

線形代数 1 中間試験 対策問題集

ver. 2024.05.16

担当: 山口航平

kohei.yamaguchi.28 [at] gmail.com

https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yamaguchi.kohei/lin_alg1_2024.html

問 1. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ とする. 以下を計算せよ.

(1) AB (2) AC (3) BD (4) DC (5) DA

問 2. 2次正方行列で, 対称行列と交代行列の例を一つずつ挙げよ.

問 3. 2次正方行列で, エルミート行列と反エルミート行列の例を一つずつ挙げよ.

問 4. 次の行列は正則か否かを判定せよ. また正則ならその逆行列も答えよ.

(1) $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(2) $B = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

問 5. 2つの行列 A , B は正則であるとする. このとき, 行列 AB も正則であり, その逆行列は $B^{-1}A^{-1}$ で与えられることを示せ.

問 6. 次の行列の行列式を計算せよ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

問 7. 3次の正方行列 $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq 3}$ における行列式の定義は,

$$|A| = \sum_{p=(p_1 p_2 p_3)} \text{sgn}(p) a_{1p_1} a_{2p_2} a_{3p_3}, \quad p \text{ は 3 次の置換全体をわたる.}$$

であった. 次の行列式に関する等式を示せ.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21} + c_{21} & b_{22} + c_{22} & b_{23} + c_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$