§.2. 様々な行列たち

§.2.1 転置と共役

Def (転置行列)

$(m\times n)$ 行列 $A=(a_{ij})_{ij}$ に対し、A の行と列を入れ換えてできる $(n\times m)$ 行列 $(a_{ji})_{ji}$ を A の転置行列といい ${}^tA$ とかく。 $\square$

Eg. (例)

$$A=\begin{pmatrix}\boxed{1\ \ 2\ \ 3}\\ \boxed{4\ \ 5\ \ 6}\end{pmatrix} \rightsquigarrow {}^tA=\begin{pmatrix}1&4\\2&5\\3&6\end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix}\boxed{1\ \ 2}\\ \boxed{3\ \ 4}\end{pmatrix} \rightsquigarrow {}^tB=\begin{pmatrix}1&3\\2&4\end{pmatrix}$$

$$C=\begin{pmatrix}\boxed{1\ \ 2\ \ 3}\end{pmatrix} \rightsquigarrow {}^tC=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$$

$\square$

Prop. (命題) A, B : 行列

- ${}^t({}^tA)=A$
- ${}^t(A+B)={}^tA+{}^tB$
- ${}^t(AB)={}^tB\,{}^tA$ (証明略) $\square$

Def. (共役行列)

複素行列 $A=(a_{ij})_{ij}$ の各成分 a_{ij} を
その複素共役 $\overline{a_{ij}}$ に置き換えてできる行列 $(\overline{a_{ij}})_{ij}$
を A の共役行列といい $\overline{A}$ とかく. $\square$

Eg.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \overline{A}=\begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix} 1+i & 2 & 0 \\ -1 & 2i & 1-i \end{pmatrix} \rightsquigarrow \overline{B}=\begin{pmatrix} 1-i & 2 & 0 \\ -1 & -2i & 1+i \end{pmatrix}$$

$$C=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \overline{C}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \square$$

Prop A, B : 行列.

- $\overline{(\overline{A})}=A$
- $\overline{(A+B)}=\overline{A}+\overline{B}$
- $\overline{(kA)}=\overline{k}\,\overline{A}$ $(k\in\mathbb{C})$
- $\overline{AB}=\overline{A}\,\overline{B}$ (証明略) $\square$

Def (随伴行列 又は エルミート共役行列)

行列 $A=(a_{ij})_{ij}$ に対して

$$A^* := \overline{{}^tA} = (\overline{a_{ji}})_{ji}$$

を A の 随伴行列 または エルミート共役行列という □

(発表)

Eg

$$A=\begin{pmatrix} 2+i & 1 & i \\ -1 & 1 & 2+i \end{pmatrix} \rightsquigarrow A^*=\begin{pmatrix} 2-i & -1 \\ 1 & 1 \\ -i & 2-i \end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix} -i & 2i \\ 3i & i \end{pmatrix} \rightsquigarrow B^*=\begin{pmatrix} i & -3i \\ -2i & -i \end{pmatrix} \quad \square$$

§.2.2 特殊な正方行列

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

上三角行列

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

下三角行列

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

対角行列

!!

$\mathrm{diag}(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn})$

Eg.

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

上三角　　下三角　　対角

◎ スカラー行列：$\mathrm{diag}(a, a, \cdots, a) = \begin{pmatrix} a & & 0 \\ & a & \\ 0 & & a \end{pmatrix}$

Eg. $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & 2b \\ 2c & 2d \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

スカラー倍！

◎ 単位行列：$\mathrm{diag}(\underbrace{1, 1, \cdots, 1}_{n}) = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} = E_n$

Rmk. $E_n A = A E_n = A$　　（A：$(n \times n)$行列）

◎ 特殊な実行列

$$A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \quad (a_{ij} \in \mathbb{R})$$

条件	名称
$A\,{}^tA = {}^tAA = E_n$	A：直交行列
${}^tA = A$	A：対称行列
${}^tA = -A$	A：交代行列

$\square$

Eg

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

対称　　　直交　　　交代

◎ 特殊な複素行列

$$A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \quad (a_{ij} \in \mathbb{C})$$

条件	名称
$AA^* = A^*A = E$	A：ユニタリー行列
$A^* = A$	A：エルミート行列
$A^* = -A$	A：反エルミート行列

□

Eg.

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$$

ユニタリー

例をつくってもらう HW