§4. 行列式

§4.1. 2次の行列式

2次の正方行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して

$ad-bc$ を A の行列式 (determinant) といい

$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$, $\det A$, $|A|$, $|\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2|$

などと表す

$\boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{a}_2=\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$

前回の復習

$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が正則である

$\iff \quad ad-bc \neq 0$

このとき $A^{-1} = \dfrac{1}{\underbrace{ad-bc}_{=\det A}} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ だった。

行列式を考えるモチベーション ①

連立方程式 $\begin{cases} ax+by=e \\ cx+dy=f \end{cases}$ を考える

これは

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} a \\ c \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} b \\ d \end{matrix}} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{b}}$$

$\boldsymbol{a}_1 \quad \boldsymbol{a}_2$

とかける.

もし A が正則ならば $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ が存在して

$$\underbrace{A^{-1}A}\, \mathbb{x} = A^{-1}\mathbb{b}$$

$$E_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

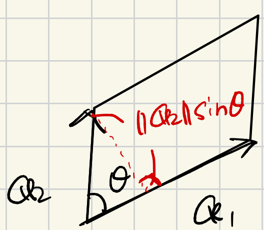
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} de-bf \\ -ce+af \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{cases} x = \dfrac{de-bf}{|A|} = \dfrac{\begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}}{|A|} = \dfrac{|\mathbb{b}\ \mathbb{a}_2|}{|\mathbb{a}_1\ \mathbb{a}_2|} \\[2em] y = \dfrac{af-ce}{|A|} = \dfrac{\begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix}}{|A|} = \dfrac{|\mathbb{a}_1\ \mathbb{b}|}{|\mathbb{a}_1\ \mathbb{a}_2|} \end{cases}$$

解も行列式の比でかける！（クラメルの公式）

行列式を考えるモチベーション②

2つの平面ベクトル $\mathbb{a}_1 = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$, $\mathbb{a}_2 = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ を考える。



$(0 \leqq \theta \leqq \pi)$

$\mathbb{a}_1$ と $\mathbb{a}_2$ でつくる平行四辺形の面積を S とする。

$$S = \|a_1\| \|a_2\| \sin\theta$$

ここで $\underbrace{a_1 \cdot a_2}_{ab+cd} = \|a_1\| \|a_2\| \cos\theta$ を思い出そう。

内積

$$S^2 = \|a_1\|^2 \|a_2\|^2 \sin^2\theta$$

$$= \|a_1\|^2 \|a_2\|^2 (1 - \cos^2\theta)$$

$$= \|a_1\|^2 \|a_2\|^2 \left(1 - \frac{(ab+cd)^2}{\|a_1\|^2 \|a_2\|^2}\right)$$

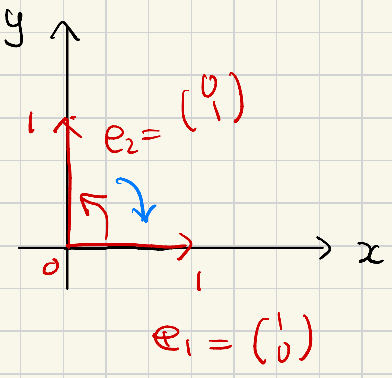
$$= \|a_1\|^2 \|a_2\|^2 - (ab+cd)^2$$

$$= (a^2+c^2)(b^2+d^2) - (ab+cd)^2$$

$$= (ad-bc)^2 = (\det A)^2$$

$$\therefore \quad S = |\det A| \quad \leftarrow$$

a_1 と a_2 がつくる平行四辺形の"符号付き"面積。



$$|e_1 \ e_2| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$|e_2 \ e_1| = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

§3.2 3次の行列式

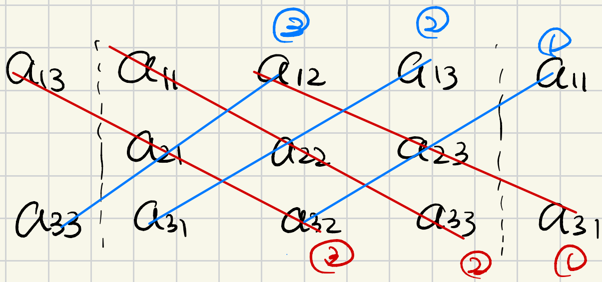
3次正方行列 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ に対して

$$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{13}a_{21}a_{32}+a_{12}a_{23}a_{31}$$
$$-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$$

を A の行列式という.

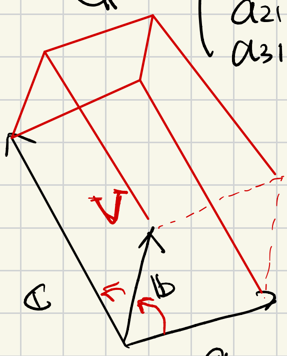
サラスの公式

Sarrus



3次の行列式の図形的解釈

$$\mathbf{a}=\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix},\quad \mathbf{b}=\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix},\quad \mathbf{c}=\begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix}$$



$$V = \begin{cases} |\mathbf{a}\ \mathbf{b}\ \mathbf{c}| & (右手系) \\ -|\mathbf{a}\ \mathbf{b}\ \mathbf{c}| & (左手系) \end{cases}$$

体積

Ex

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$ (2) $\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$

(3) $\begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix}$ (4) $\begin{matrix} 2 & 5 & 6 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \end{matrix}$