線形代数1

- 担当　山口 航平
- HP　https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yamaguchi.kohei/index.html
- 評価　$t := \max\{中間, 定期\} \times 0.5 + \{定期\} \times 0.5$

  $t \geqq 60 \Rightarrow$ 単位取得（合格）

§1. 行列の定義と演算

§1.1 行列の定義

Definition

Def. (行列)

- $m\cdot n$ 個の数または文字 a_{ij} $\left(\begin{matrix}1\le i\le m\\ 1\le j\le n\end{matrix}\right)$ を
  - 実数
  - 複素数

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

と長方形に並べたものを

$(m\times n)$行列という.

- 行列を構成する各々の数を成分という.
- 成分の横並びが行で縦並びが列.
- i行とj列とが共有する成分 a_{ij} を (i,j)成分という

行と列の覚え方

行　　列

ヨコ　タテ

記法

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le m \\ 1\le j\le n}} = (a_{ij})_{i,j}$$

メンドウ　　　カンタン

Ex.(行列)

(1,3)成分

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \text{1列} & \text{2列} & \text{3列} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{1行} \\ \text{2行} \end{array} & \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix} \end{array}, \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2+i & 1 \\ 0 & 2-i \end{pmatrix}$$

(2,2)成分

(2×3)行列　　(2×2)行列　　(2×2)行列

Def.(行列の相等)

2つの行列 $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})$ が等しいとは
どちらも同じ $(m\times n)$行列で, $a_{ij}=b_{ij}$ $\left(\begin{array}{l} 1\le i\le m \\ 1\le j\le n \end{array}\right)$
がすべて成り立つことをいい, $\boxed{A=B}$ とかく.

§1.2 行列の演算

たし算, ひき算, かけ算, ‥‥

Def.(行列の加法,減法,スカラー倍)

$A=(a_{ij})_{ij}$, $B=(b_{ij})_{ij}$ はともに $(m\times n)$行列のとき

- $A+B := (a_{ij}+b_{ij})_{ij}$ (加法)
- $A-B := (a_{ij}-b_{ij})_{ij}$ (減法)
- $\underbrace{k}_{\text{スカラー}}A := \underbrace{A+\cdots+A}_{k\text{コ}} = (ka_{ij})_{ij}$ (スカラー倍)

Ex $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ とする.

$$A+B = \begin{pmatrix} 2+1 & 1+1 & 4+2 \\ -3-2 & 0-2 & -1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 \\ -5 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A-B = \begin{pmatrix} 2-1 & 1-1 & 4-2 \\ -3+2 & 0+2 & -1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

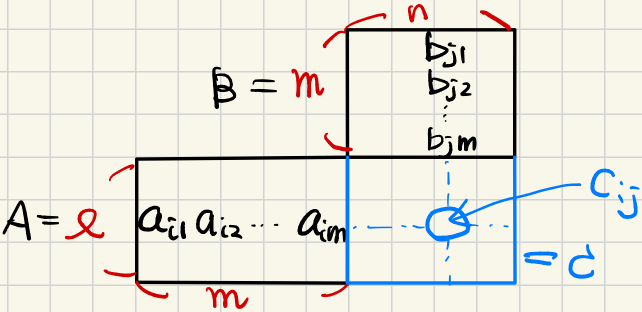
$$-3A = \begin{pmatrix} -3\cdot 2 & -3\cdot 1 & -3\cdot 4 \\ -3\cdot(-3) & -3\cdot 0 & -3\cdot(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -3 & -12 \\ 9 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Def (行列の乗法)

$(\ell\times m)$ 行列 $A = (a_{ij})_{ij}$ と $(m\times n)$ 行列 $B = (b_{ij})_{ij}$ に対して, A の i 行と B の j 列を用いて

$$c_{ij} := \sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{im}b_{mj}$$

を (i,j) 成分とする $(\ell\times n)$ 行列 $C := (c_{ij})_{ij}$ を <u>A, B の積といい $C = AB$ とかく.</u>



Ex

○ $$\underbrace{2\left\{\overbrace{\begin{pmatrix}1&2&1\\-1&1&0\end{pmatrix}}^{3}\right.}_{A}\;\underbrace{3\left\{\overbrace{\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\2&-1\end{pmatrix}}^{2}\right.}_{B} = \begin{pmatrix}1\cdot1+2\cdot0+1\cdot2 & 1\cdot0+2\cdot1+1\cdot(-1)\\ -1\cdot1+1\cdot0+0\cdot2 & -1\cdot0+1\cdot1+0\cdot(-1)\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}3&1\\-1&1\end{pmatrix}$$

○ $$\begin{pmatrix}1&2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\-2\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\cdot(-1)+2\cdot(-2)+3\cdot(-3)\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}-1-4-9\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}-14\end{pmatrix} = -14.$$

Rem

1° (Aの列数) = (Bの行数) のときのみ 積ABが定義できる.

2° 交換則 AB = BA は一般に成り立たない.
(もし AB = BA なら 行列A, Bは可換であるという)