell\alpha_i}}{1-x^{\alpha_i}} && (2.84)\\
&=t_i^{\frac{1}{2}}x^{\lambda-\ell\alpha_i}+(t_i^{\frac{1}{2}}-t_i^{-\frac{1}{2}})x^\lambda(1+x^{-\alpha_i}+\cdots+x^{-(\ell-1)\alpha_i}) && (2.85)\\
&=t_i^{\frac{1}{2}}x^{\lambda-\ell\alpha_i}+(t_i^{\frac{1}{2}}-t_i^{-\frac{1}{2}})x^\lambda+(t_i^{\frac{1}{2}}-t_i^{-\frac{1}{2}})(x^{\lambda-\alpha_i}+\cdots+x^{\lambda-(\ell-1)\alpha_i}) && (2.86)
\end{aligned}$$

以上の計算から次が分かる．

命題 2.5 $H(W_R)=\langle T_1,\ldots,T_n\rangle$ の生成元の $\mathbb{K}[x^{\pm1}]$ への作用は次の三角性をもつ．

$$T_i(x^\lambda)=t_i^{\epsilon(-\langle\alpha_i^\vee,\lambda\rangle)}x^{s_i(\lambda)}+(\succcurlyeq\text{ に関して小さい項})\quad(i=1,\ldots,n) \tag{2.87}$$

但し，$\epsilon(x)=\begin{cases}\frac{1}{2} & (x\geq 0)\\ -\frac{1}{2} & (x<0)\end{cases}$ とする．

[**証明**] 上の計算から $\alpha\in R,\ \lambda\in P$ とし，$\ell=\langle\alpha^\vee,\lambda\rangle>0$ としたとき λ と $s_\alpha(\lambda)=\lambda-\ell\alpha$ を結ぶ線分の任意の内部の点 $\mu=\lambda-k\alpha$ $(k=1,\ldots,\ell-1)$ に対して $\mu_+<\lambda_+$ が成り立つことを示せばよい．いま $\mu_+=w(\mu)$ を満たす $w\in W_R$ をとると $\mu_+=w(\lambda)-kw(\alpha)$ は

$$w(\lambda),\ ws_\alpha(\lambda)=s_{w(\alpha)}w(\lambda)=w(\lambda)-\langle w(\alpha)^\vee,w(\lambda)\rangle w(\alpha)=w(\lambda)-\ell w(\alpha) \tag{2.88}$$

の線分上の点である．いま，$w(\lambda)\leq\lambda_+, ws_\alpha(\lambda)\leq\lambda_+$ が成り立っている．もし $w(\alpha)>0$ ならば $w(\lambda)-\mu_+=k(\alpha)>0$ であり $\lambda_+>\mu_+$ が言える．また $w(\alpha)<0$ ならば，$ws_\alpha(\lambda)-\mu_+=(k-\ell)w(\alpha)>0$ であり $\lambda_+>\mu_+$ が従う． □

Dunkl 作用素 Y^μ $(\mu \in P^\vee_+)$ の単項式 x^λ への作用を計算することを目標にする．まずは Y^μ を $T_i^{\pm 1}$ の単項式でかく．$\tau(\mu) \in \widetilde{W}_S$ の最短表示

$$\tau(\mu) = s_{i_1} \cdots s_{i_p} u_\sigma, \quad (i_1, \ldots, i_p \in \{0, 1, \ldots, n\}; u_\sigma \in \Omega) \tag{2.89}$$

を選び, 次のアフィンルートの系列

$$\beta_1 = \alpha_{i_1},\ \beta_2 = s_{i_1}(\alpha_{i_2}), \ldots, \beta_p = s_{i_1} \cdots s_{i_{p-1}}(\alpha_{i_p}) \tag{2.90}$$

について

$$S_{\tau(\mu)} = \{\beta \in S_+ \mid \tau(-\mu)(\beta) < 0\} = \{\beta_1, \ldots, \beta_p\} \tag{2.91}$$

が成立する．一般に $\beta \in S_+$ を

$$\beta = \alpha + m\delta \quad (\alpha \in R,\ m \in \mathbb{Z}) \tag{2.92}$$

の形で表すと, $m \geq 0,\ \alpha \in R_+$ または $m > 0,\ \alpha \in R_-$ となる．

$$\tau(-\mu)\beta = \beta - \langle \mu, \beta \rangle \delta = \alpha + (m - \langle \mu, \alpha \rangle)\delta \tag{2.93}$$

であるから

$$\tau(-\mu)\beta < 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha \in R_+,\ 0 \leq m < \langle \mu, \alpha \rangle \tag{2.94}$$

特に $k = 1, \ldots, p$ に対して

$$\beta_k = \alpha^{(k)} + m^{(k)}\delta \quad (\alpha^{(k)} \in R_+,\ 0 \leq m^{(k)} < \langle \mu, \alpha \rangle). \tag{2.95}$$

したがって命題 2.4 から

$$Y^{-\mu} = u_\sigma^{-1} T_{i_p}^{-1} \cdots T_{i_1}^{-1}. \tag{2.96}$$

であり

$$Y^\mu = T_{i_1} \cdots T_{i_p} u_\sigma. \tag{2.97}$$

が成り立つ．次に $\alpha \in S$ $(\alpha \in W_R.\alpha_i)$ に対して R 作用素というものを定義する．

$$R(\alpha) = c_i(x^\alpha) + d_i(x^\alpha) s_i^x = t_i^{\frac{1}{2}} + d_i(x^{\alpha_i})(s_i^x - 1) \tag{2.98}$$

このとき $T_i = R(\alpha_i)s_i \quad (i \in \{0, 1, \ldots, n\})$ となることが分かる．さて, $R(\alpha)$ の単項式 x^λ $(\lambda \in P)$ への作用を計算しよう．T_i^x のときと同様に $\ell = \langle \alpha^\vee, \lambda \rangle$ とおき $\ell \geq 0,\ \ell = 0,\ \ell < 0$ の 3 つの場合に分けて計算する．

$$(\ell \geq 0) \qquad R(\alpha)(x^\lambda) = t_i^{\frac{1}{2}} x^\lambda + (t_i^{\frac{1}{2}} - t_i^{-\frac{1}{2}}) x^{s_\alpha(\lambda)} \frac{1 - x^{\ell\alpha}}{1 - x^\alpha} \tag{2.99}$$

$$= t_i^{\frac{1}{2}} x^\lambda + (t_i^{\frac{1}{2}} - t_i^{-\frac{1}{2}}) x^{s_\alpha(\lambda)} (1 + x^\alpha + \cdots + x^{(\ell-1)\alpha}) \tag{2.100}$$

$$(\ell = 0) \qquad R(\alpha)(x^\lambda) = t_i^{\frac{1}{2}} x^\lambda \tag{2.101}$$

$$(\ell < 0) \qquad R(\alpha)(x^\lambda) = t_i^{\frac{1}{2}} x^\lambda - (t_i^{\frac{1}{2}} - t_i^{-\frac{1}{2}}) x^\lambda \frac{1 - x^{-\ell\alpha}}{1 - x^\alpha} \tag{2.102}$$

$$= t_i^{\frac{1}{2}} x^\lambda - (t_i^{\frac{1}{2}} - t_i^{-\frac{1}{2}}) x^\lambda (1 + x^\alpha + \cdots + x^{-(\ell+1)\alpha}) \tag{2.103}$$

$$= t_i^{-\frac{1}{2}} x^\lambda - (t_i^{\frac{1}{2}} - t_i^{-\frac{1}{2}}) (x^{\lambda+\alpha} + \cdots + x^{\lambda-(\ell+1)\alpha}) \tag{2.104}$$

以上の計算から T_i^x のとき同様に $R(\alpha)$ の $\mathbb{K}[x^{\pm 1}]$ への作用が命題 2.3 の順序 $\succcurlyeq$ (2.26) に関して三角性をもつことが確認できる．これで $Y^\mu \quad (\mu \in P_+^\vee)$ の $\mathbb{K}[x^{\pm 1}]$ への作用を計算する準備ができた．

$$
\begin{aligned}
Y^\mu(x^\lambda) &= T_{i_1}^x \cdots T_{i_p}^x u_\sigma^x(x^\lambda) && (2.105)\\
&= R(\alpha_{i_1}) s_{i_1}^x \cdots R(\alpha_{i_p}) s_{i_p}^x u_\sigma^x(x^\lambda) && (2.106)\\
&= R(\beta_1) R(\beta_2) \cdots R(\beta_p) \tau^x(\mu)(x^\lambda) && (2.107)\\
&= q^{\langle \mu, \lambda \rangle} R(\beta_1) \cdots R(\beta_p)(x^\lambda) && (2.108)\\
&= q^{\langle \mu, \lambda \rangle} t_{\beta_1}^{\epsilon(\langle \beta_1^\vee, \lambda \rangle)} \cdots t_{\beta_p}^{\epsilon(\langle \beta_p^\vee, \lambda \rangle)} x^\lambda + (\succcurlyeq \text{ に関して小さい項}) && (2.109)\\
&= \eta_\lambda^\mu x^\lambda + (\succcurlyeq \text{ に関して小さい項}) && (2.110)
\end{aligned}
$$

Dunkl 作用素 Y^μ も $\mathbb{K}[x^{\pm 1}]$ への作用が順序 $\succcurlyeq$ に関して三角性をもつことが分かった．$\beta \in S$ に対して, $t_\beta = q^{c_\beta}$ とおく．既約かつ被約なルート系の設定では $\beta = \alpha + m\delta \ (\alpha \in R)$ ならば $t_\beta = t_\alpha$ であることに注意しておく．

$$
\begin{aligned}
t_{\beta_1}^{\epsilon(\langle \beta_1^\vee, \lambda \rangle)} \cdots t_{\beta_p}^{\epsilon(\langle \beta_p^\vee, \lambda \rangle)} &= \prod_{\beta \in S_{\tau(\mu)}} t_\beta^{\epsilon(\langle \beta^\vee, \lambda \rangle)} && (2.111)\\
&= q^{\sum_{\beta \in S_{\tau(\mu)}} \epsilon(\langle \beta^\vee, \lambda \rangle) c_\beta} && (2.112)\\
&= q^{\sum_{\alpha \in R_+} \epsilon(\langle \alpha^\vee, \lambda \rangle) \langle \mu, \alpha \rangle c_\alpha} && (2.113)
\end{aligned}
$$

ここで

$$
\rho_c(\lambda) = \sum_{\alpha \in R_+} \epsilon(\langle \alpha^\vee, \lambda \rangle) c_\alpha \alpha \qquad (\lambda \in P) \tag{2.114}
$$

という記号を用いる．特に, $\lambda \in P^+$ のときは

$$
\rho_c(\lambda) = \rho_c = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in R_+} c_\alpha \alpha \tag{2.115}
$$

となる．η_λ^μ は次のようにかける．

$$
\eta_\lambda^\mu = q^{\langle \mu, \lambda \rangle + \langle \mu, \rho_c(\lambda) \rangle} = q^{\langle \mu, \lambda + \rho_c(\lambda) \rangle} \tag{2.116}
$$

記号を簡略化することで η_λ^μ は $P^\vee$ 上の指標

$$
\eta_\lambda = q^\lambda t^{\rho(\lambda)} \in \mathrm{Hom}(P^\vee, \mathbb{K}^*) \qquad (t^{\rho(\lambda)} = \prod_{\alpha \in R_+} t_\alpha^{\epsilon(\langle \alpha^\vee, \lambda \rangle) \alpha}) \tag{2.117}
$$

の $\mu \in P^\vee$ での値

$$
\eta_\lambda(\mu) = (q^\lambda t^{\rho(\lambda)})^\mu = q^{\langle \mu, \lambda \rangle} \prod_{\alpha \in R_+} t_\alpha^{\epsilon(\langle \alpha^\vee, \lambda \rangle) \langle \mu, \alpha \rangle} = q^{\langle \mu, \lambda \rangle} t^{\langle \mu, \rho(\lambda) \rangle} = \eta_\lambda^\mu \tag{2.118}
$$

とみなせる．

定理 2.1 任意の $\lambda \in P$ に対して, Laurent 多項式 $E_\lambda(x) \in \mathbb{K}[x^{\pm 1}]$ であって次の条件を満たすものが唯一つ存在する.

(1) $E_\lambda(x) = x^\lambda + (\succcurlyeq$ に関して低い項.)

(2) $Y^\mu E_\lambda = \eta_\lambda^\mu E_\lambda(x), \quad (\mu \in P_+^\vee,\ \eta_\lambda^\mu = q^{\langle \mu, \lambda \rangle} \prod_{\alpha \in R_+} t_\alpha^{\epsilon(\langle \alpha^\vee, \lambda \rangle)\langle \mu, \alpha \rangle})$

定理 2.1 の $E_\lambda(x)$ を**非対称 Macdonald 多項式**という.

2.7 二重アフィン Hecke 環と反対合

$T_i \quad (i = 0, 1, \ldots, n)$ と単項式 x^λ との関係式をみる. 一般の $f(x) \in \mathbb{K}[x^{\pm 1}]$ に対して

$$
\begin{aligned}
&T_i^x x^\lambda f(x) - x^{s_i \lambda} T_i^x f(x) \\
&= (c_i(x^{\alpha_i}) s_i^x + d_i(x^{\alpha_i})) x^\lambda f(x) - x^{s_i \lambda} (c_i(x^{\alpha_i}) s_i^x + d_i(x^{\alpha_i})) f(x) \\
&= c_i(x^{\alpha_i}) x^{s_i \lambda} s_i^x (f(x)) + d_i(x^{\alpha_i}) x^\lambda f(x) - x^{s_i \lambda} c_i(x^{\alpha_i}) s_i^x (f(x)) - x^{s_i \lambda} d_i(x^{\alpha_i}) f(x) \\
&= d_i(x^{\alpha_i})(x^\lambda - x^{s_i \lambda}) f(x)
\end{aligned}
$$

となり, 次の関係式

$$T_i x^\lambda - x^{s_i \lambda} T_i = d_i(x^{\alpha_i})(x^\lambda - x^{s_i \lambda}) \tag{2.119}$$

を **Lusztig 関係式**という. Lusztig 関係式を少し変形して

$$(T_i - d_i(x^{\alpha_i})) x^\lambda = x^{s_i \lambda} (T_i - d_i(x^\alpha)) \tag{2.120}$$

とする. ここで $i = 0, 1, \ldots, n$ に対して

$$S_i^x = T_i + \varphi_i^+(x^{\alpha_i}) = T_i^{-1} + \varphi_i^-(x^{\alpha_i}) \tag{2.121}$$

とおき, これを x **側の Intertwining 作用素**という. 但し,

$$\varphi_i^\pm(z) = \mp \frac{t_i^{\frac{1}{2}} - t_i^{-\frac{1}{2}}}{1 - z^{\pm 1}} \tag{2.122}$$

という記号を用いた. さて,

$$DH(W_S) = \mathbb{K}[x^P] \otimes_{\mathbb{K}} H(W_R) \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{K}[x^{P^\vee}] \tag{2.123}$$

を**二重アフィン Hecke 環**という.

定理 2.2 二重アフィン Hecke 環 $DH(W_S)$ の上の反対合 ϕ であって以下の条件を満たすものが存在する.

$$\phi(x^\lambda) = Y^{-\lambda}, \quad \phi(Y^\mu) = x^{-\mu}, \quad \phi(T_i) = T_i \ (i = 1, \ldots, n) \tag{2.124}$$

Lusztig 関係式に ϕ を施すことで, $T_i \quad (i=1,\dots,n)$ と Y^{λ} との関係式が得られる.

$$Y^{-\lambda}T_i - T_i Y^{-s_i\lambda} = d_i(Y^{-\alpha_i^\vee})(Y^{-\lambda} - Y^{-s_i\lambda})$$
$$Y^{-\lambda}(T_i - d_i(Y^{-\alpha_i^\vee})) = (T_i - d_i(Y^{-\alpha_i^\vee}))Y^{-s_i\lambda}$$

ここで $-s_i\lambda$ を改めて λ と置き直す.

$$(T_i - d_i(Y^{-\alpha_i^\vee}))Y^{\lambda} = Y^{s_i\lambda}(T_i - d_i(Y^{-\alpha_i^\vee})) \tag{2.125}$$

(2.125) を展開すれば Y 側の Lusztig 関係式を得る. さて,$i = 1.\dots,n$ に対して S_i^Y を

$$S_i^Y = T_i + \varphi_i^+(Y^{-\alpha_i^\vee}) = T_i^{-1} + \varphi_i^-(Y^{-\alpha_i^\vee}) \tag{2.126}$$

と定義しこれを **Y 側の Intertwining 作用素**という. $s_0 = \tau(-\varphi^\vee)s_\varphi$ と**命題 2.4** によって

$$T_0 = T_{s_\varphi}^{-1}Y^{\varphi^\vee} \tag{2.127}$$

が従う. S_0^Y を次のように決める.

$$S_0^x = T_\varphi^{-1}Y^{\varphi^\vee} + \varphi_0^+(qx^{-\varphi}) = Y^{-\varphi^\vee}T_\varphi + \varphi_0^-(q^{-1}x^{\varphi}) \tag{2.128}$$
$$S_0^Y = x^{-\varphi^\vee}T_\varphi^{-1} + \varphi_0^+(qY^{\varphi}) = T_\varphi x^{\varphi^\vee} + \varphi_0^-(q^{-1}Y^{-\varphi}) \tag{2.129}$$

ここで, $S_i^Y \ (i=1,\dots,n)$ の役割を説明する.

$$Y^\mu S_i^\mu E_\lambda(x) = S_i^Y Y^{s_i\mu}E_\lambda(x) \tag{2.130}$$
$$= S_i^Y \eta_\lambda^{s_i\mu}E_\lambda(x) \tag{2.131}$$
$$= \eta_{s_i\lambda}^{\mu} S_i^Y E_\lambda(x) \tag{2.132}$$

以上から

$$S_i^Y E_\lambda(x) = \mathrm{Const}.E_{s_i\lambda}(x) \tag{2.133}$$

となることがわかる. 次に $S_i^Y E_\lambda(x) = \mathrm{Const}.E_{s_i\lambda}(x)$ の $\mathrm{Const} = C$ を計算する.

$$S_i^Y E_\lambda(x) = (T_i + \varphi_i^+(Y^{-\alpha_i^\vee}))E_\lambda(x) = C.E_{s_i(\lambda)}(x) \tag{2.134}$$
$$T_iE_\lambda(x) = C.E_{s_i(\lambda)}(x) - \varphi_i^+(\eta_\lambda^{-\alpha_i^\vee})E_\lambda(x) \tag{2.135}$$
$$T_iE_\lambda(x) = \alpha_\lambda E_\lambda(x) + \beta_\lambda E_{s_i\lambda}(x) \tag{2.136}$$

$\ell = \langle \alpha_i^\vee, \lambda\rangle$ とし, $\ell > 0,\ \ell = 0,\ \ell < 0$ に場合分けして計算する.

$\ell = 0$ のときを考える. $s_i(\rho(\lambda)) = \rho(\lambda) - \langle \alpha_i^\vee, \rho(\lambda)\rangle\alpha_i$ であるが, 一方で

$$s_i(\rho(\lambda)) = \sum_{\alpha\in R_+\setminus\{\alpha_i\}} \epsilon(\langle\alpha^\vee,\lambda\rangle)\alpha - \frac{1}{2}\alpha_i = \rho(\lambda) - \alpha_i \tag{2.137}$$

であることから $\langle\alpha_i^\vee, \rho(\lambda)\rangle = 1$ であることが分かった. さらに

$$\langle\alpha_i^\vee, \rho(\lambda)\rangle = \langle\alpha_i^\vee, \frac{1}{2}\alpha_i\rangle + \langle\alpha_i^\vee, \sum_{\alpha\in R_+\setminus\{\alpha_i\}}\epsilon(\langle\alpha^\vee,\lambda\rangle)\alpha\rangle = 1 + \langle\alpha_i^\vee, \sum_{\alpha\in R_+\setminus\{\alpha_i\}}\epsilon(\langle\alpha^\vee,\lambda\rangle)\alpha\rangle = 1 \tag{2.138}$$

から $\langle\alpha_i^\vee, \sum_{\alpha\in R_+\setminus\{\alpha_i\}}\epsilon(\langle\alpha^\vee,\lambda\rangle)\alpha\rangle = 0$ となる．したがって，

$$\eta_\lambda^{-\alpha_i^\vee} = q^{\langle -\alpha_i^\vee,\lambda\rangle} t^{\langle -\alpha_i^\vee,\rho(\lambda)\rangle} = t_i^{-1} \tag{2.139}$$

となることがわかる．あとは直接計算によって $S_i^Y E_\lambda(x) = 0$ となる．

$\ell < 0$ のときは $\lambda - s_i\lambda = \ell\alpha_i < 0$ なので $E_\lambda(x)$ には $x^{s_i\lambda}$ の項は現れないことに注意すれば $T_i(x^\lambda)$ の $x^{s_i\lambda}$ の係数を見れば β_λ が計算できることがわかる．

$$T_i(x^\lambda) = t_i^{\frac{1}{2}} x^{s_i\lambda} + (t_i^{\frac{1}{2}} - t_i^{-\frac{1}{2}})x^\lambda + (t_i^{\frac{1}{2}} - t_i^{-\frac{1}{2}})(x^{\lambda-\alpha_i} + \cdots + x^{\lambda-(\ell-1)\alpha_i}) \quad (\ell < 0) \tag{2.140}$$

すなわち $\ell < 0$ のとき $\beta_\lambda = t_i^{\frac{1}{2}}$．

$\ell > 0$ のときの β_λ を計算する．(2.136) の両辺に T_i を作用させる．

$$\begin{aligned}
T_i^2 E_\lambda(x) &= \alpha_\lambda T_i E_\lambda(x) + \beta_\lambda T_i E_{s_i\lambda}(x)\\
((t_i^{\frac{1}{2}} - t_i^{-\frac{1}{2}})T_i + 1)E_\lambda(x) &= \alpha_\lambda(\alpha_\lambda E_\lambda(x) + \beta_\lambda E_{s_i\lambda}(x)) + \beta_\lambda(\alpha_{s_i\lambda}E_{s_i\lambda}(x) + \beta_{s_i\lambda}E_\lambda(x))\\
(-\alpha_\lambda^2 + (t_i^{\frac{1}{2}} - t_i^{-\frac{1}{2}})\alpha_\lambda + 1 - \beta_\lambda\beta_{s_i\lambda})E_\lambda(x) &= (\alpha_\lambda\beta_\lambda + \alpha_{s_i\lambda}\beta_\lambda - (t_i^{\frac{1}{2}} - t_i^{-\frac{1}{2}})\beta_\lambda)E_{s_i\lambda}(x)
\end{aligned}$$

以上から関係式

$$\beta_\lambda\beta_{s_i\lambda} = (t_i^{\frac{1}{2}} - \alpha_\lambda)(t_i^{-\frac{1}{2}} + \alpha_\lambda) \tag{2.141}$$

が得られる．$\beta_{s_i\lambda} = t_i^{\frac{1}{2}}$，$\alpha_\lambda = -\varphi_i^+(\eta_\lambda^{-\alpha_i^\vee})$ であるから

$$\begin{aligned}
\beta_\lambda\beta_{s_i\lambda} &= (t_i^{\frac{1}{2}} - \alpha_\lambda)(t_i^{-\frac{1}{2}} + \alpha_\lambda)\\
\beta_\lambda &= t_i^{-\frac{1}{2}}\left(t_i^{\frac{1}{2}} - \frac{t_i^{\frac{1}{2}} - t_i^{-\frac{1}{2}}}{1-\eta_\lambda^{-\alpha_i^\vee}}\right)\left(t_i^{-\frac{1}{2}} + \frac{t_i^{\frac{1}{2}} - t_i^{-\frac{1}{2}}}{1-\eta_\lambda^{-\alpha_i^\vee}}\right)\\
\beta_\lambda &= t_i^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{t_i^{-\frac{1}{2}} - t_i^{\frac{1}{2}}\eta_\lambda^{-\alpha_i^\vee}}{1-\eta_\lambda^{-\alpha_i^\vee}}\right)\left(\frac{t_i^{\frac{1}{2}} - t_i^{-\frac{1}{2}}\eta_\lambda^{-\alpha_i^\vee}}{1-\eta_\lambda^{-\alpha_i^\vee}}\right)\\
\beta_\lambda &= t_i^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{t_i^{-\frac{1}{2}} - t_i^{\frac{1}{2}}\eta_\lambda^{-\alpha_i^\vee}}{1-\eta_\lambda^{-\alpha_i^\vee}}\right)\left(\frac{t_i^{-\frac{1}{2}} - t_i^{\frac{1}{2}}\eta_\lambda^{\alpha_i^\vee}}{1-\eta_\lambda^{\alpha_i^\vee}}\right)\\
\beta_\lambda &= t_i^{-\frac{3}{2}}\frac{(1-t_i\eta_\lambda^{\alpha_i^\vee})(1-t_i\eta_\lambda^{-\alpha_i^\vee})}{(1-\eta_\lambda^{\alpha_i^\vee})(1-\eta_\lambda^{-\alpha_i^\vee})}
\end{aligned}$$

以上の計算を纏める．

補題 2.1 S_i^Y $(i = 1, \ldots, n)$ と $E_\lambda(x)$ $(\lambda \in P)$ に対して

$$S_i^Y E_\lambda(x) = \begin{cases} t_i^{-\frac{3}{2}}\frac{(1-t_i\eta_\lambda^{\alpha_i^\vee})(1-t_i\eta_\lambda^{-\alpha_i^\vee})}{(1-\eta_\lambda^{\alpha_i^\vee})(1-\eta_\lambda^{-\alpha_i^\vee})}E_{s_i\lambda}(x) & (\langle\alpha_i^\vee,\lambda\rangle > 0)\\ 0 & (\langle\alpha_i^\vee,\lambda\rangle = 0)\\ t_i^{\frac{1}{2}}E_{s_i\lambda}(x) & (\langle\alpha_i^\vee,\lambda\rangle < 0)\end{cases} \tag{2.142}$$

2.8 Ram-Yip 公式

$0=(0,0,\dots,0)\in P$ のとき $E_0(x)=1$ である．今，$\lambda\in P$ に対して，$\lambda=w(0)$ となる $w=s_{i_1}\cdots s_{i_p}u=\tau(\lambda)v\in\widetilde{W}_S,\ u\in\Omega$ をとることで

$$S_w^Y=S_{i_1}^Y\cdots S_{i_p}^Y uE_0(x)=\mathrm{Const}.E_\lambda(x) \tag{2.143}$$

となることが前節からわかる．ここで Intertwining 作用素の積 S_w^Y に 1 を作用させれば直ちに $E_\lambda(x)$ を得れるようにするには予めどのように展開しておくべきかという問題が考えられる．Ram-Yip の公式はその問題の解答を与えているのである．その説明をするために次の記号を導入する．$w=s_{i_1}\cdots s_{i_p}$ に対して

$$\beta'_k=s_{i_p}\cdots s_{i_{k+1}}(\alpha_k)\quad(k=1,\dots,p) \tag{2.144}$$

と定める．(β_k とは違うことに注意) また $\alpha\in S$ に対して $\alpha=\gamma+m\delta$ ($\gamma\in R,\ m\in\mathbb{Z}$) という形に書き直したとき

$$\epsilon'(\alpha)=\begin{cases}1 & (\gamma\in R_-)\\ -1 & (\gamma\in R_+)\end{cases} \tag{2.145}$$

と定義する．さらに有限添字集合 I と $k\in I$ に対し I の中で k より小さいもの全てを左から右に小さい順に $i_1,\dots,i_p$ としたとき

$$s_{I_k}=s_{i_1}\cdots s_{i_p} \tag{2.146}$$

とする．$S_{i_1}^x=T_{i_1}^{\epsilon'(\alpha_{i_1})}+\varphi_{i_1}^{\epsilon'(\alpha_{i_1})}(x^{\alpha_i})$ を最初の一手とし，次に $S_{i_2}^x$ を当て次のように展開する．

$$\begin{aligned}
S_{i_2}^xS_{i_1}^x&=S_{i_2}^x(T_{i_1}^{\epsilon'(\alpha_{i_1})}+\varphi_{i_1}^{\epsilon'(\alpha_{i_1})}(x^{\alpha_i}))\\
&=S_{i_2}^xT_{i_1}^{\epsilon'(\alpha_{i_1})}+\varphi_{i_1}^{\epsilon'(\alpha_{i_1})}(x^{s_{i_2}(\alpha_{i_1})})S_{i_2}^x\\
&=(T_{i_2}^{\epsilon'(s_{i_1}(\alpha_{i_2}))}+\varphi_{i_2}^{\epsilon'(s_{i_1}(\alpha_{i_2}))}(x^{\alpha_{i_2}}))T_{i_1}^{\epsilon'(\alpha_{i_1})}+\varphi_{i_1}^{\epsilon'(\alpha_{i_1})}(x^{s_{i_2}(\alpha_{i_1})})(T_{i_2}^{\epsilon'(\alpha_{i_2})}+\varphi_{i_2}^{\epsilon'(\alpha_{i_2})}(x^{\alpha_{i_2}}))\\
&=T_{i_2}^{\epsilon'(s_{i_1}(\alpha_{i_2}))}T_{i_1}^{\epsilon'(\alpha_{i_1})}+\varphi_{i_2}^{\epsilon'(s_{i_1}(\alpha_{i_2}))}(x^{\alpha_{i_2}})T_{i_1}^{\epsilon'(\alpha_{i_1})}\\
&\qquad+\varphi_{i_1}^{\epsilon'(\alpha_{i_1})}(x^{s_{i_2}(\alpha_{i_1})})T_{i_2}^{\epsilon'(\alpha_{i_2})}+\varphi_{i_1}^{\epsilon'(\alpha_{i_1})}(x^{s_{i_2}(\alpha_{i_1})})\varphi_{i_2}^{\epsilon'(\alpha_{i_2})}(x^{\alpha_{i_2}})
\end{aligned}$$

これを繰り返すと $w=s_{i_1}\cdots s_{i_p}u\in\widetilde{W}_S$ に対して次の公式が得られる．

$$u^{-1}S_{i_p}^x\cdots S_{i_1}^x=\sum_{I\subseteq\{1,\dots,p\}}\prod_{k\notin I}\varphi_{i_k}^{\epsilon'(s_{I_k}(\alpha_k))}(x^{\beta'_k})\overleftarrow{\prod_{\ell\in I}}T_{i_\ell}^{\epsilon'(\beta_\ell^I)} \tag{2.147}$$

但し，$I=\{r_1,\dots,r_n\}\subseteq\{1,\dots,p\}$ に対して，

$$\beta_k^I=s_{r_1}\cdots s_{r_{k-1}}(\alpha_{r_k})\quad(r_1<\cdots<r_k,\quad k=1,\dots,n) \tag{2.148}$$

とし，$\overleftarrow{\prod}_{k\in I}$ は左から右に I の要素を大きい順に掛けるという意味で用いた．さらに**命題 2.4** から

$$u^{-1}S_{i_p}^x\cdots S_{i_1}^x=\sum_{I\subseteq\{1,\dots,p\}}\prod_{k\notin I}\varphi_{i_k}^{\epsilon'(s_{I_k}(\alpha_k))}(x^{\beta'_k})T_{v_I}^{-1}Y^{-\lambda_I} \tag{2.149}$$

と書き直せる. 但し, $I = \{r_1, \ldots, r_s\} \subseteq \{1, \ldots, p\}$ に対して

$$w_I = s_{i_{r_1}} \cdots s_{i_{r_s}} u = \tau(\lambda_I) v_I \quad (v_I \in W_R,\ \lambda_I \in P^\vee, r_1 < \cdots < r_s) \tag{2.150}$$

という記号を用いた. (4.67) を ϕ で反転させる. $k = 1, \ldots, p$ に対して $\beta'_k = \gamma_k + m_k\delta$ ($\gamma_k \in R, m_k \in \mathbb{Z}$) という記号を使う.

$$S_w^Y = S_{i_1}^Y \cdots S_{i_p}^Y u = \sum_{I \subseteq \{1,\ldots,p\}} x^{\lambda_I} T_{v_I} \prod_{k \notin I} \varphi_{i_k}^{\epsilon'(s_{I_k}(\alpha_k))}(q^{m_k} Y^{-\gamma_k}) \tag{2.151}$$

また,

$$Y^{-\gamma_k} 1 = Y^{-\gamma_k} E_0(x) = t^{\langle -\gamma_k, \rho(0) \rangle} = t^{\langle -\gamma_k, \rho \rangle} \tag{2.152}$$

に注意する. 次が Ram-Yip の公式である.

定理 2.3 (Ram-Yip **の公式** (2011)) $0 = (0, \ldots, 0) \in P^\vee$ とする. $\lambda \in P^\vee$ に対して, $\lambda = w(0)$ なる $w \in \widetilde{W}_S$ をとる. $w = s_{i_1} \cdots s_{i_p} u = \tau(\lambda) v$ ($u \in \Omega,\ v \in W_R$) としたとき次が成り立つ.

$$\mathrm{Const.} E_\lambda(x) = \sum_{I \subseteq \{1,\ldots,p\}} x^{\lambda_I} t_{v_I}^{-\frac{1}{2}} \prod_{k \notin I} \varphi_{i_k}^{\epsilon'(s_{I_k}(\alpha_k))}(q^{m_k} t^{\langle -\gamma_k, \rho \rangle}) \tag{2.153}$$

但し, $t_v = \prod_{\alpha \in S_v} t_\alpha$ という記号を用いた.

[**証明**] 上の定理の設定で $S_w^Y E_\mu(x) = \mathrm{Const.} E_\lambda(x)$ となることは S_w^Y の作り方からわかる. あとは任意の $I \subseteq \{1, \ldots, p\}$ に対して $\lambda \succcurlyeq \mu_I$ が示せればよい (三角性). それは w と任意の $I \subseteq \{1, \ldots, p\}$ に対する w_I は Bruhat 順序 $\succcurlyeq_{Bru.}$ に関して $w \succcurlyeq_{Bru.} w_I$ が成り立っていることと **命題 2.3** から従う. □

3 A_{n-1} 型の Ram-Yip 公式

3.1 ルート系の設定

断らない限り, 前節の記号をそのまま使う.

- $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(q^{\frac{1}{2}}, t^{\frac{1}{2}})$
- $V = \mathbb{K}\epsilon_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{K}\epsilon_n$ であり V 上の標準内積 $(\ |\ )$ に関して $(\epsilon_i|\epsilon_j) = \delta_{i,j}$ を満たす.
- $R_+ = \{\epsilon_i - \epsilon_j \mid 1 \le i < j \le n\}, \quad R = R_+ \cup -(R_+)$
- $\alpha_i = \epsilon_i - \epsilon_{i+1} \quad (i = 1, \ldots, n-1)$
- $\omega_i = \epsilon_1 + \cdots + \epsilon_i \quad (i = 1, \ldots, n)$
- $\alpha_0 = \delta - \epsilon_1 + \epsilon_n$
- $S = \{\alpha + k\delta \mid \alpha \in R,\ k \in \mathbb{K}\}$

3.2 アフィン Weyl 群

$i=0,1,\dots,n-1$ として $s_0,s_1,\dots,s_{n-1}$ を以下で定義する．

$$s_0(\epsilon_j)=\begin{cases}\epsilon_n+\delta & (j=1)\\ \epsilon_1-\delta & (j=n)\\ \epsilon_j & (j\neq 1,n)\end{cases},\quad s_i(\epsilon_j)=\begin{cases}\epsilon_i & (j=i+1)\\ \epsilon_{i+1} & (j=i)\\ \epsilon_j & (j\neq i,i+1)\end{cases}\quad (i=1,\dots,n-1) \tag{3.1}$$

これらで生成される群 $W_S=\langle s_0,s_1,\dots,s_{n-1}\rangle$ がアフィン Weyl 群であり, $W_R=\langle s_1,\dots,s_{n-1}\rangle$ は有限 Weyl 群. $\alpha^\vee\in Q^\vee$ に対して, $\tau(\alpha^\vee)$ を $\tau(\alpha^\vee)(\lambda)=\lambda-\alpha^\vee$, $(\lambda\in V^*)$ として定義する．このとき $f\in V$ に対しては,

$$(\tau(\alpha^\vee)(f))(\lambda)=f(\lambda+\alpha^\vee)=\langle\lambda,f\rangle+\langle\alpha^\vee,f\rangle=(f+\langle\alpha^\vee,f\rangle\delta)(\lambda) \tag{3.2}$$

であるから $\tau(\alpha^\vee)(f)=f+\langle\alpha^\vee,f\rangle\delta$. $\tau(Q^\vee)=\{\tau(\alpha^\vee)\mid\alpha\in Q^\vee\}$ とすると $W=\tau(Q^\vee)\rtimes W_0$ とかける．これを拡大してできる群が $\widetilde{W}=\tau(P^\vee)\rtimes W_0$ を拡大アフィン Weyl 群. $\widetilde{W_S}/W_S=\tau(P^\vee)/\tau(Q^\vee)=\Omega$ で Ω はディンキン図形の自己同型群の部分群であって, $\Omega=\omega^{\mathbb{Z}}$ である．$\widetilde{W_S}$ を生成元と関係式でかくと以下のようになる．$\widetilde{W_S}=\langle s_0,s_1,\dots,s_{n-1};\omega\rangle$ であって,

$$s_i^2=1 \qquad (i=0,1,\dots,n-1) \tag{3.3}$$

$$s_is_j=s_js_i \qquad (j\not\equiv i,i\pm1) \tag{3.4}$$

$$s_is_js_i=s_js_is_j \qquad (j\equiv i\pm1;n\geq 3) \tag{3.5}$$

$$\omega s_i=s_{i-1}\omega \qquad (i\in\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \tag{3.6}$$

3.3 アフィン Hecke 環

$\mathbb{K}\langle T_0,T_1,\dots,T_{n-1};\omega\rangle$ で関係式

$$(T_i-t^{1/2})(T_i+t^{-1/2})=0\quad (i=0,1,\dots,n-1) \tag{3.7}$$

$$T_iT_j=T_jT_i\quad (j\not\equiv i,i\pm1) \tag{3.8}$$

$$T_iT_jT_i=T_jT_iT_j\quad (j\equiv i\pm1;n\geq 3) \tag{3.9}$$

$$\omega T_i=T_{i-1}\omega\quad (i=0,1,\dots,n-1) \tag{3.10}$$

を満たす代数を $H(\widetilde{W_S})$ とかき A_{n-1} 型の**拡大アフィン Hecke 環**という．以後, 単にアフィン Hecke 環と呼ぶことにする．また, $\tau(\epsilon_i)$ たちのアフィン Hecke 環での実現は以下で与えられる．

$$Y_1=T_1\cdots T_{n-1}\omega \tag{3.11}$$

$$Y_2=T_2\cdots T_{n-1}\omega T_1^{-1} \tag{3.12}$$

$$\vdots \tag{3.13}$$

$$Y_i=T_i\cdots T_{n-1}\omega T_1^{-1}\cdots T_{i-1}^{-1} \tag{3.14}$$

$$\vdots \tag{3.15}$$

$$Y_n=\omega T_1^{-1}\cdots T_{n-1}^{-1} \tag{3.16}$$

これらを **Dunkl 作用素**という. アフィン Hecke 環の基本関係式から Y_i たちは互いに可換であることがわかる.

3.4 アフィン Hecke 環の表現と非対称 Macdonald 多項式

$\mathcal{A} = \mathbb{K}[x^P] = \mathbb{K}[x^{\pm 1}]$ とし, $\mathbb{K}$ 代数としての準同型 $\rho : H(\widetilde{W}_S) \to \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(\mathcal{A})$ を以下で決める.

$$\rho(T_i) = t^{1/2} + t^{-1/2}\frac{1 - tx_i/x_{i+1}}{1 - x_i/x_{i+1}}(s_i - 1) \quad (i = 1, \ldots, n-1) \tag{3.17}$$

$$\rho(T_0) = t^{1/2} + t^{-1/2}\frac{1 - qtx_n/x_1}{1 - qx_n/x_1}(s_0 - 1) \tag{3.18}$$

$$\rho(\omega) = s_{n-1} \cdots s_1 \tau_1 \tag{3.19}$$

但し, $\tau_i(x_j) = q^{\delta_{i,j}} x_j$ である. 以後, 単に $\rho(T_i) = T_i, \rho(\omega) = \omega$ とかく. $x_i := x^{\epsilon_i}$ と書けば,

$$T_i = t^{1/2} + t^{-1/2}\frac{1 - tx^{\alpha_i}}{1 - x^{\alpha_i}}(s_i - 1) \quad (i = 0, 1, \ldots, n-1) \tag{3.20}$$

ともかける. $\tau(\epsilon_i)(x_j) = q^{\delta_{i,j}} x_j$ であるから $\tau(\epsilon_i)$ は x_i に関する q 差分作用素である.

$$c(z) = t^{-\frac{1}{2}}\frac{1 - tz}{1 - z}, \quad d(z) = \frac{t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}}}{1 - z} \tag{3.21}$$

としたとき, $c(z) + d(z) = t^{\frac{1}{2}}$ を満たし,

$$T_i = c(x^{\alpha_i})s_i + d(x^{\alpha_i}) \quad (i = 0, 1, \ldots, n-1) \tag{3.22}$$

とかける. $\lambda \in P$ に対して,

$$T_i x^\lambda - x^{s_i\lambda} T_i = d(x^{\alpha_i})(x^\lambda - x^{s_i\lambda}) \tag{3.23}$$

という関係式がなりたつ. この関係式を Lusztig 関係式という.

定理 3.1 (Macdonald) Laurent 多項式環 $\mathbb{K}[x^{\pm 1}] = \mathbb{K}[x^P]$ の $\mathbb{K}$ 基底 $\{E_\lambda(x)\}_{\lambda \in P}$ で以下を満たすものがただ一つ存在する.

(1) $E_\lambda(x) = x^\lambda + \sum_{\lambda \succ \mu} C_{\lambda,\mu} x^\mu$

(2) $f(Y)E_\lambda(x) = E_\lambda(x) f(\eta_\lambda)$. $\quad (\eta_\mu = (q^{\mu_1} t^{\rho(\lambda)_1}, \ldots, q^{\lambda_n} t^{\rho(\lambda)_n}) \in \mathbb{K}^n)$

定理の $\{E_\lambda(x)\}_{\lambda \in P}$ を A_{n-1} **型の非対称 Macdonald 多項式**という. 但し, $\lambda \in P$ に対して

$$\rho(\lambda) = \sum_{\alpha \in R_+} \epsilon(\langle \alpha, \lambda \rangle)\alpha, \quad \epsilon(u) = \begin{cases} \frac{1}{2} & (u \geq 0) \\ -\frac{1}{2} & (u < 0) \end{cases} \tag{3.24}$$

という記号を用いた.

3.5 二重アフィン Hecke 環とその反対合

Lusztig 関係式から

$$\begin{aligned}
T_i x_i - x_{i+1} T_i &= d(x_i/x_{i+1})(x_i - x_{i+1}) && (3.25)\\
&= -x_{i+1}(t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}}) && (3.26)\\
T_i x_i &= x_{i+1}(T_i - (t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})) && (3.27)\\
T_i x_i &= x_{i+1} T_i^{-1} && (3.28)\\
& && (3.29)\\
T_0 x_1 - q x_n T_0 &= d(q x_n/x_1)(x_1 - q x_n) && (3.30)\\
&= x_1(t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}}) && (3.31)\\
T_0^{-1} x_1 &= q x_n T_0 && (3.32)
\end{aligned}$$

を得る.

$$S_i^x = T_i + \varphi^+(x_i/x_{i+1}) = T_i^{-1} + \varphi^-(x_i/x_{i+1}) \quad (i = 0, 1, \ldots, n-1) \tag{3.33}$$

定理 3.2 二重アフィン Hecke 環 $DH(W_S)$ の上の反対合 ϕ であって以下の条件を満たすものが存在する.

$$\phi(x^\lambda) = Y^{-\lambda}, \quad \phi(Y^\mu) = x^{-\mu}, \quad \phi(T_i) = T_i \ (i = 1, \ldots, n-1) \tag{3.34}$$

S_i^x $(i = 1, \ldots, n-1)$ を ϕ で反転させる.

$$S_i^Y = T_i + \varphi^+(Y^{-\alpha_i}) = T_i^{-1} + \varphi^-(Y^{-\alpha_i}) \tag{3.35}$$

3.6 Ram-Yip の公式

2 章の記号を踏襲すると, 次のようになる.

定理 3.3 (A_{n-1} 型の Ram-Yip の公式 (2011)) $0 = (0, 0, \ldots, 0) \in P^\vee$ とする. $\lambda \in P^\vee$ に対して, $\lambda = w(0)$ なる $w \in \widetilde{W}_S$ をとる. $w = s_{i_1} \cdots s_{i_p} u = \tau(\lambda) v$ $(u \in \Omega,\ v \in R)$ と表示したとき次が成り立つ.

$$\mathrm{Const}.E_\lambda(x) = S_w^Y E_0(x) = \sum_{I \subseteq \{1, \ldots, p\}} x^{\lambda_I} (t^{-\frac{1}{2}})^{\ell(v_I)} \prod_{k \notin I} \varphi^{\epsilon'(s_{I_k}(\alpha_k))}(q^{m_k} t^{\langle -\gamma_k, \rho \rangle}) \tag{3.36}$$

4　BC_n 型の Ram-Yip 公式

ここでは第２章の結果 (Ram-Yip の公式) を $(C^\vee, C)$ の場合に拡張できることを説明する.

4.1　ルート系の設定

$\mathbb{K} = \mathbb{Q}(q^{\frac{1}{2}}, t^{\frac{1}{2}}, t_0^{\frac{1}{2}}, t_n^{\frac{1}{2}}, u_0^{\frac{1}{2}}, u_n^{\frac{1}{2}})$ とする. $R_+ := \{\epsilon_i \pm \epsilon_j \mid 1 \le i < j \le n\} \cup \{2\epsilon_k \mid 1 \le k \le n\}$ で $R := R_+ \cup (-R_+)$ を定義する. 単純ルートを $\alpha_i = \epsilon_i - \epsilon_{i+1}$ $(1 \le i \le n-1)$, $\alpha_n = 2\epsilon_n$ とし, 基本ウェイトを $\omega_i = \epsilon_1 + \cdots + \epsilon_i \quad (i = 1, \ldots, n)$ と定める.

$$Q = \mathbb{Z}\alpha_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}\alpha_n \subset \ P = \mathbb{Z}\omega_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}\omega_n \tag{4.1}$$
$$Q^\vee = \mathbb{Z}\alpha_1^\vee \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}\alpha_n^\vee \subset P^\vee = \mathbb{Z}\omega_1^\vee \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}\omega_n^\vee \tag{4.2}$$

余ルート格子と余ウェイト格子は次で定めた.

$$\begin{cases} \alpha_1^\vee = \epsilon_1 - \epsilon_2 \\ \alpha_2^\vee = \epsilon_2 - \epsilon_3 \\ \vdots \\ \alpha_{n-1}^\vee = \epsilon_{n-1} - \epsilon_n \\ \alpha_n^\vee = \frac{1}{2}\epsilon_n \end{cases} \qquad \begin{cases} \omega_1^\vee = \epsilon_1 \\ \omega_2^\vee = \epsilon_1 + \epsilon_2 \\ \vdots \\ \omega_{n-1}^\vee = \epsilon_1 + \cdots + \epsilon_{n-1} \\ \omega_n^\vee = \frac{1}{2}(\epsilon_1 + \cdots + \epsilon_n) \end{cases} \tag{4.3}$$

$(\cdot|\cdot)$ を $U := P \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{K}$ 上の対称内積 (非退化な双線型形式) とする. また $V := P^\vee \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{K}$ 上に $\mathbb{K}$ 双線型形式 $\langle \cdot, \cdot \rangle :\ V \times U \to \mathbb{K}$ が与えられているとする. このとき $\langle \cdot, \cdot \rangle : P^\vee \times P \to \mathbb{Q}$ において,

$$Q^\vee \times P \to \mathbb{Z}, \quad \langle \alpha_i^\vee, \omega_j \rangle = \delta_{i,j} \tag{4.4}$$
$$P^\vee \times Q \to \mathbb{Z}, \quad \langle \omega_j^\vee, \alpha_j \rangle = \delta_{i,j} \tag{4.5}$$

が成り立つ.

アフィンルートを $\alpha_0 = \delta - 2\epsilon_1$ でとる. δ は零ルート. V を拡大した $\widetilde{V} = V \oplus \mathbb{K}\delta$ を考え, $\lambda \in V$ に対して $(\delta|\lambda) = (\lambda|\delta) = 0, \quad (\delta|\delta) = 0$ とする. アフィンルート系 S は次のようになる.

$$S = \{\pm\epsilon_i + \frac{k}{2}\delta, \pm 2\epsilon_i + k\delta | k \in \mathbb{Z},\ i = 1, \ldots, n\} \cup \{\pm\epsilon_i \pm \epsilon_j + k\delta | k \in \mathbb{Z}, 1 \le i < j \le n\}$$

4.2　アフィン Weyl 群

$s_0, s_1, \ldots, s_n$ を次で定める.

$$s_0(\epsilon_j) = \begin{cases} \delta - \epsilon_1 & (j = 1) \\ \epsilon_j & (j \ne 1) \end{cases}, \qquad s_i(\epsilon_j) = \begin{cases} \epsilon_{i+1} & (j = i) \\ \epsilon_i & (j = i+1) \\ \epsilon_j & (j \ne i, i+1) \end{cases}, \qquad s_n(\epsilon_j) = \begin{cases} -\epsilon_n & (j = n) \\ \epsilon_j & (j \ne n) \end{cases}$$

これらで生成される群 $W = \langle s_0, s_1, \ldots, s_n \rangle$ をアフィン Weyl 群と呼ぶ. また $W_0 = \langle s_1, \ldots, s_n \rangle$ を有限 Weyl 群と呼ぶ. W は次の関係式を満たす.

$$\begin{aligned} s_i^2 &= 1 && (i = 0, 1, \ldots, n) && (4.6) \\ s_i s_j &= s_j s_i && (|i-j| > 1) && (4.7) \\ s_i s_{i+1} s_i &= s_{i+1} s_i s_{i+1} && (i = 1, \ldots, n-2) && (4.8) \\ s_i s_{i+1} s_i s_{i+1} &= s_{i+1} s_i s_{i+1} s_i && (i = 0, n-1) && (4.9) \end{aligned}$$

また $W = \tau(Q^\vee) \rtimes W_0 = \tau(P) \rtimes W_0$ という表示もできる. ここでの $\tau(\mu) \quad (\mu \in V)$ は $f \in \widetilde{V}$ に対して $\tau(\mu)(f) = f + \langle \mu, f \rangle \delta$ で定義される作用素で $\tau(Q^\vee) = \tau(P) = \{\tau(\mu) \mid \mu \in P(= Q^\vee)\}$ である. $w \in W, \tau(\mu) \in \tau(P)$ に対して

$$\begin{aligned} w\tau(\mu)w^{-1}(f) &= w(w^{-1}(f) + \langle \mu, w^{-1}(f) \rangle \delta) && (4.10) \\ &= f + \langle w\mu, f \rangle \delta = \tau(w\mu)(f) && (4.11) \end{aligned}$$

である. 次の最短表示 $\tau(\epsilon_1) = s_1 \ldots s_{n-1} s_n s_{n-1} \ldots s_0$ により

$$\tau(\epsilon_i) = s_i \ldots s_{n-1} s_n s_{n-1} \ldots s_0 s_1 \ldots s_{i-1} \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{4.12}$$

が得られる.

4.3 アフィン Hecke 環

アフィン Hecke 環 $H(W)$ は $T_0, T_1, \ldots, T_n$ で生成され以下の関係式で定義される $\mathbb{K}$ 代数である.

$$\begin{aligned} (T_i - t_i)(T_i + t_i^{-1}) &= 0 && (i = 0, 1, \ldots, n) && (4.13) \\ T_i T_j &= T_j T_i && (|i-j| > 1, (i,j) \notin \{(n,0),(0,n)\}) && (4.14) \\ T_i T_{i+1} T_i &= T_{i+1} T_i T_{i+1} && (i = 1, \ldots, n-2) && (4.15) \\ T_i T_{i+1} T_i T_{i+1} &= T_{i+1} T_i T_{i+1} T_i && (i = 0, n-1) && (4.16) \end{aligned}$$

また, $\tau(\epsilon_i)$ たちをアフィン Hecke 環 $H(W)$ 上に次のように実現する.

$$\begin{aligned} Y_1 &= T_1 \cdots T_{n-1} T_n \cdots T_0 && (4.17) \\ Y_2 &= T_2 \cdots T_{n-1} T_n \cdots T_0 T_1^{-1} && (4.18) \\ &\vdots && (4.19) \\ Y_i &= T_i \cdots T_{n-1} T_n \cdots T_0 T_1^{-1} \cdots T_{i-1}^{-1} && (4.20) \\ &\vdots && (4.21) \\ Y_n &= T_n \cdots T_0 T_1^{-1} \cdots T_{n-1}^{-1} && (4.22) \end{aligned}$$

以上を **Dunkl 作用素**という. $H(W)$ の関係式から Y_i たちは互いに可換であることがわかる.

4.4 Noumi 表現と非対称 Koornwinder 多項式

$$T_i = t_i^{\frac{1}{2}} + t_i^{-\frac{1}{2}} \frac{1 - t_i x_i / x_{i+1}}{1 - x_i / x_{i+1}} (s_i - 1). \quad (i = 1, \dots, n-1) \tag{4.23}$$

$$T_0 = t_0^{\frac{1}{2}} + t_0^{-\frac{1}{2}} \frac{(1 - u_0^{\frac{1}{2}} t_0^{\frac{1}{2}} q^{\frac{1}{2}} x_1^{-1})(1 + u_0^{-\frac{1}{2}} t_0^{\frac{1}{2}} q^{\frac{1}{2}} x_1^{-1})}{1 - q x_1^{-2}} (s_0 - 1). \tag{4.24}$$

$$T_n = t_n^{\frac{1}{2}} + t_n^{-\frac{1}{2}} \frac{(1 - u_n^{\frac{1}{2}} t_n^{\frac{1}{2}} x_n)(1 + u_n^{-\frac{1}{2}} t_n^{\frac{1}{2}} x_n)}{1 - x_n^2} (s_n - 1). \tag{4.25}$$

としたときこれは W つきの q 差分作用素環 $\mathcal{D}_{q,x}[W] = \bigoplus_{w \in W} \mathcal{D}_{q,x} w$ の上の $H(W)$ の表現を与えている．$u_i = \begin{cases} 1 \quad (i = 1, \dots, n-1) \\ u_0 \quad (i = 0) \\ u_n \quad (i = n) \end{cases}$, $x^{\alpha_i} = \begin{cases} x_i / x_{i+1} \quad (i = 1, \dots, n-1) \\ q x_1^{-2} \quad (i = 0) \\ x_n^2 \quad (i = n) \end{cases}$ とすれば,

$$T_i = t_i^{\frac{1}{2}} + t_i^{-\frac{1}{2}} \frac{(1 - u_i^{\frac{1}{2}} t_i^{\frac{1}{2}} x^{\frac{\alpha_i}{2}})(1 + u_i^{-\frac{1}{2}} t_i^{\frac{1}{2}} x^{\frac{\alpha_i}{2}})}{1 - x^{\alpha_i}} (s_i - 1) \tag{4.26}$$

$$= t_i^{\frac{1}{2}} + c_i(x^{\alpha_i})(s_i - 1) \tag{4.27}$$

$$= t_i^{\frac{1}{2}} s_i + d_i(x^{\alpha_i})(1 - s_i) \tag{4.28}$$

と共通にかける．また三角函数の乗法的な記号

$$\langle z \rangle = z^{\frac{1}{2}} - z^{-\frac{1}{2}} = 2\sqrt{-1} \sin(\pi \zeta) \quad (z = e(\zeta) = e^{2\pi\sqrt{-1}} \zeta) \tag{4.29}$$

を使えば,

$$c_i(z) = \frac{\langle t_i z \rangle + \langle u_i \rangle}{\langle z \rangle} \tag{4.30}$$

とかける．さらに

$$d_i(z) = t_i^{\frac{1}{2}} - c_i(z) = \frac{t_i^{\frac{1}{2}} \langle z \rangle - \langle t_i z \rangle - \langle u_i \rangle}{\langle z \rangle} \tag{4.31}$$

$$= \frac{-z^{-\frac{1}{2}} \langle t_i \rangle - \langle u_i \rangle}{\langle z \rangle} \tag{4.32}$$

を用いると, $T_i = c_i(x^{\alpha_i}) s_i + d_i(x^{\alpha_i})$ ともかける．

これから Y_i の単項式 x^λ, $\lambda \in P$ への作用を計算する．これまでと同様に R 作用素の計算から始める．

$$R(\alpha) = c_i(x^\alpha) + d_i(x^\alpha) s_\alpha = t_i^{\frac{1}{2}} + d_i(x^\alpha)(s_\alpha - 1), \quad \alpha \in W.\alpha_i \tag{4.33}$$

$\lambda \in P$ に対して $\ell = \langle \alpha^\vee, \lambda \rangle$ とおき, $\ell \geq 0,\ \ell = 0,\ \ell < 0$ の 3 つの場合に分けて計算する.

$$
\begin{aligned}
\ell \geq 0 \qquad R(\alpha)(x^\lambda) &= t_i^{\frac{1}{2}} x^\lambda + d_i(x^\alpha)(x^{\lambda-\ell\alpha} - x^\lambda) \\
&= t_i^{\frac{1}{2}} x^\lambda + x^{\lambda-\ell\alpha} \frac{-x^{-\frac{\alpha}{2}}\langle t_i \rangle - \langle u_i \rangle}{\langle x^\alpha \rangle}(1 - x^{\ell\alpha}) \\
&= t_i^{\frac{1}{2}} x^\lambda + x^{\lambda-\ell\alpha}(\langle t_i \rangle + x^{\frac{\alpha}{2}}\langle u_i \rangle)(1 + x^\alpha + \cdots + x^{(\ell-1)\alpha}) \\
&= t_i^{\frac{1}{2}} x^\lambda + \langle t_i \rangle (x^{\lambda-\ell\alpha} + x^{\lambda-(\ell-1)\alpha} + \cdots + x^{\lambda-\alpha}) \\
&\qquad\qquad + \langle u_i \rangle (x^{\lambda-\frac{1}{2}(2\ell-1)\alpha} + x^{\lambda-\frac{1}{2}(2\ell-3)\alpha} + \cdots + x^{\lambda-\frac{1}{2}\alpha}) \\
\ell = 0 \qquad R(\alpha)x^\lambda &= t_i^{\frac{1}{2}} x^\lambda \\
\ell < 0 \qquad R(\alpha)x^\lambda &= t_i^{\frac{1}{2}} x^\lambda + d_i(x^\alpha)(x^{\lambda-\ell\alpha} - x^\lambda) \\
&= t_i^{\frac{1}{2}} x^\lambda + x^\lambda \frac{-x^{-\frac{\alpha}{2}}\langle t_i \rangle - \langle u_i \rangle}{\langle x^\alpha \rangle}(x^{-\ell\alpha} - 1) \\
&= t_i^{-\frac{1}{2}} x^\lambda - \langle t_i \rangle (x^{\lambda+\alpha} + \cdots + x^{\lambda-(\ell+1)\alpha}) - \langle u_i \rangle (x^{\lambda+\frac{\alpha}{2}} + \cdots + x^{\lambda-\frac{1}{2}(2\ell+1)\alpha})
\end{aligned}
$$

以上の計算から $R(\alpha)$ の Laurent 多項式環への作用は順序 $\succcurlyeq$ に関して三角性をもつことがわかる. $\lambda \in P$ に対して

$$
\begin{aligned}
Y_i(x^\lambda) &= T_i \cdots T_{n-1} T_n \cdots T_0 T_1^{-1} \cdots T_{i-1}^{-1}(x^\lambda) \\
&= R(\alpha_i) s_i \cdots R(\alpha_{n-1}) s_{n-1} R(\alpha_n) s_n \cdots R(\alpha_0) s_0 R(\alpha_1)^{-1} s_1 \cdots R(\alpha_{i-1})^{-1} s_{i-1} \\
&= R(\epsilon_i - \epsilon_{i+1}) \cdots R(\epsilon_i - \epsilon_n) R(2\epsilon_i) R(\epsilon_n + \epsilon_i) \cdots R(\epsilon_1 + \epsilon_i) \\
&\qquad\qquad R(\delta + 2\epsilon_i)\tau(\epsilon_i) R(\epsilon_1 - \epsilon_i)^{-1} \cdots R(\epsilon_{i-1} - \epsilon_i)^{-1}(x^\lambda) \\
&= q^{\lambda_i} t_0^{\rho_\ell(\lambda)_i} t_n^{\rho_\ell(\lambda)_i} t^{\rho_s(\lambda)_i} x^\lambda + (\succcurlyeq \text{ に関して低い項}) \\
&= \eta_\lambda^i x^\lambda + (\succcurlyeq \text{ に関して低い項})
\end{aligned}
$$

と計算できる. 但し

$$
R_+ = R_+^\ell \ \sqcup\ R_+^s = \{\alpha \in R_+ \mid \langle \alpha, \alpha \rangle = 4\} \ \sqcup\ \{\alpha \in R_+ \mid \langle \alpha, \alpha \rangle = 2\} \tag{4.34}
$$

で, $\lambda \in P$ に対して, $\rho_\ell(\lambda),\ \rho_s(\lambda)$ を

$$
\rho_\ell(\lambda) = \sum_{\alpha \in R_+^\ell} \varepsilon(\langle \alpha^\vee, \lambda \rangle)\alpha, \quad \rho_s(\lambda) = \sum_{\alpha \in R_+^s} \varepsilon(\langle \alpha^\vee, \lambda \rangle)\alpha \tag{4.35}
$$

と定義する. 符号は $\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & (x \geq 0) \\ -\frac{1}{2} & (x < 0) \end{cases}$ としている. また, $\mu \in P^\vee$ に対して

$$
\eta_\lambda^\mu = q^{\langle \mu, \lambda \rangle}(t_0 t_n)^{\langle \mu, \rho_\ell(\lambda) \rangle} t^{\langle \mu, t^{\rho_s(\lambda)} \rangle} \tag{4.36}
$$

とすれば, η_λ^i は $\eta_\lambda^{\epsilon_i}$ と書き直せる.

定理 4.1 Laurent 多項式環 $\mathbb{K}[x^{\pm 1}] = \mathbb{K}[x^P]$ の $\mathbb{K}$ 基底 $\{E_\lambda(x)\}_{\lambda \in P}$ で次の条件を満たすものがただ一つ存在する．

(1) $E_\lambda(x) = x^\lambda + \sum_{\lambda \succ \mu} C_{\lambda,\mu} x^\mu$

(2) $f(Y)E_\lambda(x) = E_\lambda(x) f(\eta_\lambda)$.

但し，$\eta_\lambda = (q^{\lambda_1}(t_0 t_n)^{\rho_\ell(\lambda)_1} t^{\rho_s(\lambda)_1}, \ldots, q^{\lambda_n}(t_0 t_n)^{\rho_\ell(\lambda)_n} t^{\rho_s(\lambda)_n}) \in \mathbb{K}^n$ とする．

定理の $E_\lambda(x)$ を**非対称 Koornwinder 多項式**という．

4.5 二重アフィン Hecke 環

単項式 x^λ と T_i の交換関係をみる．一般の $f(x) \in \mathbb{K}[x^{\pm 1}]$ に対して

$$
\begin{aligned}
&T_i x^\lambda f(x) - x^{s_i\lambda} T_i f(x) \\
&= (c_i(x^{\alpha_i}) s_i + d_i(x^{\alpha_i})) x^\lambda f(x) - x^{s_i\lambda}(c_i(x^{\alpha_i}) s_i + d_i(x^{\alpha_i})) f(x) \\
&= c_i(x^{\alpha_i}) x^{s_i\lambda} s_i(f(x)) + d_i(x^{\alpha_i}) x^\lambda f(x) - x^{s_i\lambda} c_i(x^{\alpha_i}) s_i(f(x)) - x^{s_i\lambda} d_i(x^{\alpha_i}) f(x) \\
&= d_i(x^{\alpha_i})(x^\lambda - x^{s_i\lambda}) f(x)
\end{aligned}
$$

である．したがって作用素としては

$$
T_i x^\lambda - x^{s_i\lambda} T_i = d_i(x^{\alpha_i})(x^\lambda - x^{s_i\lambda}) \tag{4.37}
$$

である．これを **Lusztig 関係式**という．

特に T_i と x_i の交換関係を Lusztig 関係式から考察する．

$$
\begin{aligned}
T_1 x_1 - x_2 T_1 = d_1(x_1/x_2)(x_1 - x_2) &= \frac{-(x_1/x_2)^{-\frac{1}{2}}(t_1^{\frac{1}{2}} - t_1^{-\frac{1}{2}})}{(x_1/x_2)^{\frac{1}{2}} - (x_1/x_2)^{-\frac{1}{2}}}(x_1 - x_2) \\
&= -x_2(t_1^{\frac{1}{2}} - t_1^{-\frac{1}{2}}) \\
T_1 x_1 &= x_2 T_1 - x_2(t_1^{\frac{1}{2}} - t_1^{-\frac{1}{2}}) = x_2(T_1 - \langle t_1 \rangle) = x_2 T_1^{-1} \\
T_1 x_1 T_1 &= x_2
\end{aligned}
$$

同様の計算で $i = 1, \ldots, n-1$ で $T_i x_i T_i = x_{i+1}$ が成り立つ．T_n と x_n の関係をみる．

$$
\begin{aligned}
T_n x_n - x_n^{-1} T_n &= d_n(x_n^2)(x_n - x_n^{-1}) \\
&= -x_n^{-1}\langle t_n \rangle - \langle u_n \rangle \\
T_n x_n &= x_n^{-1}(T_n - \langle t_n \rangle) - \langle u_n \rangle \\
T_n x_n &= x_n^{-1} T_n^{-1} - \langle u_n \rangle
\end{aligned}
$$

T_0 と x_1 もみる.

$$\begin{aligned}
T_0x_1 - qx_1^{-1}T_0 &= \frac{-q^{-\frac{1}{2}}x_1\langle t_0\rangle - \langle u_0\rangle}{\langle qx_1^{-2}\rangle}(x_1 - qx_1^{-1}) \\
&= \frac{-q^{-\frac{1}{2}}x_1\langle t_0\rangle - \langle u_0\rangle}{q^{\frac{1}{2}}x_1^{-1} - q^{-\frac{1}{2}}x_1}(x_1 - qx_1^{-1}) \\
&= \frac{-q^{-\frac{1}{2}}x_1\langle t_0\rangle - \langle u_0\rangle}{q^{-\frac{1}{2}}(qx_1^{-1} - x_1)}(x_1 - qx_1^{-1}) \\
&= x_1\langle t_0\rangle + q^{\frac{1}{2}}\langle u_0\rangle \\
q^{\frac{1}{2}}(T_0q^{-\frac{1}{2}}x_1 - q^{\frac{1}{2}}x_1^{-1}T_0) &= q^{\frac{1}{2}}(q^{-\frac{1}{2}}x_1\langle t_0\rangle + \langle u_0\rangle) \\
q^{\frac{1}{2}}x_1^{-1}T_0 &= (T_0 - \langle t_0\rangle)q^{-\frac{1}{2}}x_1 - \langle u_0\rangle \\
q^{\frac{1}{2}}x_1^{-1}T_0 &= T_0^{-1}q^{-\frac{1}{2}}x_1 - \langle u_0\rangle
\end{aligned}$$

$DH(W) = \mathbb{K}[x^P] \otimes_{\mathbb{K}} H(W_0) \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{K}[Y^{P^\vee}]$ を二重アフィン Hecke 環 (DAHA) という. DAHA には次で決まる反対合が存在する.

$$\phi(x_i) = Y_i^{-1} \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{4.38}$$

$$\phi(Y_i) = x_i^{-1} \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{4.39}$$

$$\phi(T_i) = T_i \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{4.40}$$

$$\phi(u_n) = t_0, \quad \phi(t_0) = u_n \tag{4.41}$$

Lusztig 関係式から得られた T_i と x_i の関係式に ϕ を施してみる.

$$\phi(T_ix_iT_i) = \phi(x_{i+1}) \tag{4.42}$$

$$T_iY_i^{-1}T_i = Y_{i+1}^{-1} \quad (i = 1, \ldots, n-1) \tag{4.43}$$

$$\tag{4.44}$$

$$\phi(T_nx_n) = \phi(x_n^{-1}T_n^{-1} - \langle u_n\rangle) \tag{4.45}$$

$$Y_n^{-1}T_n = T_n^{-1}Y_n - \langle t_0\rangle \tag{4.46}$$

4.6 Ram-Yip の公式

$i \in \{0, 1, \ldots, n\}$ に対して

$$S_i^x = T_i + \varphi_i^+(x^{\alpha_i}) = T_i^{-1} + \varphi_i^-(x^{\alpha_i}) \tag{4.47}$$

とする. 但し

$$\varphi_i^{\pm}(z) = \frac{z^{\mp\frac{1}{2}}\langle t_i\rangle + \langle u_i\rangle}{\langle z\rangle} \tag{4.48}$$

という記号を用いた. S_i^x は Lusztig の関係式から

$$S_i^x x^\lambda = x^{s_i(\lambda)}S_i^x \quad (\lambda \in P) \tag{4.49}$$

を満たす. S_i^x を ϕ で反転する.

$$\begin{aligned}\phi(T_0) &= \phi(T_1^{-1}\cdots T_n^{-1}T_{n-1}^{-1}\cdots T_1^{-1}Y_1) &(4.50)\\ &= x_1^{-1}T_1^{-1}\cdots T_n^{-1}T_{n-1}^{-1}\cdots T_1^{-1} &(4.51)\end{aligned}$$

に注意する.

$$\begin{aligned}S_i^Y &= T_i+\psi_i^+(Y^{-\alpha_i}) = T_i^{-1}+\psi_i^-(Y^{-\alpha_i}) \quad (i=1,\ldots,n) &(4.52)\\ S_0^Y &= \phi(T_0)+\psi_0^+(qY_1^2) = \phi(T_0)^{-1}+\psi_0(qY_1^2) &(4.53)\end{aligned}$$

但し,

$$\begin{aligned}\psi_i^\pm(z) &= \varphi_i^{\pm 1}(z) \quad (i=1,\ldots,n-1) &(4.54)\\ \psi_0^\pm(z) &= \frac{z^{\mp\frac{1}{2}}\langle u_n\rangle+\langle u_0\rangle}{\langle z\rangle} &(4.55)\\ \psi_n^\pm(z) &= \frac{z^{\mp\frac{1}{2}}\langle t_n\rangle+\langle t_0\rangle}{\langle z\rangle} &(4.56)\end{aligned}$$

である. 2 章のとき同様に S_i^Y $(i=1,\ldots,n)$ は非対称 Koornwinder 多項式 $E_\lambda(x)$ に対し

$$S_i^Y E_\lambda(x) = \mathrm{Const}.E_{s_i\lambda}(x) \tag{4.57}$$

となる. 次に $\mathrm{Const}=C$ を計算する.

$$S_i^Y E_\lambda(x) = (T_i+\psi_i^+(Y^{-\alpha_i}))E_\lambda(x) = T_iE_\lambda(x)+\psi_i^+(\eta_\lambda^{-\alpha^\vee})E_\lambda(x) = C.E_{s_i\lambda}(x) \tag{4.58}$$

であるから

$$\begin{aligned}T_iE_\lambda(x) &= -\psi_i^+(\eta_\lambda^{-\alpha_i^\vee})E_\lambda(x)+C.E_{s_i\lambda}(x) &(4.59)\\ &= \alpha_\lambda E_\lambda+\beta_\lambda E_{s_i\lambda}(x) &(4.60)\end{aligned}$$

となって, β_λ を計算すればよいことがわかる. $\ell=\langle\alpha_i^\vee,\lambda\rangle$ とおき, $\ell>0,\ \ell=0,\ \ell<0$ の 3 つの場合に分けて計算する.

- $\ell=0$ のときは $T_iE_\lambda(x)=t_i^{\frac{1}{2}}E_{s_i\lambda}(x)$ であることが容易に従う.
- $\ell<0$ とする. $\lambda-s_i\lambda=\lambda-(\lambda-\ell\alpha_i)=\ell\alpha_i<0$ より $E_\lambda(x)$ には $x^{s_i\lambda}$ の項は含まれないことから $T_i(x^\lambda)$ の $x^{s_i\lambda}$ の係数が β_λ になることがわかる.

$$T_i(x^\lambda) = R(\alpha_i)s_i(x^\lambda) = R(\alpha_i)(x^{s_i\lambda}) = t_i^{\frac{1}{2}}x^{s_i\lambda}+(\text{低位の項たち}) \tag{4.61}$$

したがって, $\beta_\lambda=t_i^{\frac{1}{2}}$ となる.

- $\ell>0$ とする. (4.60) の両辺に T_i を作用させる.

$$\begin{aligned}T_i^2E_\lambda(x) &= \alpha_\lambda T_iE_\lambda(x)+\beta_\lambda T_iE_{s_i\lambda}(x)\\ ((t_i^{\frac{1}{2}}-t_i^{-\frac{1}{2}})T_i+1)E_\lambda(x) &= \alpha_\lambda(\alpha_\lambda E_\lambda(x)+\beta_\lambda E_{s_i\lambda}(x))+\beta_\lambda(\alpha_{s_i\lambda}E_{s_i\lambda}(x)+\beta_{s_i\lambda}E_\lambda(x))\\ (-\alpha_\lambda^2+(t_i^{\frac{1}{2}}-t_i^{-\frac{1}{2}})\alpha_\lambda+1-\beta_\lambda\beta_{s_i\lambda})E_\lambda(x) &= (\alpha_\lambda\beta_\lambda+\alpha_{s_i\lambda}\beta_\lambda-(t_i^{\frac{1}{2}}-t_i^{-\frac{1}{2}})\beta_\lambda)E_{s_i\lambda}(x)\end{aligned}$$

以上から関係式

$$\beta_\lambda \beta_{s_i\lambda} = (t_i^{\frac{1}{2}} - \alpha_\lambda)(t_i^{-\frac{1}{2}} + \alpha_\lambda) \tag{4.62}$$

が得られる．$\beta_{s_i\lambda} = t_i^{\frac{1}{2}}$, $\alpha_\lambda = -\psi_i^+(\eta_\lambda^{-\alpha_i^\vee})$ で, 特に $i = 1, \ldots, n-1$ のときは

$$\alpha_\lambda = -\varphi^+(\eta_\lambda^{-\alpha_i^\vee}) = \frac{t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}}}{1 - \eta_\lambda^{-\alpha_i^\vee}} \tag{4.63}$$

であるから 2 章と同様の計算で

$$\beta_\lambda = t^{-\frac{3}{2}} \frac{(1 - t\eta_\lambda^{\alpha_i^\vee})(1 - t\eta_\lambda^{-\alpha_i^\vee})}{(1 - \eta_\lambda^{\alpha_i^\vee})(1 - \eta_\lambda^{-\alpha_i^\vee})} \tag{4.64}$$

となる．$i = n$ のときは

$$\alpha_\lambda = -\psi_n^+(\eta_\lambda^{-\alpha_n^\vee}) = -\frac{\eta_\lambda^{\frac{\alpha_n^\vee}{2}} \langle t_n \rangle + \langle t_0 \rangle}{\langle \eta_\lambda^{-\alpha_n^\vee} \rangle} = \frac{\langle t_n \rangle + \eta_\lambda^{-\frac{\alpha_n^\vee}{2}} \langle t_0 \rangle}{1 - \eta_\lambda^{-\alpha_n^\vee}} \tag{4.65}$$

である．関係式 (4.62) から

$$\begin{aligned}
\beta_\lambda \beta_{s_n\lambda} &= (t_n^{\frac{1}{2}} - \alpha_\lambda)(t_n^{-\frac{1}{2}} + \alpha_\lambda) \\
\beta_\lambda &= t_n^{-\frac{1}{2}} \left(t_n^{\frac{1}{2}} - \frac{\langle t_n \rangle + \eta_\lambda^{-\frac{\alpha_n^\vee}{2}} \langle t_0 \rangle}{1 - \eta_\lambda^{-\alpha_n^\vee}} \right) \left(t_n^{-\frac{1}{2}} + \frac{\langle t_n \rangle + \eta_\lambda^{-\frac{\alpha_n^\vee}{2}} \langle t_0 \rangle}{1 - \eta_\lambda^{-\alpha_n^\vee}} \right) \\
&= t_n^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{t_n^{-\frac{1}{2}} - t_n^{\frac{1}{2}} \eta_\lambda^{-\alpha_n^\vee} - \langle t_0 \rangle \eta_\lambda^{\frac{-\alpha_n^\vee}{2}}}{1 - \eta_\lambda^{-\alpha_n^\vee}} \right) \left(\frac{t_n^{\frac{1}{2}} - t_n^{-\frac{1}{2}} \eta_\lambda^{-\alpha_n^\vee} + \langle t_0 \rangle \eta_\lambda^{\frac{-\alpha_n^\vee}{2}}}{1 - \eta_\lambda^{-\alpha_n^\vee}} \right) \\
&= t_n^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{t_n^{-\frac{1}{2}} - t_n^{\frac{1}{2}} \eta_\lambda^{-\alpha_n^\vee} - \langle t_0 \rangle \eta_\lambda^{\frac{-\alpha_n^\vee}{2}}}{1 - \eta_\lambda^{-\alpha_n^\vee}} \right) \left(\frac{t_n^{-\frac{1}{2}} - t_n^{\frac{1}{2}} \eta_\lambda^{\alpha_n^\vee} - \langle t_0 \rangle \eta_\lambda^{\frac{\alpha_n^\vee}{2}}}{1 - \eta_\lambda^{\alpha_n^\vee}} \right) \\
&= t_n^{-\frac{1}{2}} \frac{(\eta_\lambda^{-\frac{\alpha_n^\vee}{2}} \langle t_n \eta_\lambda^{-\alpha_n^\vee} \rangle + \eta_\lambda^{-\frac{\alpha_n^\vee}{2}} \langle t_0 \rangle)(\eta_\lambda^{\frac{\alpha_n^\vee}{2}} \langle t_n \eta_\lambda^{\alpha_n^\vee} \rangle + \eta_\lambda^{\frac{\alpha_n^\vee}{2}} \langle t_0 \rangle)}{(1 - \eta_\lambda^{-\alpha_n^\vee})(1 - \eta_\lambda^{\alpha_n^\vee})} \\
&= t_n^{-\frac{1}{2}} \frac{(\langle t_n \eta_\lambda^{-\alpha_n^\vee} \rangle + \langle t_0 \rangle)(\langle t_n \eta_\lambda^{\alpha_n^\vee} \rangle + \langle t_0 \rangle)}{(1 - \eta_\lambda^{-\alpha_n^\vee})(1 - \eta_\lambda^{\alpha_n^\vee})}
\end{aligned}$$

となり計算できた．纏めると次のようになる．

補題 4.1 S_i^Y $(i = 1, \ldots, n)$ と $\lambda \in P$ に対して

$$S_i^Y E_\lambda(x) = \begin{cases} t^{-\frac{3}{2}} \frac{(1 - t\eta_\lambda^{\alpha_i^\vee})(1 - t\eta_\lambda^{-\alpha_i^\vee})}{(1 - \eta_\lambda^{\alpha_i^\vee})(1 - \eta_\lambda^{-\alpha_i^\vee})} E_{s_i\lambda}(x) & (\ell > 0, i = 1, \ldots, n-1) \\ t_n^{-\frac{1}{2}} \frac{(\langle t_n \eta_\lambda^{-\alpha_n^\vee} \rangle + \langle t_0 \rangle)(\langle t_n \eta_\lambda^{\alpha_n^\vee} \rangle + \langle t_0 \rangle)}{(1 - \eta_\lambda^{-\alpha_n^\vee})(1 - \eta_\lambda^{\alpha_n^\vee})} E_{s_n\lambda}(x) & (\ell > 0,\ i = n) \\ t_i^{\frac{1}{2}} E_{s_i\lambda}(x) & (\ell < 0) \end{cases} \tag{4.66}$$

$w = s_{i_1} \cdots s_{i_p} = \tau(\mu)v \in W$ に対して,

$$S^x_{i_p} \cdots S^x_{i_1} = \sum_{I \subseteq \{1,\ldots,p\}} \prod_{k \notin I} \varphi_{i_k}^{\epsilon'(s_{I_k}(\alpha_k))}(x^{\beta'_k}) T_{v_I}^{-1} Y^{-\mu_I} \tag{4.67}$$

とかける. 但し, $I = \{k_1, \ldots, k_\ell\} \subseteq \{1, \ldots, p\}$ に対して

$$w_I = s_{i_{k_1}} \cdots s_{i_{k_\ell}} = \tau(\mu_I)v_I \quad (v_I \in W_0,\ \mu_I \in P^\vee,\ k_1 < \cdots < k_\ell) \tag{4.68}$$

という記号を用いた. (4.67) を ϕ で反転させる. $k = 1, \ldots, p$ に対して

$$\beta'_k = \gamma_k + m_k\delta\ (\gamma_k \in R, m_k \in \mathbb{Z}) \tag{4.69}$$

という記号を使う.

$$S^Y_w = S^Y_{i_1} \cdots S^Y_{i_p} = \sum_{I \subseteq \{1,\ldots,p\}} x^{\mu_I} T_{v_I} \prod_{k \notin I} \psi_{i_k}^{\epsilon'(s_{I_k}(\alpha_k))}(q^{m_k} Y^{-\gamma_k}) \tag{4.70}$$

定理 4.2 $0 = (0, 0, \ldots, 0) \in P^\vee$ とする. $\lambda \in P^\vee$ に対して, $\lambda = w(0)$ なる $w \in W$ をとる. $w = s_{i_1} \cdots s_{i_p} u = \tau(\lambda)v$ $(u \in \Omega,\ v \in W_0)$ としたとき次が成り立つ.

$$\mathrm{Const.}E_\lambda(x) = S^Y_w E_0(x) = \sum_{I \subseteq \{1,\ldots,p\}} x^{\mu_I} t_{v_I}^{-\frac{1}{2}} \prod_{k \notin I} \psi_{i_k}^{\epsilon'(s_{I_k}(\alpha_k))}(q^{m_k}(t_0 t_n)^{\langle -\gamma_k, \rho_\ell \rangle} t^{\langle -\gamma_k, \rho_s \rangle}) \tag{4.71}$$

但し, $t_v = \prod_{\alpha \in S_v} t_\alpha$ という記号を用いた.

5 非対称 Askey-WIlson 多項式の組合せ論的表示

5.1 ルート系の設定

$R = \{\pm\epsilon_1\} \cup \{\pm 2\epsilon_1\},\ S = \{\pm\epsilon_1 + \frac{k}{2}\delta, \pm 2\epsilon_1 + k\delta | k \in \mathbb{Z}\}$ とし, $\alpha_0 = \delta - 2\epsilon_1,\ \alpha_1 = 2\epsilon_1 \in S$ とする.

$$s_0(\epsilon_1) = \delta - \epsilon_1,\ s_1(\epsilon_1) = -\epsilon_1 \tag{5.1}$$

として s_0, s_1 が生成する群 $\mathcal{W} = \langle s_0, s_1 \rangle$ をアフィン Weyl 群という. $x^{\epsilon_1} = x$ とする. このとき $m \in \mathbb{Z}$ に対して

$$s_1(x^m) = x^{-m}, \qquad s_0(x^m) = q^m x^{-m} \tag{5.2}$$

$s_1 s_0$ を ϵ_1 にあてると,

$$s_1 s_0(\epsilon_1) = s_1(\delta - \epsilon_1) = \delta + \epsilon_1 \tag{5.3}$$

で丁度 x に関する q 差分作用素になっている．つまり $\tau_x = s_1 s_0$ である．次にアフィン Hecke 環 $H(\mathcal{W}) = \langle T_0, T_1 \rangle$ で関係式は,

$$(T_i - t_i^{\frac{1}{2}})(T_i + t_i^{-\frac{1}{2}}) = 0. \qquad (i = 0, 1) \tag{5.4}$$

上の関係式から $T_i^{-1} = T_i - \langle t_i \rangle$ とかける．

5.2 Noumi 表現

$\mathcal{A} = \mathbb{K}[x^{\pm 1}]$ とする．$\mathbb{K}$ 代数としての準同型 $\pi : H(\mathcal{W}) \to \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(\mathcal{A})$ を次で定める．

$$\pi(T_0) = t_0^{\frac{1}{2}} + t_0^{-\frac{1}{2}} \frac{(1 - t_0^{\frac{1}{2}} u_0^{\frac{1}{2}} q^{\frac{1}{2}} x^{-1})(1 + t_0^{\frac{1}{2}} u_0^{-\frac{1}{2}} q^{\frac{1}{2}} x^{-1})}{1 - qx^{-2}} (s_0 - 1) \tag{5.5}$$

$$\pi(T_1) = t_1^{\frac{1}{2}} + t_1^{-\frac{1}{2}} \frac{(1 - t_1^{\frac{1}{2}} u_1^{\frac{1}{2}} x)(1 + t_1^{\frac{1}{2}} u_1^{-\frac{1}{2}} x)}{1 - x^2} (s_1 - 1) \tag{5.6}$$

以後, 単に $\pi(T_i) = T_i \quad (i = 0, 1)$ とかく．

$$c_i(z) = \frac{\langle t_i z \rangle + \langle u_i \rangle}{\langle z \rangle} \tag{5.7}$$

$$d_i(z) = \frac{-z^{-\frac{1}{2}} \langle t_i \rangle - \langle u_i \rangle}{\langle z \rangle} \tag{5.8}$$

によって, $T_i = c_i(x^{\alpha_i}) s_i + d_i(x^{\alpha_i}). \quad (i = 0, 1)$ とかける．$c_i(x^{\alpha}),\ d_i(x^{\alpha})$ の関係式も書いておく．

$$c_i(x^{\alpha}) + d_i(x^{\alpha}) = t_i^{\frac{1}{2}} \tag{5.9}$$

$$c_i(x^{\alpha}) + c_i(x^{-\alpha}) = t_i^{\frac{1}{2}} + t_i^{-\frac{1}{2}} \tag{5.10}$$

$$d_i(x^{\alpha}) + d_i(x^{-\alpha}) = \langle t_i \rangle \tag{5.11}$$

$Y := T_1 T_0$ を Dunkl 作用素という．

5.3 二重アフィン Hecke 環の関係式

$DH(\mathcal{W}) = \mathbb{K}[x^{\pm 1}] \otimes_{\mathbb{K}} H(W_0) \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{K}[Y^{\pm 1}]$ を二重アフィン Hecke 環 (DAHA) という．
Lusztig 関係式から従う DAHA の関係式を計算しておく．

$$T_1 x - x^{-1} T_1 = d_1(x^2)(x - x^{-1}) \tag{5.12}$$

$$= \frac{-x^{-1} \langle t_1 \rangle - \langle u_1 \rangle}{\langle x^2 \rangle} \langle x^2 \rangle \tag{5.13}$$

$$= -x^{-1} \langle t_1 \rangle - \langle u_1 \rangle \tag{5.14}$$

$$T_1 x = x^{-1}(T_1 - \langle t_1 \rangle) - \langle u_1 \rangle \tag{5.15}$$

$$T_1 x = x^{-1} T_1^{-1} - \langle u_1 \rangle \tag{5.16}$$

$$
\begin{aligned}
T_0 x - q x^{-1} T_0 &= d_0(q x^{-2})(x - q x^{-1}) && (5.17)\\
T_0 q^{-\frac{1}{2}} x - q^{\frac{1}{2}} x^{-1} T_0 &= q^{-\frac{1}{2}} x \langle t_0 \rangle + \langle u_0 \rangle && (5.18)\\
q^{\frac{1}{2}} x^{-1} T_0 &= (T_0 - \langle t_0 \rangle) q^{-\frac{1}{2}} x - \langle u_0 \rangle && (5.19)\\
q^{\frac{1}{2}} x^{-1} T_0 &= T_0^{-1} q^{-\frac{1}{2}} x - \langle u_0 \rangle && (5.20)
\end{aligned}
$$

T_1 の単項式 x^m への作用をみる.

$$
\begin{aligned}
T_1(x^m) &= t_1^{\frac{1}{2}} x^m + t_1^{-\frac{1}{2}} \frac{(1 - t_1^{\frac{1}{2}} u_1^{\frac{1}{2}} x)(1 + t_1^{\frac{1}{2}} u_1^{-\frac{1}{2}} x)}{1 - x^2} (x^{-m} - x^m)\\
&= t_1^{\frac{1}{2}} x^m + t_1^{-\frac{1}{2}} (1 - t_1^{\frac{1}{2}} u_1^{\frac{1}{2}} x)(1 + t_1^{\frac{1}{2}} u_1^{-\frac{1}{2}} x) \frac{x^{-m} - x^m}{1 - x^2}\\
&= t_1^{\frac{1}{2}} x^m + t_1^{-\frac{1}{2}} (1 - t_1^{\frac{1}{2}} u_1^{\frac{1}{2}} x)(1 + t_1^{\frac{1}{2}} u_1^{-\frac{1}{2}} x) \begin{cases} x^{-m}(1 + x^2 + \cdots + x^{2(m-1)}) & (m > 0)\\ 0 & (m = 0)\\ -x^m(1 + x^2 + \cdots + x^{-2(m+1)}) & (m < 0) \end{cases}\\
&= t_1^{\frac{1}{2}} x^m + (t_1^{-\frac{1}{2}} - \langle u_1 \rangle x - t_1^{\frac{1}{2}} x^2) \begin{cases} x^{-m} + x^{-(m-2)} + \cdots + x^{m-2} & (m > 0)\\ 0 & (m = 0)\\ -x^m - x^{m+2} - \cdots - x^{-(m+2)} & (m < 0) \end{cases}\\
&= \begin{cases} t_1^{-\frac{1}{2}} x^{-m} - \langle t_1 \rangle (x^{-(m-2)} + \cdots + x^{m-2}) - \langle u_1 \rangle (x^{-(m-1)} + \cdots + x^{m-1}) & (m > 0)\\ t_1^{\frac{1}{2}} x^m & (m = 0)\\ \langle t_1 \rangle x^m + t_1^{\frac{1}{2}} x^{-m} + \langle t_1 \rangle (x^{m+2} + \cdots + x^{-(m-2)}) + \langle u_1 \rangle (x^{m+1} + \cdots + x^{-(m+1)}) & (m < 0) \end{cases}
\end{aligned}
$$

Y の関係式も確認しよう.

$$
Y^{-1} T_1 = T_0^{-1} = T_0 - \langle t_0 \rangle = T_1^{-1} Y - \langle t_0 \rangle \tag{5.21}
$$

Lusztig 関係式を少し式変形する.

$$
\begin{aligned}
T_i x^{\lambda} - x^{s_i \lambda} T_i &= d_i(x^{\alpha_i})(x^{\lambda} - x^{s_i \lambda}) && (5.22)\\
(T_i - d_i(x^{\alpha_i})) x^{\lambda} &= x^{s_i \lambda}(T_i - d_i(x^{\alpha})) && (5.23)
\end{aligned}
$$

ここで次の作用素を導入しよう.

$$
\begin{aligned}
S_0^x &:= T_0 + \varphi_0^+(q x^{-2}) = T_0^{-1} + \varphi_0^-(q x^{-2}) && (5.24)\\
S_1^x &:= T_1 + \varphi_1^+(x^2) = T_1^{-1} + \varphi_1^-(x^2) && (5.25)
\end{aligned}
$$

$S_i^x \quad (i = 0, 1)$ を x 側の Intertwining 作用素と呼ぶことにする. ただし,

$$
\varphi_i^{\pm}(z) = \frac{z^{\mp\frac{1}{2}} \langle t_i \rangle + \langle u_i \rangle}{\langle z \rangle} \tag{5.26}
$$

5.4 二重アフィン Hecke 環と反対合

DAHA には次で決まる反対合が存在する.

$$\phi(x) = Y^{-1} \tag{5.27}$$
$$\phi(Y) = x^{-1} \tag{5.28}$$
$$\phi(T_1) = T_1 \tag{5.29}$$
$$\phi(u_1) = t_0, \quad \phi(t_0) = u_1 \tag{5.30}$$

DAHA の枠組みで ϕ は x と Y の役割を反転する役割をもつ.

$$S_0^Y := \phi(S_0^x) = x^{-1}T_1^{-1} + \psi_0^+(qY^2) = T_1 x + \psi_0^-(qY^2) \tag{5.31}$$
$$S_1^Y := \phi(S_1^x) = T_1 + \psi_1^+(Y^{-2}) = T_1^{-1} + \psi_1^-(Y^{-2}) \tag{5.32}$$

$S_i^Y \quad (i=0,1)$ を Y 側の Intertwining 作用素と呼ぶ. ただし,

$$\psi_0^{\pm}(z) = \frac{z^{\mp\frac{1}{2}}\langle u_1\rangle + \langle u_0\rangle}{\langle z\rangle} \tag{5.33}$$
$$\psi_1^{\pm}(z) = \frac{z^{\mp\frac{1}{2}}\langle t_1\rangle + \langle t_0\rangle}{\langle z\rangle} \tag{5.34}$$

Y の単項式 x^m への作用を計算しよう. その計算に便利な $\mathcal{R}$ 作用素を定義しよう.

$$\begin{aligned}\mathcal{R}(\alpha) &= c_i(x^\alpha) + d_i(x^\alpha)s_\alpha && (5.35)\\ &= c_i(x^\alpha) + (t_i^{\frac{1}{2}} - c_i(x^\alpha))s_\alpha && (5.36)\\ &= t_i^{\frac{1}{2}}s_\alpha + c_i(x^\alpha)(1-s_\alpha) && (5.37)\end{aligned}$$

とする. ただし $\alpha = w(\alpha_i) \quad (i=0,1)$. このとき $T_i = \mathcal{R}(\alpha_i)s_i,\ w\mathcal{R}w^{-1} = \mathcal{R}(w(\alpha_i))$ が成り立つ. $\alpha = 2\epsilon_1 + k\delta$ (正ルート) としたとき,

$$\begin{aligned}\mathcal{R}(\alpha)(x^m) &= (t_i^{\frac{1}{2}}s_\alpha + c_i(x^\alpha)(1-s_\alpha))(x^m) && (5.38)\\ &= t_i^{\frac{1}{2}}x^{(m-\langle\alpha^\vee,m\rangle\alpha)} + c_i(x^\alpha)(x^m - x^{m-\langle m,\alpha^\vee\rangle\alpha}) && (5.39)\end{aligned}$$

を計算する. ここで $k = \langle\alpha^\vee, m\rangle$ として $k>0,\ k=0,\ k<0$ の 3 つの場合に分けて計算する. 計算を見やすくするため商差分作用素

$$D_\alpha(f) = \frac{f - s_\alpha(f)}{1-x^\alpha} \tag{5.40}$$

を計算する. まず $k>0$ のとき

$$\begin{aligned}D_\alpha(x^m) &= \frac{x^m - x^{m-k\alpha}}{1-x^\alpha} = \frac{-x^{m-k\alpha}(1-x^{k\alpha})}{1-x^\alpha} = -x^{m-k\alpha}(1+x^\alpha+\cdots+x^{(k-1)\alpha}) && (5.41)\\ &= -x^{m-\alpha} - x^{m-2\alpha} - \cdots - x^{m-k\alpha} && (5.42)\end{aligned}$$

$k=0$ のとき

$$D_\alpha(x^m)=0 \tag{5.43}$$

$k<0$ のとき,

$$D_\alpha(x^m)=\frac{x^m-x^{m-k\alpha}}{1-x^\alpha}=\frac{x^m(1-x^{-k\alpha})}{1-x^\alpha}=x^m(1+x^\alpha+\cdots+x^{-(k+1)\alpha}) \tag{5.44}$$

$$=x^m+x^{m+\alpha}+\cdots+x^{m-(k+1)\alpha} \tag{5.45}$$

あとは $t_i^{-\frac{1}{2}}(1-u_i^{\frac{1}{2}}t_i^{\frac{1}{2}}x^{\frac{\alpha}{2}})(1+u_i^{-\frac{1}{2}}t_i^{\frac{1}{2}}x^{\frac{\alpha}{2}})=t_i^{-\frac{1}{2}}-\langle u_i\rangle x^{\frac{\alpha}{2}}-t_i^{\frac{1}{2}}x^\alpha$ をかける. $k>0$ のとき

$$\mathcal{R}(\alpha)(x^m)=t_i^{\frac{1}{2}}x^{m-k\alpha}-(t_i^{-\frac{1}{2}}-\langle u_i\rangle x^{\frac{\alpha}{2}}-t_i^{\frac{1}{2}}x^\alpha)(x^{m-\alpha}+\cdots+x^{m-k\alpha}) \tag{5.46}$$

$$=t_i^{\frac{1}{2}}x^m+\langle t_i\rangle(x^{m-\alpha}+\cdots+x^{m-k\alpha})+\langle u_i\rangle(x^{m-\frac{\alpha}{2}}+\cdots+x^{m+(\frac{1}{2}-k)\alpha}) \tag{5.47}$$

$k<0$ のとき,

$$\mathcal{R}(\alpha)(x^m)=t_i^{\frac{1}{2}}x^{m-k\alpha}+(t_i^{-\frac{1}{2}}-\langle u_i\rangle x^{\frac{\alpha}{2}}-t_i^{\frac{1}{2}}x^\alpha)(x^m+\cdots+x^{m-(k+1)\alpha}) \tag{5.48}$$

$$=t_i^{-\frac{1}{2}}x^m-\langle t_i\rangle(x^{m+\alpha}+\cdots+x^{m-(k+1)\alpha})-\langle u_i\rangle(x^{m+\frac{\alpha}{2}}+\cdots+x^{m-(k+\frac{1}{2})\alpha}) \tag{5.49}$$

$\langle\alpha^\vee,m\rangle=\langle\epsilon_1+\frac{k}{2}\delta,m\rangle=m$ なのでまとめると以下のようになる.

$$\mathcal{R}(\alpha)(x^m)=\begin{cases}t_i^{\frac{1}{2}}x^m+\langle t_i\rangle(x^{m-\alpha}+\cdots+x^{m-k\alpha})+\langle u_i\rangle(x^{m-\frac{\alpha}{2}}+\cdots+x^{m+(\frac{1}{2}-k)\alpha}) & (m>0)\\ t_i^{\frac{1}{2}}x^m & (m=0)\\ t_i^{-\frac{1}{2}}x^m-\langle t_i\rangle(x^{m+\alpha}+\cdots+x^{m-(k+1)\alpha})-\langle u_i\rangle(x^{m+\frac{\alpha}{2}}+\cdots+x^{m-(k+\frac{1}{2})\alpha}) & (m<0)\end{cases} \tag{5.50}$$

次の順序 $\prec$ を考える.

$$1\prec x^{-1}\prec x\prec x^{-2}\prec x^2\prec\dots \tag{5.51}$$

この順序に関して, $\mathcal{R}(\alpha)$ は x^m に関して三角性をもつ. すなわち,

$$\mathcal{R}(\alpha)(x^m)=t_i^{\varepsilon(m)}x^m+\text{lower order terms w.r.t. }\preceq \tag{5.52}$$

但し, $\varepsilon(m)=\begin{cases}\frac{1}{2} & (m\geq 0)\\ -\frac{1}{2} & (m<0)\end{cases}$ である.

これで Dunkl 作用素 Y の x^m への作用を計算する準備が整った.

$$Y(x^m)=T_1T_0(x^m)=\mathcal{R}(\alpha_1)\mathcal{R}(s_1(\alpha_0))s_1s_0(x^m)=\mathcal{R}(\alpha_1)\mathcal{R}(s_1(\alpha_0))\tau_x(x^m) \tag{5.53}$$

$$=q^m\mathcal{R}(\alpha_1)\mathcal{R}(s_1(\alpha_0))(x^m) \tag{5.54}$$

$$=q^m(t_0t_1)^{\varepsilon(m)}x^m+\text{lower order terms w.r.t. }\preceq. \tag{5.55}$$

5.5 非対称 Askey-Wilson 多項式

$\mathbb{K}[x^{\pm 1}]$ の基底 $\{P_m(x) \mid m \in \mathbb{Z}\}$ であって, すべての $m \in \mathbb{Z}$ に対して以下を満たすものがただ一つ存在する.

$$\begin{aligned} P_m(x) &= x^m + \text{lower order terms w.r.t.} \preceq . &(5.56)\\ Y(P_m(x)) &= q^m (t_0 t_1)^{\varepsilon(m)} P_m(x) &(5.57)\\ &= \eta_m P_m(x) &(5.58)\end{aligned}$$

$\{P_m(x)\}_{m\in\mathbb{Z}}$ を**非対称 Askey-Wilson 多項式**という. Y^{-1} の単項式 x^m への作用をみる.

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(\alpha)^{-1} &= c_i(x^{-\alpha}) + d_i(x^{-\alpha}) s_\alpha - \langle t_i \rangle s_\alpha &(5.59)\\ &= \mathcal{R}(-\alpha) - \langle t_i \rangle s_\alpha &(5.60)\\ &= t_i^{\frac{1}{2}} + t_i^{-\frac{1}{2}} - \mathcal{R}(\alpha) &(5.61)\end{aligned}$$

$\mathcal{R}(\alpha)^{-1}(x^m)$ を計算する.

$$\mathcal{R}(\alpha)^{-1}(x^m) = \begin{cases} t_i^{-\frac{1}{2}} x^m - \langle t_i \rangle (x^{m-\alpha} + \cdots + x^{m-k\alpha}) - \langle u_i \rangle (x^{m-\frac{\alpha}{2}} + \cdots + x^{m+(\frac{1}{2}-k)\alpha}) & (m>0) \\ t_i^{-\frac{1}{2}} x^m \quad (m=0) \\ t_i^{\frac{1}{2}} x^m + \langle t_i \rangle (x^{m+\alpha} + \cdots + x^{m-(k+1)\alpha}) + \langle u_i \rangle (x^{m+\frac{\alpha}{2}} + \cdots + x^{m-(k+\frac{1}{2})\alpha}) & (m<0) \end{cases} \tag{5.62}$$

さて, $Y^{-1} = T_0^{-1} T_1^{-1} = \tau_x^{-1} \mathcal{R}(s_1(\alpha_0))^{-1} \mathcal{R}(\alpha_1)^{-1}$ であるから,

$$Y^{-1}(x^m) = q^{-m} (t_0 t_1)^{\varepsilon'(m)} x^m + \text{lower order terms w.r.t.} \preceq . \tag{5.63}$$

ただし, $\varepsilon\varepsilon'(m) = \begin{cases} -\frac{1}{2} & (m \geq 0) \\ \frac{1}{2} & (m < 0) \end{cases}$ とする. このとき,

$$Y^{-1}(P_m(x)) = q^{-m} (t_0 t_1)^{\varepsilon'(m)} P_m(x) \tag{5.64}$$

5.6 Intertwining 作用素の計算

Lusztig 関係式から

$$\begin{aligned} T_1 x - x^{-1} T_1 &= d_1(x^2)(x - x^{-1}) &(5.65)\\ (T_1 - d_1(x^2)) x &= x^{-1} (T_1 - d_1(x^2)) &(5.66)\\ S_1^x x &= x^{-1} S_1^x &(5.67)\\ Y^{-1} S_1^Y &= S_1^Y Y &(5.68)\\ Y S_1^Y &= S_1^Y Y^{-1} &(5.69)\end{aligned}$$

$$T_0 x - qx^{-1}T_0 = d_0(qx^{-2})(x - qx^{-1}) \tag{5.70}$$
$$(T_0 - d_0(qx^{-2}))x = qx^{-1}(T_0 - d_0(qx^{-2})) \tag{5.71}$$
$$S_0^x x = qx^{-1}S_0^x \tag{5.72}$$
$$Y^{-1}S_0^Y = qS_0^Y Y \tag{5.73}$$
$$YS_0^Y = q^{-1}S_0^Y Y^{-1} \tag{5.74}$$

これで, $S_1^Y S_0^Y P_0(x)$ が何かを固有値から調べよう.

$$YS_0^Y P_0 = S_0^Y q^{-1}Y^{-1}P_0 = q^{-1}t_0^{-\frac{1}{2}}t_1^{-\frac{1}{2}}S_0^Y P_0 \tag{5.75}$$

つまり $S_0^Y P_0 = \mathrm{const}.P_{-1}$. 次に, $S_1^Y P_{-1}(x)$ をみる.

$$YS_1^Y P_{-1}(x) = S_1^Y Y^{-1}P_{-1}(x) = qt_0^{\frac{1}{2}}t_1^{\frac{1}{2}}S_1^Y P_{-1}(x) \tag{5.76}$$

つまり $S_1^Y P_{-1}(x) = \mathrm{const}.P_1(x)$. 結論は $S_1^Y S_0^Y P_0 = \mathrm{const}.P_1(x)$ である. 同様の仕組みでもっと一般につぎがわかる. $m > 0$ に対して,

$$\mathrm{const}.P_m(x) = (S_1^Y S_0^Y)^m P_0(x) \tag{5.77}$$
$$\mathrm{const}.P_{-m}(x) = S_0^Y(S_1^Y S_0^Y)^{m-1}P_0(x) \tag{5.78}$$

const. も具体的に計算できるのでこれからする.

$$(S_1^Y P_m =)\ (T_1 + \psi_1^+(Y^{-2}))P_m = \mathrm{const}.P_{-m} \tag{5.79}$$
$$T_1 P_m = \mathrm{const}.P_{-m} - \psi_1^+(Y^{-2})P_m \tag{5.80}$$
$$= \mathrm{const}.P_{-m} - \frac{Y\langle t_1\rangle + \langle t_0\rangle}{\langle Y^{-2}\rangle}P_m \tag{5.81}$$
$$= C.P_{-m}(x) + \frac{\eta_m\langle t_1\rangle + \langle t_0\rangle}{\langle \eta_m^2\rangle}P_m(x) \tag{5.82}$$

ここで, $T_1(P_m(x))$ の x^{-m} の係数をみる.

$$T_1(P_m(x)) = T_1(x^m + \sum_{n \prec m} C_{m,n}x^n) \tag{5.83}$$
$$= \begin{cases} (t_1^{-\frac{1}{2}} + C_{m,-m}\langle t_1\rangle)x^{-m} + \cdots & (m > 0) \\ t_1^{\frac{1}{2}}x^{-m} + \cdots & (m < 0) \end{cases} \tag{5.84}$$

$m < 0$ のときはよいが, $m > 0$ のときは $C_{m,-m}$ がわからないといけない. $m > 0$ として $P_m(x)$ は Y の固有多項式であるから

$$Y(P_m(x)) = \eta_m P_m(x) = \eta_m x^m + \eta_m C_{m,-m}x^{-m} + \cdots \tag{5.85}$$

である. 一方

$$Y(x^m) = \eta_m x^m + (q^m t_0^{\frac{1}{2}}\langle t_1\rangle + t_1^{-\frac{1}{2}}\langle t_0\rangle)x^{-m} + \cdots \tag{5.86}$$
$$\tag{5.87}$$

に注意して Y を単項式へ素直に当てると

$$
\begin{aligned}
Y(P_m(x)) &= Y(x^m + C_{m,-m}x^{-m} + \cdots) \\
&= (\eta_m x^m + (q^m t_0^{\frac{1}{2}}\langle t_1\rangle + t_1^{-\frac{1}{2}}\langle t_0\rangle)x^{-m} + \cdots) + C_{m,-m}(\eta_{-m}x^{-m} + \cdots) + \cdots \\
&= \eta_m x^m + (C_{m,-m}\eta_{-m} + (q^m t_0^{\frac{1}{2}}\langle t_1\rangle + t_1^{-\frac{1}{2}}\langle t_0\rangle))x^{-m} + \cdots
\end{aligned}
$$

(5.85) と (5.88) の x^{-m} の係数を比較する.

$$\eta_m C_{m,-m} = C_{m,-m}\eta_{-m} + (q^m t_0^{\frac{1}{2}}\langle t_1\rangle + t_1^{-\frac{1}{2}}\langle t_0\rangle) \tag{5.88}$$

$$(\eta_m - \eta_{-m})C_{m,-m} = q^m t_0^{\frac{1}{2}}\langle t_1\rangle + t_1^{-\frac{1}{2}}\langle t_0\rangle \tag{5.89}$$

$$C_{m,-m} = \frac{q^m t_0^{\frac{1}{2}}\langle t_1\rangle + t_1^{-\frac{1}{2}}\langle t_0\rangle}{\eta_m - \eta_{-m}} = \frac{q^m t_0^{\frac{1}{2}}\langle t_1\rangle + t_1^{-\frac{1}{2}}\langle t_0\rangle}{\langle \eta_m^2\rangle} \tag{5.90}$$

さて $m > 0$ のとき

$$T_1(P_m(x)) = \left(t_1^{-\frac{1}{2}} + \langle t_1\rangle \frac{q^m t_0^{\frac{1}{2}}\langle t_1\rangle + t_1^{-\frac{1}{2}}\langle t_0\rangle}{\langle \eta_m^2\rangle}\right)x^{-m} + \cdots \tag{5.91}$$

がわかった.

$$C = t_1^{-\frac{1}{2}} + \langle t_1\rangle \frac{q^m t_0^{\frac{1}{2}}\langle t_1\rangle + t_1^{-\frac{1}{2}}\langle t_0\rangle}{\langle \eta_m^2\rangle} - \left(\frac{q^m t_0^{\frac{1}{2}}\langle t_1\rangle + t_1^{-\frac{1}{2}}\langle t_0\rangle}{\langle \eta_m^2\rangle}\right)\left(\frac{\eta_m\langle t_1\rangle + \langle t_0\rangle}{\langle \eta_m^2\rangle}\right) \tag{5.92}$$

$$= t_1^{-\frac{1}{2}} + \frac{q^m t_0^{\frac{1}{2}}\langle t_1\rangle + t_1^{-\frac{1}{2}}\langle t_0\rangle}{\langle \eta_m^2\rangle}\left(\langle t_1\rangle - \frac{\eta_m\langle t_1\rangle + \langle t_0\rangle}{\langle \eta_m^2\rangle}\right) \tag{5.93}$$

$$= t_1^{-\frac{1}{2}} + \left(\frac{q^m t_0^{\frac{1}{2}}\langle t_1\rangle + t_1^{-\frac{1}{2}}\langle t_0\rangle}{\langle \eta_m^2\rangle}\right)\left(\frac{-\langle t_1\rangle\eta_m^{-1} - \langle t_0\rangle}{\langle \eta_m^2\rangle}\right) \tag{5.94}$$

$$= \frac{t_1^{-\frac{1}{2}}(1-\eta_m^2)(1-\eta_m^{-2}) + (q^m t_0^{\frac{1}{2}}\langle t_1\rangle + t_1^{-\frac{1}{2}}\langle t_0\rangle)(\langle t_1\rangle\eta_m^{-1} + \langle t_0\rangle)}{(1-\eta_m^2)(1-\eta_m^{-2})} \tag{5.95}$$

$$= \frac{t_1^{\frac{1}{2}}(1+t_0q^m)(1-q^m)(1+t_1^{-1}q^{-m})(1-t_0^{-\frac{1}{2}}t_1^{-\frac{1}{2}}q^{-m})}{(1-\eta_m^2)(1-\eta_m^{-2})} \tag{5.96}$$

$$= t_1^{\frac{1}{2}} \prod_{\xi=\pm 1} \frac{(1+t_0^{\frac{1}{2}}t_1^{-\frac{1}{2}}\eta_m^{\xi})(1-t_0^{-\frac{1}{2}}t_1^{-\frac{1}{2}}\eta_m^{\xi})}{(1-\eta_m^{2\xi})} \tag{5.97}$$

以上の結果をまとめると,

$$
T_1P_m(x) = \begin{cases}
\frac{\eta_m\langle t_1\rangle + \langle t_0\rangle}{\langle \eta_m^2\rangle}P_m(x) + t_1^{\frac{1}{2}}\prod_{\xi=\pm1}\frac{(1+t_0^{\frac{1}{2}}t_1^{-\frac{1}{2}}\eta_m^{\xi})(1-t_0^{-\frac{1}{2}}t_1^{-\frac{1}{2}}\eta_m^{\xi})}{(1-\eta_m^{2\xi})}P_{-m}(x) & (m>0) \\
t_1^{\frac{1}{2}}P_m(x) & (m=0) \\
\frac{\eta_m\langle t_1\rangle + \langle t_0\rangle}{\langle \eta_m^2\rangle}P_m(x) + t_1^{\frac{1}{2}}P_{-m}(x) & (m<0)
\end{cases}
$$

これを繰り返し使うことで具体的に C が計算可能になった.

5.7 Ram-Yip 公式

まずは例を計算しよう.

$$
\begin{aligned}
S_0^x &= T_0 + \varphi_0^+(qx^{-2}) \\
S_0^Y &= x^{-1}T_1^{-1} + \psi_0^+(qY^2) \\
S_0^Y P_0(x) &= t_1^{-\frac{1}{2}}x^{-1} + \psi_0^+(qt_0t_1) = t_1^{-\frac{1}{2}}x^{-1} + \frac{\langle t_1\rangle + q^{\frac{1}{2}}t_0^{\frac{1}{2}}t_1^{\frac{1}{2}}\langle t_0\rangle}{qt_0t_1 - 1} \\
&= t_1^{-\frac{1}{2}}\left(x^{-1} + \frac{t_1^{\frac{1}{2}}(\langle t_1\rangle + q^{\frac{1}{2}}t_0^{\frac{1}{2}}t_1^{\frac{1}{2}}\langle t_0\rangle)}{qt_0t_1 - 1}\right) \\
&= t_1^{-\frac{1}{2}}P_{-1}(x)
\end{aligned}
$$

別の例.

$$
\begin{aligned}
S_0^x S_1^x &= S_0^x(T_1^{-1} + \varphi_1^-(x^2)) \\
&= (T_0^{-1} + \varphi_0^-(qx^{-2}))T_1^{-1} + (T_0 + \varphi_0^+(qx^{-2}))\varphi_1^-(x^2) \\
&= T_0^{-1}T_1^{-1} + \varphi_0^-(qx^{-2})T_1^{-1} + \varphi_1^-(q^2x^{-2})T_0 + \varphi_0^+(qx^{-2})\varphi_1^-(q^2x^{-2}) \\
S_1^Y S_0^Y &= x + T_1^{-1}\psi_0^-(qY^2) + x^{-1}T_1^{-1}\psi_1^-(q^2Y^2) + \psi_0^+(qY^2)\psi_1^-(q^2Y^2) \\
S_1^Y S_0^Y P_0(x) &= x + t_1^{-\frac{1}{2}}\psi_0^-(qt_0t_1) + x^{-1}t_1^{-\frac{1}{2}}\psi_1^-(q^2t_0t_1) + \psi_0^+(qt_0t_1)\psi_1^-(q^2t_0t_1) \\
&= P_1(x)
\end{aligned}
$$

以上の例から次のように予想できる.

$$
S_{w^{-1}}^x = S_{i_p}^x \cdots S_{i_1}^x = \sum_{I\subseteq\{1,\ldots,p\}} \prod_{k\notin I} \varphi_k^{\sigma(s_{I_k}(\alpha_k))}(x^{\beta'_k}) \overleftarrow{\prod_{\ell\in I}} T_\ell^{\sigma(\beta_\ell^I)} \tag{5.98}
$$

ただし, 任意のルート $a = m\delta + n\epsilon_1$ に対して $\sigma(a) = \begin{cases} +1 & (n < 0) \\ -1 & (n > 0) \end{cases}$ で, $I = \{k_1, \ldots, k_s\}$ に対して $\beta_m^I = s_{k_1}s_{k_2}\cdots s_{k_{m-1}}(\alpha_{k_m})$ で特に $I = \{1, \ldots, p\}$ のときは $\beta^I = \beta$ とした. 上で s_{I_k} と書いてのは I のなかで k より左にある番号 $k_{s_1}, \cdots, k_{s_n}$ で $s_{I_k} = s_{s_{k_n}}\cdots s_{k_1}$ を表す記号として用いた. また $\prod_{\ell\in I}^{\rightarrow}$ は左から右に I を大きい順でかけるという意味である. $\beta'_k = s_{i_p}\cdots s_{i_{k-1}}(\alpha_{i_k})\quad (k = 1, \ldots, p)$

$w = s_{i_1}\cdots s_{i_p} = \tau_x^m s_1^n \quad (m \in \mathbb{Z}, n = 0, 1)$ に対して, 次が成り立つ.

$$
T_{w^{-1}} = T_{i_p}^{\sigma(\beta_p)}\cdots T_{i_1}^{\sigma(\beta_1)} = T_1^{-n}Y^{-m} \tag{5.99}
$$

[証明] $(w^{-1} =)\ s_{i_p}\cdots s_{i_1} = s_1^n\tau_x^{-m}$ の両辺に $\tau_x^k\ (k \in \mathbb{Z}, k >> 0)$ を左からかける.

$$
s_{i_p}\cdots s_{i_1}\tau_x^k = s_1^{-n}\tau_x^{k-m} \tag{5.100}
$$

$T_{s_i w} = T_i^{\epsilon(w^{-1}(\alpha_i))} T_w,\ \epsilon(\alpha) = \begin{cases} +1 & (\alpha > 0) \\ -1 & (\alpha < 0) \end{cases}$ から,

$$T_{i_p}^{\epsilon(\tau_x^{-k}\beta_p)} \cdots T_{i_1}^{\epsilon(\tau_x^{-k}\beta_1)} Y^k = T_1^{-n} Y^{k-m} \tag{5.101}$$

$$T_{i_p}^{\epsilon(\tau_x^{-k}\beta_p)} \cdots T_{i_1}^{\epsilon(\tau_x^{-k}\beta_1)} = T_1^{-n} Y^{-m} \tag{5.102}$$

ここで, $\beta_\ell = u_\ell \delta + v_\ell \epsilon_1$ $(u_\ell \in \mathbb{Z},\ v_\ell \in \mathbb{Z}\backslash\{0\})$ とおく.

$$\tau_x^{-k}(\beta_\ell) = u_\ell \delta + v_\ell(-k\delta + \epsilon_1) = (u_\ell - v_\ell k)\delta + v_\ell \epsilon_1 \tag{5.103}$$

さて $\ell = 1, \ldots, p$ に対して次がわかる.

$$\epsilon(\tau_x^{-k}(\beta_\ell)) = \begin{cases} +1 & (v_\ell < 0\ のとき) \\ -1 & (v_\ell > 0\ のとき) \end{cases} = \sigma(\beta_\ell) \tag{5.104}$$

となり, $T_{i_p}^{\sigma(\beta_p)} \cdots T_{i_1}^{\sigma(\beta_1)} = T_1^{-n} Y^{-m}$ が示せた. □

(5.98) を次のように表示できる.

$$S_{w^{-1}}^x = S_{i_p}^x \cdots S_{i_1}^x = \sum_{I \subseteq \{1,\ldots,p\}} \prod_{k \notin I} \varphi_k^{\sigma(s_{I_k}(\alpha_k))}(x^{\beta_k}) T_1^{-n_I} Y^{-m_I} \tag{5.105}$$

ただし, $I = \{k_1, \ldots, k_s\} \subseteq \{1, \ldots, p\}$ に対して, $w_I^{-1} := s_{k_s} \cdots s_{k_1} = s_1^{-n_I} \tau_x^{-m_I}$ という記号を用いている. さて (5.105) の両辺に ϕ を施す.

$$S_w^Y = \phi(S_{w^{-1}}^x) = \sum_{I \subseteq \{1,\ldots,p\}} x^{m_I} T_1^{-n_I} \prod_{k \notin I} \psi_k^{\sigma(s_{I_k}(\alpha_k))}(Y^{-\beta_k}) \tag{5.106}$$

これまでの議論の集大成が以下である. $w = (s_1 s_0)^m$ または $w = s_0(s_1 s_0)^{m-1}$ であって,

$$\text{const.}P_{\pm m}(x) = S_w^Y P_0(x) = \sum_{I \subseteq \{1,\ldots,p\}} x^{m_I} (t_1^{\frac{1}{2}})^{-n_I} \prod_{k \notin I} \psi_k^{\sigma(s_{I_k}(\alpha_k))}(q^{u_k}(t_0^{\frac{1}{2}} t_1^{\frac{1}{2}})^{-v_k}) \tag{5.107}$$

が成り立つ.

[証明] $w = (s_1 s_0)^m$ または $w = s_0(s_1 s_0)^{m-1}$ のとき, $S_w^Y P_0(x) = \text{const.}P_{\pm m}(x)$ となることは既に示している. あとは右辺の x の冪が $\prec$ に関して三角性があることを示せばよい. つまり, Bruhat 順序で $w_I \prec_{Bru.} w$ ならば $m_I \prec m$ をいえばよい. 念の為, 記号を復習しておく. $w_I = s_{k_1} \cdots s_{k_s} = \tau_x^{m_I} s_1^{n_I}$, $\beta_k = s_{i_1} \cdots s_{i_{k-1}}(\alpha_{i_k}) = v_k \delta + u_k \epsilon_1$. さて, w より Bruhat 順序で小さいものは, 以下の形のものに限ることからすぐにわかる.

$$w_I = \begin{cases} (s_1 s_0)^\ell = \tau_x^\ell & (\ell < m) \\ (s_0 s_1)^\ell = \tau_x^{-\ell} & (\ell < m) \\ s_0(s_1 s_0)^\ell = \tau_x^{-\ell} s_1 & (\ell < m) \\ s_1(s_0 s_1)^\ell = \tau_x^\ell s_0 & (\ell < m) \end{cases} \tag{5.108}$$

□

付録 A　Mathematica による Macdonald 多項式の計算

ここでは, A_1, A_2, A_3 型の非対称 Macdoanld 多項式を計算ソフト Mathematica を用いて計算した結果を載せた.

- A_1型

$$E_{(0,0)} = 1$$
$$E_{(0,1)} = x_2$$
$$E_{(1,0)} = \frac{q(t-1)x_2}{qt-1} + x_1$$
$$E_{(1,1)} = x_1x_2$$
$$E_{(0,2)} = \frac{(t-1)x_1x_2}{qt-1} + x_2^2$$
$$E_{(2,0)} = \frac{q(q+1)(t-1)x_2x_1}{q^2t-1} + \frac{q^2(t-1)x_2^2}{q^2t-1} + x_1^2$$
$$E_{(1,2)} = x_1x^2$$
$$E_{(2,1)} = x_2x_1^2 + \frac{q(t-1)x_2^2x_1}{qt-1}$$
$$E_{(0,3)} = x_2^3 + \frac{(q+1)(t-1)x_1x_2^2}{q^2t-1} + \frac{(t-1)x_1^2x_2}{q^2t-1}$$
$$E_{(3,0)} = \frac{q^3(t-1)x_2^3}{q^3t-1} + \frac{q\left(q^2+q+1\right)(t-1)x_2x_1^2}{q^3t-1} + \frac{q^2\left(q^2+q+1\right)(t-1)x_2^2x_1(qt-1)}{\left(q^2t-1\right)\left(q^3t-1\right)} + x_1^3$$

- A_2型

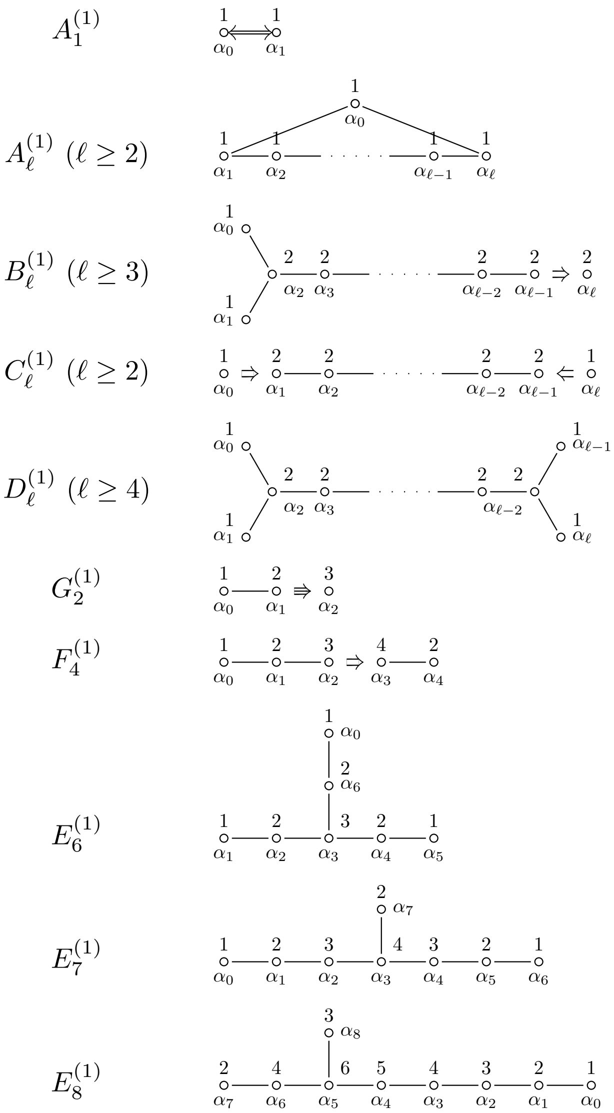
$$E_{(0,0,0)} = 1$$
$$E_{(0,0,1)} = x_3$$
$$E_{(0,1,0)} = \frac{q(t-1)tx_3}{qt^2-1} + x_2$$
$$E_{(1,0,0)} = \frac{q(t-1)x_2}{qt-1} + \frac{q(t-1)x_3}{qt-1} + x_1$$
$$E_{(0,1,1)} = x_2x_3$$
$$E_{(1,0,1)} = \frac{q(t-1)tx_2x_3}{qt^2-1} + x_1x_3$$
$$E_{(1,1,0)} = \frac{q(t-1)x_3x_2}{qt-1} + \frac{q(t-1)x_1x_3}{qt-1} + x_1x_2$$
$$E_{(0,0,2)} = \frac{(t-1)x_1x_3}{qt-1} + \frac{(t-1)x_2x_3}{qt-1} + x_3^2$$
$$E_{(0,2,0)} = \frac{q(t-1)x_2x_3\left(q^2t^2+qt^2-qt-1\right)}{(qt-1)^2(qt+1)} + \frac{q^2t(t-1)^2x_1x_3}{(qt-1)^2(qt+1)} + \frac{q^2t(t-1)x_3^2}{(qt-1)(qt+1)} + \frac{(t-1)x_1x_2}{qt-1} + x_2^2$$
$$E_{(2,0,0)} = \frac{q^2(q+1)(t-1)^2x_2x_3}{(qt-1)\left(q^2t-1\right)} + \frac{q^2(t-1)x_2^2}{q^2t-1} + \frac{q^2(t-1)x_3^2}{q^2t-1} + \frac{q(q+1)(t-1)x_1x_2}{q^2t-1} + \frac{q(q+1)(t-1)x_1x_3}{q^2t-1} + x_1^2$$

- A_3 型

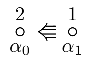
$$E_{(0,0,0,0)} = 1$$
$$E_{(0,0,0,1)} = x_4$$
$$E_{(0,0,1,0)} = \frac{q(t-1)t^2x_4}{qt^3-1} + x_3$$
$$E_{(0,1,0,0)} = \frac{q(t-1)tx_3}{qt^2-1} + \frac{q(t-1)tx_4}{qt^2-1} + x_2$$
$$E_{(1,0,0,0)} = \frac{q(t-1)x_2}{qt-1} + \frac{q(t-1)x_3}{qt-1} + \frac{q(t-1)x_4}{qt-1} + x_1$$
$$E_{(0,0,1,1)} = x_3x_4$$
$$E_{(0,1,0,1)} = \frac{q(t-1)t^2x_3x_4}{qt^3-1} + x_2x_4$$
$$E_{(0,1,1,0)} = \frac{q(t-1)tx_4x_3}{qt^2-1} + \frac{q(t-1)tx_2x_4}{qt^2-1} + x_2x_3$$
$$E_{(1,0,0,1)} = \frac{q(t-1)tx_2x_4}{qt^2-1} + \frac{q(t-1)tx_3x_4}{qt^2-1} + x_1x_4$$
$$E_{(1,0,1,0)} = \frac{q^2(t-1)^2t^2x_2x_4}{\left(qt^2-1\right)^2} + \frac{q(t-1)tx_2x_3}{qt^2-1} + \frac{q(t-1)tx_1x_4}{qt^2-1} + \frac{q(t-1)x_3x_4\left(qt^3-1\right)}{\left(qt^2-1\right)^2} + x_1x_3$$
$$E_{(1,1,0,0)} = \frac{q^2(t+1)(t-1)^2x_3x_4}{(qt-1)\left(qt^2-1\right)} + \frac{q(t-1)x_1x_3}{qt-1} + \frac{q(t-1)x_2x_3}{qt-1} + \frac{q(t-1)x_1x_4}{qt-1} + \frac{q(t-1)x_2x_4}{qt-1} + x_1x_2$$

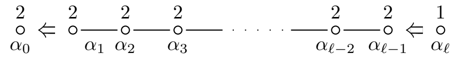
付録 B　アフィンルート系の記号について

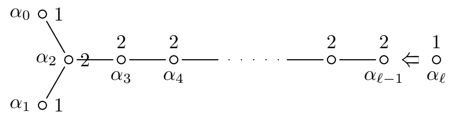
以下が非捩れ型のアフィンルート系に対応する Dynkin 図形である．記号は Kac のリスト [?] に従う．

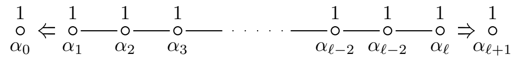


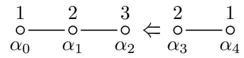
次は捩れ型のアフィンルート系に対応する Dynkin 図形である.

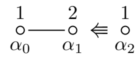
$A_2^{(2)}$ 

$A_{2\ell}^{(2)}$ $(\ell \geq 2)$ 

$A_{2\ell-1}^{(2)}$ $(\ell \geq 3)$ 

$D_{\ell+1}^{(2)}$ $(\ell \geq 2)$ 

$E_6^{(2)}$ 

$D_4^{(3)}$ 

次に Macdonald の被約なアフィンルート系の記号 [?] との関係を述べる. 以下, 長い方の最高ルートを ϕ_l とし短い方を ϕ_s とする. またアフィンルート系 S に含まれる有限ルート系を $R \subset S$ とし, S が住んでいるベクトル空間の正規直交基底 $\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots$ をとっておく.

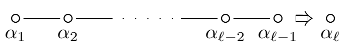
(a)	S の形
(b)	R の基底
(c)	R に付随する Dynkin 図形
(d)	最高ルートの長ルートと短ルート

の順にまとめる.

まずは B_ℓ 型 $(\ell \geq 3)$ について考察する.

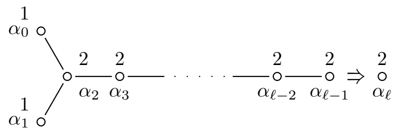
(a) $S = \{\pm\epsilon_i + k\delta \mid 1 \leq i \leq \ell,\ k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\pm\epsilon_i \pm \epsilon_j + k\delta \mid 1 \leq i < j \leq \ell,\ k \in \mathbb{Z}\}$

(b) $\alpha_i = \epsilon_i - \epsilon_{i+1}$ $(1 \leq i \leq \ell - 1)$ $\qquad \alpha_\ell = \epsilon_\ell$

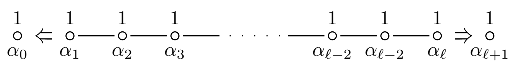
(c) 

(d) $\phi_l = \epsilon_1 + \epsilon_2 = \alpha_1 + 2\alpha_2 + \cdots + 2\alpha_{\ell-1} + 2\alpha_\ell, \quad \phi_s = \epsilon_1 = \alpha_1 + \cdots + \alpha_\ell$

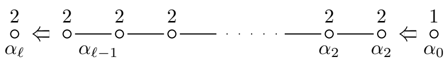
でアフィンルートを $\alpha_0 = \delta - \phi_l$ とすると Macdonald の記号で B_ℓ

$B_\ell^{(1)}$ 

となり, $\alpha_0 = \delta - \phi_s$ とすると Macdonald の記号で $C_l^\vee$

$D_{\ell+1}^{(2)}$ 

となる. $\alpha_0 = \delta - \phi_s^\vee = \delta - 2\epsilon_1$ とすると Macdonald の記号で BC_ℓ

$A_{2\ell}^{(2)}$ $(\ell \geq 2)$ 

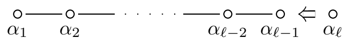
となる.

次は C_ℓ 型 $(\ell \leq 2)$ について考察する.

(a) $$S = \{\pm 2\epsilon_i + k\delta \mid 1 \leq i \leq \ell,\ k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\pm\epsilon_i \pm \epsilon_j + k\delta \mid 1 \leq i < j \leq \ell,\ k \in \mathbb{Z}\}$$

(b) $$\alpha_i = \epsilon_i - \epsilon_{i+1}\ (1 \leq i \leq \ell - 1) \qquad \alpha_\ell = 2\epsilon_\ell$$

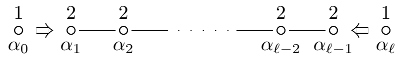
(c)



(d) $$\phi_l = 2\epsilon_1 = 2\alpha_1 + 2\alpha_2 + \cdots + 2\alpha_{\ell-1} + \alpha_\ell, \quad \phi_s = \epsilon_1 + \epsilon_2 = \alpha_1 + 2\alpha_2 + \cdots + 2\alpha_{\ell-1} + \alpha_\ell$$

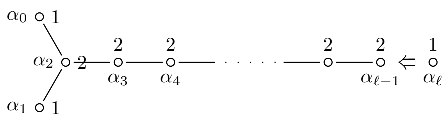
$\alpha_0 = \delta - \phi_l$ とすると Macdonald の記号で C_ℓ

$C_\ell^{(1)}$



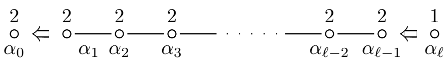
となり, $\alpha_0 = \delta - \phi_s$ とすると Macdonald の記号で $B_\ell^\vee$

$A_{2\ell-1}^{(2)}\ (\ell \geq 3)$



となる, $\phi_l^\vee = \epsilon_1 = \alpha_1 + \cdots + \alpha_{\ell-1} + \frac{1}{2}\alpha_\ell$ だが, α_ℓ の係数が $\frac{1}{2}$ となるので, $\alpha_0 = \frac{1}{2}\delta - \phi_l^\vee$ としておく. このときは Macdonald の記号で CB_ℓ[*2]

$A_{2\ell}^{(2)}\ (\ell \geq 2)$

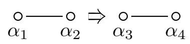


次は F_4 型について考察する.

(a) $$S = \{\pm\epsilon_i + k\delta \mid 1 \leq i \leq 4,\ k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\pm\epsilon_i \pm \epsilon_j + k\delta \mid 1 \leq i < j \leq 4,\ k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\frac{1}{2}(\epsilon_1 \pm \epsilon_2 \pm \epsilon_3 \pm \epsilon_4) + k\delta | k \in \mathbb{Z}\}$$

(b) $$\alpha_1 = \epsilon_2 - \epsilon_3,\ \alpha_2 = \epsilon_3 - \epsilon_4,\ \alpha_3 = \epsilon_4,\ \alpha_4 = \frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3 - \epsilon_4)$$

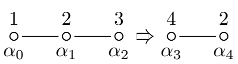
(c)



(d) $$\phi_l = \epsilon_1 + \epsilon_2 = 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3 + 2\alpha_4, \quad \phi_s = \epsilon_1 = \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + 2\alpha_4$$

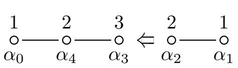
$\alpha_0 = \delta - \phi_l$ のとき, Macdonald の記号で F_4

$F_4^{(1)}$



となり, $\alpha_0 = \delta - \phi_s$ とするとき Macdonald の記号で $F_4^\vee$

$E_6^{(2)}$



となる.

[*2] 実際のところ CB_ℓ という記号を Macdonald は使っていないが, B_ℓ 型の上に C_ℓ 型を乗せたというニュアンスでこの記号を用いた.

次に G_2 型について考察する.

$$(a) \quad S = \{\pm(\epsilon_i - \frac{1}{3}(\epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon_3)) + k\delta \mid 1 \le i \le 3,\ k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\pm(\epsilon_i - \epsilon_j) + k\delta \mid 1 \le i < j \le 3,\ k \in \mathbb{Z}\}$$

$$(b) \quad \alpha_1 = \epsilon_2 - \epsilon_3,\ \alpha_2 = \epsilon_3 - \frac{1}{3}(\epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon_3)$$

$$(c) \quad \underset{\alpha_1}{\circ} \Rrightarrow \underset{\alpha_2}{\circ}$$

$$(d) \quad \phi_l = \epsilon_2 - \epsilon_1 = 2\alpha_1 + 3\alpha_2, \quad \phi_s = \frac{1}{3}(-2\epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon_3) = \alpha_1+\alpha_2$$

$\alpha_0 = \delta - \phi_l$ のとき Macdonald の記号で G_2

$$G_2^{(1)} \qquad \overset{1}{\underset{\alpha_0}{\circ}} \!-\!\!-\!\! \overset{2}{\underset{\alpha_1}{\circ}} \Rrightarrow \overset{3}{\underset{\alpha_2}{\circ}}$$

となり, $\alpha_0 = \delta - \phi_s$ のとき Macdonald の記号で $G_4^\vee$

$$D_4^{(3)} \qquad \overset{1}{\underset{\alpha_0}{\circ}} \!-\!\!-\!\! \overset{2}{\underset{\alpha_2}{\circ}} \Lleftarrow \overset{1}{\underset{\alpha_1}{\circ}}$$

Mcdonald の記号で BC_1 について考察する.

$$(a) \quad S = \{\pm\epsilon_1 + k\delta \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\pm 2\epsilon_1 + (2k+1)\delta \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

$$(b) \quad \alpha_1 = \epsilon_1$$

$$(c) \quad \underset{\alpha_1}{\circ}$$

$$(d) \quad \phi_l = 2\epsilon_1 = 2\alpha_1, \quad \phi_s = \epsilon_1 = \alpha_1$$

$\alpha_0 = \delta - \phi_\ell$ のとき

$$A_2^{(2)} \qquad \overset{2}{\underset{\alpha_1}{\circ}} \Lleftarrow \overset{1}{\underset{\alpha_0}{\circ}}$$

となる.

A, D, E 型は最高ルートが一つに決まる. Macdonald の記号で $A_\ell, D_\ell, E_6, E_7, E_8$ は Kac の記号で $A_\ell^{(1)}, D_\ell^{(1)}, E_6^{(1)}, E_7^{(1)}, E_8^{(1)}$ となる.