§5. n次の行列式

<u>復習</u> $A_2=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $A_3=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

$$|A_2| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$|A_3| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{22}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{22}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

$\rightsquigarrow$ $A_n = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ なら

$|A_n| = \sum_{(p_1,\cdots,p_n)} \pm\, a_{1p_1}\cdots a_{np_n}$ の形をしている.

← 符号をどう決めるかが大事!

§5.1. 置換の転倒数と符号

1, 2, 3, …, n

異なるnコのモノを全て1列に並べる順列を n次の置換という.

1次の置換 $(1)=id_1$

2次 〃 $id_2=(1\ 2)\quad(2\ 1)$

3次 〃 $id_3=(1\ 2\ 3)\quad(1\ 3\ 2)$

$(2\ 1\ 3)\quad(2\ 3\ 1)$

$(3\ 1\ 2)\quad(3\ 2\ 1)$

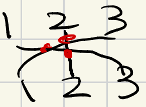
Rmk 置換 $(1\ 2\ 3\ \cdots\ n)=:id_n$ とかき
単位置換という.

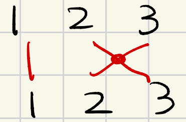
Def n次の置換 $p=(p_1\ p_2\ \cdots\ p_n)$ において
$i<j$ だが $p_i>p_j$ となる様な組
(i,j)の個数を pの転倒数といい
$\mathrm{inv}(p)$ とかく. $\square$

E.g. $p_1=(\overset{1}{1}\ \overset{2}{3}\ \overset{3}{2})$, $p_2=(\overset{1}{3}\ \overset{2}{2}\ \overset{3}{1})$, $id_3=(\overset{1}{1}\overset{2}{2}\overset{3}{3})$
について

$\mathrm{inv}(p_1)=1$, $\mathrm{inv}(p_2)=1+1+1=3$

$\mathrm{inv}(id_3)=0$





Def n次の置換 $\mathbb{p} = (p_1\ p_2 \cdots p_n)$ に対して

$$\mathrm{sgn}(\mathbb{p}) := (-1)^{\mathrm{inv}(\mathbb{p})}$$ を

$\mathbb{p}$ の符号という.

Eg.
- $\mathrm{sgn}(\mathbb{p}_1) = (-1)^1 = -1$
- $\mathrm{sgn}(\mathbb{p}_2) = (-1)^3 = -1$
- $\mathrm{sgn}(\mathrm{id}_3) = (-1)^0 = 1$

Def. (n次の行列式)

n次正方行列 $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ に対して

$$\sum_{\substack{\mathbb{p}=(p_1\ p_2 \cdots p_n) \\ n\text{次の置換}}} \mathrm{sgn}(\mathbb{p})\, a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}$$

を A の行列式という. □

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \Longrightarrow |A| = \underset{\underset{\mathrm{id}_2}{\shortparallel}}{\mathrm{sgn}(\mathbb{P}_1)}\, a_{11} a_{22}$$

$$+ \mathrm{sgn}(\mathbb{P}_2)\, a_{12} a_{21}$$

$$= a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}.$$

$\mathbb{P}_1 = (1\,2) = \mathrm{id}_2$

$\mathbb{P}_2 = (2\,1)$

Ex. 3次の置換の符号を全て計算して，3次行列式の今日のDefと前回のDefを比較せよ．

§5.2 行列式の性質

ヨコベクトル $\mathbb{a}^i$ を並べたと思う

Thm

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{a}^1 \\ \mathbb{a}^2 \\ \vdots \\ \mathbb{a}^n \end{pmatrix}$$

(I) 多重線形性

(1) $\mathbb{a}^i = \mathbb{b} + \mathbb{c}$ であるとき

$$|A| = \begin{vmatrix} \mathbb{a}^1 \\ \vdots \\ \mathbb{a}^i \\ \vdots \\ \mathbb{a}^n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbb{a}^1 \\ \vdots \\ \mathbb{b}+\mathbb{c} \\ \vdots \\ \mathbb{a}^n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbb{a}^1 \\ \vdots \\ \mathbb{b} \\ \vdots \\ \mathbb{a}^n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbb{a}^1 \\ \vdots \\ \mathbb{c} \\ \vdots \\ \mathbb{a}^n \end{vmatrix}.$$

(2) $\mathbb{a}^i = s\mathbb{b}$ であるとき　(s: スカラー)

$$|A| = \begin{vmatrix} \mathbb{a}^1 \\ \vdots \\ \mathbb{a}^i \\ \vdots \\ \mathbb{a}^n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbb{a}^1 \\ \vdots \\ s\mathbb{b} \\ \vdots \\ \mathbb{a}^n \end{vmatrix} = s\begin{vmatrix} \mathbb{a}^1 \\ \vdots \\ \mathbb{b} \\ \vdots \\ \mathbb{a}^n \end{vmatrix}.$$

(Ⅱ) 交代性

$$|A| = \begin{vmatrix} a^1 \\ \vdots \\ a^i \\ \vdots \\ a^j \\ \vdots \\ a^n \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a^1 \\ \vdots \\ a^j \\ \vdots \\ a^i \\ \vdots \\ a^n \end{vmatrix}$$

(Ⅲ) 正規性

$$|E_n| = 1. \qquad \square$$

Eg

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2\cdot 2 & 2\cdot 1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

$$= 2 \begin{vmatrix} 1+1 & 1+0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2\left(\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \right)$$

$$= 2 \left(- \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \right)$$

$$= 2 \left(-(2-1) + 1 \right) = 0 \quad //$$