§6. 行列式の展開

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}^1 \\ \mathbf{a}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}^n \end{pmatrix}$$

但し $\mathbf{a}^i = (a_{i1}\ a_{i2} \cdots a_{in})$

Prop 次の正方行列 A の行列式は 0 になる

(1) ある行が皆 0.

$\exists i$ st. $\mathbf{a}^i = 0 \Rightarrow |A| = 0$

(2) ある2組の行が等しい

$\mathbf{a}^i = \mathbf{a}^j \Rightarrow |A| = 0$

(3) ある行が他の行に比例している

$\mathbf{a}^j = k\mathbf{a}^i \Rightarrow |A| = 0$ □

Pf. (1) について. $\mathbf{0} = (0\ 0 \cdots 0)$ とする

$$|A| = \begin{vmatrix} \mathbf{a}^1 \\ \vdots \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{a}^n \end{vmatrix} \underset{(1)の(2)}{=} \begin{vmatrix} \mathbf{a}^1 \\ \vdots \\ 0 \cdot \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{a}^n \end{vmatrix} = 0 \begin{vmatrix} \mathbf{a}^1 \\ \vdots \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{a}^n \end{vmatrix} = 0$$

□

(2) について　$a^i = a^j$ とする

$$|A| = \begin{vmatrix} a^1 \\ \vdots \\ a^i \\ \vdots \\ a^j \\ \vdots \\ a^n \end{vmatrix} \underset{(\mathrm{II})}{=} - \begin{vmatrix} a^1 \\ \vdots \\ a^j \\ \vdots \\ a^i \\ \vdots \\ a^n \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a^1 \\ \vdots \\ a^i \\ \vdots \\ a^j \\ \vdots \\ a^n \end{vmatrix} = -|A|$$

$\therefore\ |A| = 0 \quad \square$

(3) は自明で. $\square$

<u>Eg</u>

(1) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$

(2) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$

(3) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 5 & 6 & 8 \end{vmatrix} = 0$

//

Prop

(R1) ある行を k 倍すると行列式の値も k 倍になる.

(R2) ある行に他の行の k 倍を加えても行列式は変わらない.

(R3) 2つの行を入れかえると行列式は (-1) 倍になる.

Pf $|A| = \begin{vmatrix} a^1 \\ \vdots \\ a^i \\ \vdots \\ a^n \end{vmatrix}$ とおく

(R1) $\begin{vmatrix} a^1 \\ \vdots \\ ka^i \\ \vdots \\ a^n \end{vmatrix} \underset{(\mathrm{I})の(2)}{=} k \begin{vmatrix} a^1 \\ \vdots \\ a^i \\ \vdots \\ a^n \end{vmatrix} = k|A|$ □

(R2) $\begin{vmatrix} a^1 \\ \vdots \\ a^i + ka^j \\ \vdots \\ a^j \\ \vdots \\ a^n \end{vmatrix} \underset{(\mathrm{I})の(1)}{=} \begin{vmatrix} a^1 \\ \vdots \\ a^i \\ \vdots \\ a^j \\ \vdots \\ a^n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a^1 \\ \vdots \\ ka^j \\ \vdots \\ a^j \\ \vdots \\ a^n \end{vmatrix}$

$\underset{(\mathrm{I})の(2)}{=} |A| + k \begin{vmatrix} a^1 \\ \vdots \\ a^j \\ \vdots \\ a^j \\ \vdots \\ a^n \end{vmatrix} = 0$

$\underset{\text{Prop.}}{=} |A|$

(R3) 問各自 □.　　　$r_i :=$ i行目.

E.g.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \underset{r_3-r_1}{\overset{r_2-r_1}{=\!=}} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & -3 \end{vmatrix} \underset{r_3+r_2}{\overset{r_1-2r_2}{=\!=}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -6 \end{vmatrix}$$

$$= 1\cdot 1\cdot(-6) = -6 \,/\!/$$

Thm (次数低下法)

$$n\left\{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\right. = a_{11} \left.\begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\right\} n-1$$

n　　　　　　　　　$n-1$

(n次)　　　　　　　　$(n-1)$次

Pf　$A = (a_{ij})_{1\le i,j\le n}$ & $a_{21} = a_{31} = \cdots = a_{n1} = 0$

$$|A| = \sum_{\mathbb{p}=(p_1 p_2 \cdots p_n)} \operatorname{sgn}(\mathbb{p})\, a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}$$

$$= \sum_{\mathbb{P}=(1 p_2 \cdots p_n)} \mathrm{sgn}(\mathbb{P}) a_{11} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}$$

$$+ \sum_{\substack{\mathbb{q}=(q_1 q_2 \cdots q_n) \\ q_1 \neq 1}} \mathrm{sgn}(\mathbb{q}) a_{1q_1} a_{2q_2} \cdots a_{nq_n}$$

(第二項は項に $\underset{0}{\overset{}{a_{i1}}}$ を含むから 0.)

$$= \sum_{\mathbb{P}=(1 p_2 \cdots p_n)} \mathrm{sgn}(\mathbb{P}) a_{11} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}$$

$$= a_{11} \sum_{\mathbb{P}=(1 p_2 \cdots p_n)} \mathrm{sgn}(\mathbb{P}) a_{2p_2} \cdots a_{np_n}$$

$$= a_{11} \sum_{\mathbb{P}=(p_2 \cdots p_n)} \mathrm{sgn}(\mathbb{P}) a_{2p_2} \cdots a_{np_n} \qquad \square$$

<u>Eg</u>

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \underset{r_3+r_1}{\overset{r_2-r_1}{=\!=}} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\underset{\text{Thm}}{=\!=} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 \quad //$$