セミナーの記録

山口航平

1　リー代数の基礎事項

定義 1.1 体 $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間 $\mathfrak{g}$ 上に積

$$\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}, (x, y) \mapsto [x, y]$$

が与えられていて以下の 3 つの条件を満たすとき $\mathfrak{g}$ を $\mathbb{K}$ 上のリー代数 *(Lie algebra)* という.
(1). $(x, y) \mapsto [x, y]$ は双線形写像.
(2). 任意の $x \in \mathfrak{g}$ に対して、$[x, x] = 0$.
(3). 任意の $x, y, z \in \mathfrak{g}$ に対して、

$$[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$$

*(*上をヤコビ律あるいはヤコビの恒等式という*)*

例 1.1 ベクトル空間 $\mathfrak{g}$ 上のブラケット積を、任意の $x, y \in \mathfrak{g}$ に対して $[x, y] = 0$ と定義するとき、$\mathfrak{g}$ はリー代数になる。このようなリー代数を**可換リー代数**という。

例 1.2 $\mathfrak{g} = \mathbb{K}e \bigoplus \mathbb{K}h$ のとき積を任意に $[e, h] = ae + bh$ と決めれば、リー代数の構造をもつ。

例 1.3 Λ を添字集合とし $\{c, a_\lambda, b_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$ を基底にもつベクトル空間 $\mathfrak{g}$ を考える。このとき $\mathfrak{g}$ 上のリー代数の構造が次で一意に決まる。

$$\begin{aligned} [c, a_\lambda] &= [c, b_\lambda] = 0 \\ [a_\lambda, a_\mu] &= [b_\lambda, b_\mu] = 0 \\ [a_\lambda, b_\mu] &= \delta_{\lambda,\mu} c \end{aligned}$$

この $\mathfrak{g}$ を**ハイゼンベルグ代数** *(Heisenberg algebra)* と呼ぶ。

例 1.4 $\{c, L_n | n \in \mathbb{Z}\}$ を基底にもつベクトル空間 $\mathfrak{g}$ を考える。このとき $\mathfrak{g}$ の構造が一意に決まる。

$$\begin{aligned} [c, L_n] &= 0 (n \in \mathbb{Z}) \\ [L_m, L_n] &= (m - n) L_{m+n} + \delta_{m+n,o} \frac{m^3 - m}{12} c \end{aligned}$$

この $\mathfrak{g}$ を**ヴィラソロ代数**という。$L_n = -x^{n+1} \frac{\partial}{\partial x}$ とすれば $[L_m, L_n] = (m - n) L_{m+n}$ となる。

定義 1.2 リー代数 $\mathfrak{g}$ の部分集合 $\mathfrak{h}$ が $\mathfrak{g}$ の**部分リー代数** *(*あるいは部分代数*)* とは $\mathfrak{h}$ が

$$x, y \in \mathfrak{h} \Rightarrow [x, y] \in \mathfrak{h}$$

を満たすことである。

例 1.5 以下はすべて $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{K})$ の部分リー代数である。

$$\begin{aligned}\mathfrak{sl}_n(\mathbb{K}) &= \{a \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{K}) | \mathrm{Tr}(a) = 0\} \\ \mathfrak{o}_n(\mathbb{K}) &= \{a \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{K}) | {}^t a + a = 0\} \\ \mathfrak{sp}_{2m}(\mathbb{K}) &= \{a \in \mathfrak{gl}_{2m}(\mathbb{K}) | {}^t a J + J a = 0\}\end{aligned}$$

ただし、$J = \begin{pmatrix} 0 & -E_m \\ E_m & 0 \end{pmatrix}$,$E_m$ は m 次単位行列。

例 1.6 以下もすべて $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{K})$ の部分リー代数である。

$$\begin{aligned}\mathfrak{b}_n(\mathbb{K}) &= \{a = (a_{ij}) \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{K}) | a_{ij} = 0, (i > j)\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} * & * & \cdots & * & * \\ 0 & * & \cdots & * & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & * & * \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & * \end{pmatrix} \right\} \\ \mathfrak{n}_n(\mathbb{K}) &= \{a = (a_{ij}) \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{K}) | a_{ij} = 0, (i \geq j)\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & * & \cdots & * & * \\ 0 & 0 & \cdots & * & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & * \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \\ \mathfrak{h}_n(\mathbb{K}) &= \{a = (a_{ij}) \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{K}) | a_{ij} = 0, (i \neq j)\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} * & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & * & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & * & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & * \end{pmatrix} \right\}\end{aligned}$$

補題 1.1 リー代数 $\mathfrak{g}$ の部分集合 Γ で生成される $\mathfrak{g}$ の部分リー代数は

$$[a_1, [a_2, [a_3, \ldots [a_{r-1}, a_r] \cdots], (1 \leqq r < \infty, a_i \in \Gamma)$$

の形の元の 1 次結合である。

(証明) $[a_1, a_2, \ldots, a_{r-1}, a_r] := [[a_1, [a_2, [a_3, \ldots [a_{r-1}, a_r] \cdots]$ と略記する。$[a_1, a_2, \ldots, a_{r-1}, a_r], (a_i \in \Gamma)$ の形の元の 1 次結合の全体を T,Γ で生成される $\mathfrak{g}$ の部分リー代数を $\mathfrak{h}$ とする。$a_i \in \mathfrak{h}$ であるが $\mathfrak{h}$ は部分リー代数なので $[a_1, a_2, \ldots, a_{r-1}, a_r] \in \mathfrak{h}$ よって $T \subset \mathfrak{h}$ である。逆の包含関係を示す。$\Gamma \subset T$ は明らか。だから T が部分リー代数であることを示せば十分。すなわち

$$[[a_1, \ldots, a_r]], [b_1, \ldots, b_s]] \in T, (a_i, b_j \in \Gamma)$$

をいえばよい。r に関する帰納法で示す。$r = 1$ のとき $[a_1, [b_1, \ldots, b_s]] \in [\Gamma, T] \subset T$ より O.K.

2 カルタン行列からきまるリー代数

定義 2.1 行列 $A = (a_{ij})_{i,j \in I}, a_{ij} \in \mathbb{C}$ がカルタン行列 *(Cartan Matrix)* とは以下の三つの条件を満たす行列 A のことである。

$$\begin{aligned}&(1).a_{ii} = 2, \forall i \in I \\ &(2).a_{ij} \in \mathbb{Z}_{\leq 0}, i \neq j \\ &(3).a_{ij} = 0 \Leftrightarrow a_{ji} = 0\end{aligned}$$

例 2.1 $I^{\#}=1$ ならば (2) のみ。$I^{\#}=2$ ならば $A=\begin{pmatrix}2 & -m\\ -n & 2\end{pmatrix}, n,m\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ の形。

例 2.2 $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & -1 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -1\\ & & & -1 & 2\end{pmatrix}$

カルタン行列が与えられたとき、それに付随する次の三つ組を考えよう。

定義 2.2 $A=(a_{ij})_{i,j\in I}$ をカルタン行列とする。$\mathfrak{H}$ を有限次元ベクトル空間で $\{h_i\}_{i\in I}$ を $\mathfrak{H}$ の一次独立な部分集合、$\{\alpha_i\}_{i\in I}$ を $\mathfrak{H}$ の双対空間 $\mathfrak{H}^*$ の一次独立な集合とする。このとき $(\alpha_j(h_i))_{i,j\in I}=A$ となるとき三つ組 $\Phi=(\mathfrak{H},\{h_i\}_{\in I},\{\alpha_i\}_{i\in I})$ をカルタン行列 A の基本ルート・データあるいは A の実現という。

さて、これでカルタン行列からリー代数をつくる準備が整った。いよいよカルタン行列 A に付随するリー代数 $\widetilde{\mathfrak{g}}(A)$ の登場だ。

定義 2.3 $A=(a_{ij})_{i,j\in I}$ をカルタン行列とし $\Phi=(\mathfrak{H},\{h_i\}_{\in I},\{\alpha_i\}_{i\in I})$ を A をカルタン行列とする基本ルート・データとする。このとき $\mathfrak{H}\cup\{\widetilde{e_i},\widetilde{f_i}\}_{i\in I}$ で生成され以下の基本関係式によってきまるリー代数を $\widetilde{\mathfrak{g}}(A)$ とかく。

$$[h,h']=0 \qquad h,h'\in\mathfrak{H} \tag{1}$$
$$[h,\widetilde{e_i}]=\alpha_i(h)\widetilde{e_i} \tag{2}$$
$$[h,\widetilde{f_i}]=-\alpha_i(h)\widetilde{f_i} \tag{3}$$
$$[\widetilde{e_i},\widetilde{f_j}]=\delta_{ij}h_i \tag{4}$$

2.1 $\widetilde{\mathfrak{g}}(A)$ の性質

命題 2.1 $\widetilde{\mathfrak{g}}(A)$ の自己準同型 $\widetilde{\omega}:\widetilde{\mathfrak{g}}(A)\to\widetilde{\mathfrak{g}}(A)$ が

$$\widetilde{\omega}(h)=-h,\ \widetilde{\omega}(\widetilde{e_i})=\widetilde{f_i},\ \widetilde{\omega}(\widetilde{f_i})=\widetilde{e_i}$$

で決まる。また $\widetilde{\omega}^2=id$ が成り立つ。

上の $\widetilde{\omega}$ をシュバレーインボリューションという。さて、

3 Kac-Moody Lie algebra $\mathfrak{g}$ の基本事項

- $\mathfrak{g}$：カルタン行列 $A=(a_{i,j})_{i,j\in I}$ から定まる **Kac-Moody Lie Algebra**
- $\mathfrak{H}$：$\mathfrak{g}$ の**カルタン部分代数**.(CSA)
- $\mathfrak{N}^+(resp.\mathfrak{N}^-)$:$\{e_i\}_{i\in I}(resp.\{f_i\}_{i\in I})$ で生成される $\mathfrak{g}$ の部分リー代数である。
- $\mathfrak{g}=\mathfrak{N}^-\oplus\mathfrak{H}\oplus\mathfrak{N}^+$(**三角分解**)

$$\Delta=\{\alpha\in\mathfrak{H}^*|\alpha\neq 0,\mathfrak{g}_\alpha\neq\{0\}\}\quad \text{(ルートの集合)}$$
$$\Delta^{\pm}=\Delta\cap(\pm Q^+)\quad \text{(正ルート }(resp.\text{ 負ルート) の集合)}$$

- $\mathfrak{g}_\alpha = \{x \in \mathfrak{g} \mid [h,x] = \alpha(h)x\}$ もし $\mathfrak{g}_\alpha \neq \{0\}$ ならば α を**ルート**といい、$\mathfrak{g}_\alpha$ を α をルートとする**ルート空間**という。
- $\mathfrak{g} = \mathfrak{H} \oplus (\bigoplus_{\alpha\in\Delta} \mathfrak{g}_\alpha)$ **ルート空間分解**ルート $\alpha = \sum_{i\in I} m_i\alpha_i$ に対して $Supp(\alpha) = \{i \in I \mid m_i \neq 0\}$ としこれを α の **台** という。

  $M = \bigoplus_{\lambda\in\mathfrak{H}^*} M_\lambda$ かつ $\dim M_\lambda < \infty, \forall\lambda$ である $U(\mathfrak{g})$ 加群 M をウェイト加群という。さらに任意の $i \in I, m \in M$ に対して $\dim_K U(\mathfrak{A}_i)m < \infty$ であるとき M を**可積分** $U(\mathfrak{g})$ **加群**という。
- $M_\lambda = \{m \in M \mid hm = \lambda(h)m, h \in \mathfrak{H}\}$

  $M_\lambda \neq \{0\}$ のとき λ を M の**ウェイト**といい、M_λ をウェイト λ の**ウェイト空間**という。
- $Wt(M) :=$ M のウェイト全体

4　2018/07/05

命題 4.1 $\mathfrak{g}$ の $\mathfrak{g}$ 上の随伴表現により $\mathfrak{g}$ は可積分 $U(\mathfrak{g})$ 加群である。

(証明) この命題を示すには任意の $i \in I, x \in \mathfrak{g}$ に対して $\dim_K \widetilde{\mathrm{ad}}(U(\mathfrak{g}))x < \infty$ であることをいえばよい。

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{g} \arrow[rr, "\mathrm{ad}"] \arrow[dr, "\sigma"'] & & \mathrm{End}(\mathfrak{g}) \\ & U(\mathfrak{g}) \arrow[ur, "\widetilde{\mathrm{ad}}"'] & \end{tikzcd}$$

$\dim_K \widetilde{\mathrm{ad}}(U(\mathfrak{g}))x < \infty$ を満たす $\mathfrak{g}$ の元たち全体を $\mathfrak{g}'$ とする。まず、$\mathfrak{g}'$ が $\mathfrak{g}$ の部分リー代数であることを示す。PBW の定理より $U(\mathfrak{A}_i) = \sum_{k,l,m\geq 0} Kf_i^k h_i^l e_i^m$ である。任意の元 $x, y \in \mathfrak{g}$ に対して、

$$\widetilde{\mathrm{ad}}(f_i^k h_i^l e_i^m)(x+y) = \mathrm{ad}(f_i)^k \mathrm{ad}(h_i)^l \mathrm{ad}(e_i)^m (x+y) = \mathrm{ad}(f_i)^k \mathrm{ad}(h_i)^l \mathrm{ad}(e_i)^m x + \mathrm{ad}(f_i)^k \mathrm{ad}(h_i)^l \mathrm{ad}(e_i)^m y$$

$$\widetilde{ad}(f_i^k h_i^l e_i^m)[x,y] = \sum_{p=0}^{k}\sum_{q=0}^{l}\sum_{r=0}^{m} \binom{k}{p}\binom{l}{q}\binom{m}{r} [\mathrm{ad}(f_i)^{k-p}\mathrm{ad}(h_i)^{l-q}\mathrm{ad}(e_i)^{m-r})x, \mathrm{ad}(f_i)^p \mathrm{ad}(h_i)^q \mathrm{ad}(e_i)^r)y]$$

であるから $\widetilde{\mathrm{ad}}(U(\mathfrak{g}))(x+y) = \widetilde{\mathrm{ad}}(U(\mathfrak{g}))x + \widetilde{\mathrm{ad}}(U(\mathfrak{g}))y, \widetilde{\mathrm{ad}}(U(\mathfrak{g}))[x,y] = [\widetilde{\mathrm{ad}}(U(\mathfrak{g}))x, \widetilde{\mathrm{ad}}(U(\mathfrak{g}))y]$ がいえたので $\mathfrak{g}'$ が $\mathfrak{g}$ の部分リー代数であることがいえた。あとは $\mathfrak{g}'$ が $\mathfrak{H} \sqcup \{e_i, f_i\}_{i\in I}$ を含むことをいえば証明はおわる。
$^\forall h \in \mathfrak{H}$ に対して

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathrm{ad}}(U(\mathfrak{g}))h &= \sum K\mathrm{ad}(f_i)^k \mathrm{ad}(h_i)^l \mathrm{ad}(e_i)^m h \\ &= \mathfrak{H} + Kf_i + Ke_i \end{aligned}$$

が成り立つ。また

$$\widetilde{\mathrm{ad}}(U(\mathfrak{g}))e_i = \sum K\mathrm{ad}(f_i)^k \mathrm{ad}(h_i)^l \mathrm{ad}(e_i)^m e_i = \mathfrak{A}_i$$

$$\widetilde{\mathrm{ad}}(U(\mathfrak{g}))f_i = \sum K\mathrm{ad}(f_i)^k \mathrm{ad}(h_i)^l \mathrm{ad}(e_i)^m f_i = \mathfrak{A}_i$$

で $i \neq j$ のときはセール関係式を用いることで

$$\widetilde{\mathrm{ad}}(U(\mathfrak{g}))e_j = \sum K\mathrm{ad}(f_i)^k \mathrm{ad}(h_i)^l \mathrm{ad}(e_i)^m e_j = \sum_{k=0}^{-a_{ij}} K\mathrm{ad}(e_i)^k(e_j)$$

$$\widetilde{\mathrm{ad}}(U(\mathfrak{g}))f_j = \sum K\mathrm{ad}(f_i)^k \mathrm{ad}(h_i)^l \mathrm{ad}(e_i)^m f_j = \sum_{k=0}^{-a_{ij}} K\mathrm{ad}(f_i)^k(f_j)$$

となり $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}'$ が示された。(証明終わり)

問 4.1 $M : U(\mathfrak{g})$ ウェイト加群とする。$^\forall i \in I, ^\forall m \in M_\lambda$ に対して以下は成り立つか？

$$\dim_K U(\mathfrak{A}_i)m < \infty \Leftrightarrow {}^\exists N \geqq 0 \ s.t. \ e_i^N = 0, f_i^N = 0$$

(答) 成り立つ。

5 2018/07/12

先生の最初の一言「昨夜はたまらなくアツかったねぇ。。」

<u>前回の復習</u>

- $U(\mathfrak{g})$ 加群 M が可積分 $U(\mathfrak{g})$ 加群 $\Leftrightarrow$ 任意の $i \in I, m \in M$ に対して $\dim_K U(\mathfrak{A}_i)m < \infty$
- $\mathfrak{g}$ を随伴表現により $U(\mathfrak{g})$ 加群とみなしたとき $\mathfrak{g}$ は可積分 $U(\mathfrak{g})$ 加群になる。
  t いままでの結果から次の命題が従う。

  命題 5.1 $\lambda \in \Delta \cup \{0\}, i \in I$ とし、$\mu = \lambda - \lambda(h_i)\alpha_i$ とおく。
  (1). 非負整数 p, q に対して、

  $$\begin{cases} k \in \mathbb{Z}, \lambda + k\alpha_i \in \Delta \cup \{0\} \Leftrightarrow k = -p, -p+1, \ldots, q-1, q \\ p - q = \lambda(h_i) \end{cases}$$

  (2). $\dim \mathfrak{g}_\lambda = \dim \mathfrak{g}_\mu$

  <u>ワイル群の登場</u>
  $i \in I$ に対して $\mathfrak{H}^*$ の線型変換 s_i を

  $$s_i(\lambda) = \lambda - \lambda(h_i)\alpha_i$$

  と定義しよう。$\mathfrak{H}^*$ の部分空間 $H_i = \{\lambda \in \mathfrak{H}^* \mid \lambda(h_i) = 0\} \quad (\mathrm{codim}_K(\mathfrak{H}^*) = 1)$ に関して $\alpha_i(h_i) = 2$ だから $\alpha_i \notin H_i$ である。このことから $\mathfrak{H}^* = H_i \oplus K_{\alpha_i}$ で s_i の定義から

  $$s_i(\lambda) = \lambda - \lambda(h_i)\alpha_i = \lambda \quad \lambda \in H_i$$

  $$s_i(\alpha_i) = \alpha_i - \alpha_i(h_i)\alpha_i = \alpha_i - 2\alpha_i = -\alpha_i$$

  が成り立っていることが確かめられる。そこで s_i を H_i に関する鏡映変換といったりする。

  定義 5.1 $\{s_i\}_{i \in I}$ により生成される $GL(\mathfrak{H}^*)$ の部分群を W とかき、これをカッツ・ムーディー・リー代数の**ワイル群**という。

  W は $\mathfrak{H}$ に自然に作用する。

  $$\lambda(w(h)) = (w^{-1}(\lambda))(h) \quad (w \in W, h \in \mathfrak{H}, \lambda \in \mathfrak{H}^*)$$

  上の記法だとカッコが増えて煩雑である。そこで次の記法を今後積極的に採用する。

  $$<,>: \mathfrak{H} \times \mathfrak{H}^* \longrightarrow K \quad < h, \lambda >= \lambda(h)$$

  これで書き直すと

  $$< w(h), \lambda >=< h, w^{-1}(\lambda) >$$

  となり分かりやすくなった。
  $s_i(h) = h - \alpha_i(h)\alpha_i$ が成り立つ。これは任意の $\lambda \in \mathfrak{H}^*, h \in \mathfrak{H}$ に対して $s_i^2 = 1$ をつかって

  $$< h - \alpha_i(h)h_i, \lambda >=< h, s_i(\lambda) >$$

であることを確かめればよいが実際、

$$\begin{aligned} < h - \alpha_i(h)h_i, \lambda > &= < h, \lambda > - \alpha_i(h) < h_i, \lambda > \\ &= < h, \lambda > - \lambda(h_i) < h, \alpha_i > \\ &= < h, \lambda - \lambda(h_i)\alpha_i > \\ &= < h, s_i(\lambda) > \end{aligned}$$

となり正しいことがわかる。

命題 5.2 任意の $w \in W$ に対して以下が成り立つ。

$$w(\Delta) = \Delta$$

$$\dim \mathfrak{g}_\alpha = \dim \mathfrak{g}_{w(\alpha)} \quad (\alpha \in \Delta)$$

(証明) 任意の元 $w \in W$ はワイル群の定義から $w = s_{i_1} s_{i_2} \cdots s_{i_l}$ とかける。任意の $\alpha \in \Delta$ に対して

$$\dim \mathfrak{g}_{w(\alpha)} = \dim \mathfrak{g}_{s_{i_1} \cdots s_{i_l} \alpha} = \dim \mathfrak{g}_{s_{i_2} \cdots s_{i_l} \alpha} = \cdots = \dim \mathfrak{g}_\alpha$$

なので $\dim \mathfrak{g}_\alpha = \dim \mathfrak{g}_{w(\alpha)}$ がいえた。これからもう一つの等式は従う。(証明終わり)
$\mathfrak{g}$ は $\mathfrak{g}$ の可積分表現であることから $\mathfrak{g}$ の全単射線型写像

$$\tau_i = \exp(\mathrm{ad}(e_i)) \exp(\mathrm{ad}(-f_i)) \exp(\mathrm{ad}(e_i)) : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$$

が決まる。一般に双線型な積 $\cdot$ をもつ K 代数 $\mathscr{A}$ を考えたときその冪零な $K-$ 線型写像 $f : \mathscr{A} \to \mathscr{A}$ であって

$$f(x \cdot y) = f(x) \cdot y + x \cdot f(y) \quad (x, y \in \mathscr{A})$$

を満たすならば $\exp(f)(x \cdot y) = \exp(f)x \cdot \exp(f)y$ である。

命題 5.3 $i \in I$ とする。このとき以下が成り立つ。
(1). $\tau_i : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ はリー代数 $\mathfrak{g}$ の自己同型。
(2). M を $\mathfrak{g}$ の可積分表現とする。このとき

$$\tau_i(am) = \tau_i(a)\tau_i(m) \quad (a \in \mathfrak{g}, m \in M)$$

(3). $\tau_i(\mathfrak{g}_\alpha) = \mathfrak{g}_{s_i(\alpha)}$
(4). τ_i の $\mathfrak{H} = \mathfrak{g}_0$ への制限 $\tau_i|_{\mathfrak{H}}$ は s_i と一致する。

(証明) τ_i が $\mathfrak{g}$ の自己同型であることをいうには

$$\tau_i([x, y]) = [\tau_i(x), \tau_i(y)]$$

であることを言えば良いがもっと一般に $\mathrm{ad}(a)$ $(a \in \mathfrak{g})$ が

$$\exp(\mathrm{ad}(a))([x, y]) = [\exp(\mathrm{ad}(a))x, \exp(\mathrm{ad}(a))y]$$

がいえれば (1) は示せる。ad に関する公式

$$\mathrm{ad}(a)^k([x, y]) = \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} \frac{1}{l!} [\mathrm{ad}(a)^{k-l}, \mathrm{ad}(a)^l y]$$

を使えば

$$\begin{aligned}\exp(\mathrm{ad}(a))([x,y]) &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\mathrm{ad}(a)^k([x,y]) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\sum_{l=0}^{k}\binom{k}{l}\frac{1}{l!}[\mathrm{ad}(a)^{k-l},\mathrm{ad}(a)^l y] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\sum_{i+j=k}\frac{k!}{i!j!}[\mathrm{ad}(a)^i x,\mathrm{ad}(a)^j y] \\ &= [\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{i!}\mathrm{ad}(a)^i x,\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!}\mathrm{ad}(a)^j y] \\ &= [\exp(\mathrm{ad}(a))x,\exp(\mathrm{ad}(a))y]\end{aligned}$$

ゆえ $\exp(\mathrm{ad}(a))$ がリー代数としての準同型であることがいえた。全単射であることは $\exp(-\mathrm{ad}(a))$ が $\exp(\mathrm{ad}(a))$ の逆変換になることからあきらか。したがって $\exp(\mathrm{ad}(a))$ はリー代数として同型写像。これから τ_i がリー代数として同型写像となることもいえた。つづいて (2) を示そう。$x = e_i\ or\ -f_i$ のとき $\exp(x)(am) = \exp(\mathrm{ad}(x))(a)\exp(\mathrm{ad}(x))(m) \quad (a \in \mathfrak{g}, m \in M)$ をいえばよい。

$$x(am) = ([x,a]+ax)m = (\mathrm{ad}(x)a)m + a(xm)$$

うえは x の左作用がデリベーションになっていることをいっている。つまり

$$x^k(am) = \sum_{l=0}^{k}\binom{k}{l}(\mathrm{ad}(x)^{k-l}(a))x^l m$$

が成り立っていてあとは (1) と同様の計算で示せる。(3) を証明しよう。

6　2018/07/19

前回の復習

- $s_i(\lambda) := \lambda - \lambda(h_i)\alpha_i \quad i \in I, \lambda \in \mathfrak{H}^*$
- W : $\{s_i\}_{i\in I}$ で生成される $GL(\mathfrak{H}^*)$ の部分群
- W は $\mathfrak{H}$ に自然に作用する。$< w(h), \lambda >=< h, w^{-1}(\lambda) >$
- $s_i(h) = h - \alpha_i(h)h_i$

命題の証明が途中であった。ここは大切なところだからじっくり時間をかけて理解したい。今一度命題のステートメントを再掲する。

命題 6.1 $i \in I$ とする。このとき以下が成り立つ。
(1). $\tau_i : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ はリー代数 $\mathfrak{g}$ の自己同型。
(2). M を $\mathfrak{g}$ の可積分表現とする。このとき

$$\tau_i(am) = \tau_i(a)\tau_i(m) \quad (a \in \mathfrak{g}, m \in M)$$

(3). $\tau_i(\mathfrak{g}_\alpha) = \mathfrak{g}_{s_i(\alpha)}$
(4). τ_i の $\mathfrak{H} = \mathfrak{g}_0$ への制限 $\tau_i|_{\mathfrak{H}}$ は s_i と一致する。

(証明) (3) を示す。$V = \sum_{k\in\mathbb{Z}}\mathfrak{g}_{\lambda+k\alpha_i}$ とする。このとき V は局所有限な $U(\mathfrak{A}_i)$ 加群である。$\mathfrak{A}_i$ と $\mathfrak{sl}_2(K)$ を同一視するとき $\mathfrak{g}_{\lambda+k\alpha_i} = V_{\lambda(h_i)+2k}$ が成り立つ。$\tau(V_c) = V_{-c}$ であることを使えば、$\tau_i(\mathfrak{g}_\lambda) = \tau(V_{\lambda(h_i)}) = V_{-\lambda(h_i)} = \mathfrak{g}_{\lambda-\lambda(h_i)\alpha_i} = \mathfrak{g}_{s_i(\lambda)}$ となり示せた。

(4) を示す。$U=\{h\in\mathfrak{H}\mid\alpha_i(h)=0\}$ とする。このとき $\mathfrak{H}=U\oplus Kh_i$ である。$s_i(h_i)=-h_i, s_i(h\in U)$ だから $\tau_i(h_i)=-h_i, \tau_i(h)=h(h\in U)$ であることを見ればよい。

$$
\begin{aligned}
\tau_i(h_i) &= \exp(\mathrm{ad}(e_i))\exp(-\mathrm{ad}(f_i))\exp(\mathrm{ad}(e_i))h_i \\
&= \exp(\mathrm{ad}(e_i))\exp(-\mathrm{ad}(f_i))(h_i+[e_i,h_i]+\frac{1}{2!}[e_i,[e_i,h_i]]+\cdots) = \exp(\mathrm{ad}(e_i))\exp(-\mathrm{ad}(f_i))(h_i-2e_i) \\
&= \exp(\mathrm{ad}(e_i))(h_i-2e_i+[-f_i,h_i-2e_i]+\frac{1}{2!}[f_i,[f_i,h_i-2e_i]]\cdots) = \exp(\mathrm{ad}(e_i))(-h_i-2e_i) \\
&= -h_i-2e_i+[e_i,-h_i-2e_i]+\cdots) = -h_i
\end{aligned}
$$

次は $h\in U$ のときの $\tau_i(h)$ を計算する。

$$
\begin{aligned}
\tau_i(h) = &= \exp(\mathrm{ad}(e_i))\exp(-\mathrm{ad}(f_i))\exp(\mathrm{ad}(e_i))h \\
&= \exp(\mathrm{ad}(e_i))\exp(-\mathrm{ad}(f_i))(h+[e_i,h]+\frac{1}{2!}[e_i,[e_i,h]]+\cdots) \\
&= \exp(\mathrm{ad}(e_i))\exp(-\mathrm{ad}(f_i))(h+\alpha_i(h)e_i+\cdots)
\end{aligned}
$$

U の定義より $\alpha_i(h)=0$ だから結局 h しか残らない。これで $\tau_i(h)=h \;\; h\in U$ がいえた。
これですべて命題が証明したかに思えたが実際は (3) は一般の可積分表現が $\mathfrak{sl}_2$ の場合に帰着するということを示しただけで本質的な証明になっていないという指摘をうけた。

補題 6.1 V を $\mathfrak{sl}_2(K)$ の有限次元表現とし、$V_c=\{v\in V\mid hv=cv\}$ とする。このとき $\tau(V_c)=V_{-c}$ である

(証明) 命題の (2),(4) から次の 2 式が従う。

$$\tau(hv)=\tau(cv)=c\tau(v)\quad v\in V_c \tag{5}$$
$$\tau(hv)=\tau^{ad}(h)\tau(v)=-h\tau(v) \tag{6}$$

(5),(6) を比較すると $h\tau(v)=-c\tau(v)$ であることがわかるので $\tau(V_c)\subset V_{-c}$ がいえた。 (証明終わり)
実は一般の可積分表現でも命題 (3) は成り立つ。

補題 6.2 M を可積分 $U(\mathfrak{g})$ 加群とする。このとき $\lambda\in\mathfrak{H}^*$ に対して

$$\tau_i(M_\lambda)=M_{s_i(\lambda)}$$

が成り立つ。

(証明) 任意の元 $m\in M_\lambda$ に対して $\tau_i(m)$ がどのウェイト空間に所属するかをみる。

$$\tau_i(hm)=\tau_i^{\mathrm{ad}}(h)\tau_i(m) \tag{7}$$
$$\tau_i(hm)=\tau_i(\lambda(h)m)=\lambda(h)\tau_i(m) \tag{8}$$

(7) は命題 (4) より $\tau_i^{ad}(h)\tau_i(m)=s_i(h)\tau_i(m)$ である。$s_i(h)=h-\alpha_i(h)h_i$ であることは前回やった。

$$
\begin{aligned}
\lambda(h)\tau_i(m) &= s_i(h)\tau_i(m) \\
&= (h-\alpha_i(h)h_i)\tau_i(m) \\
h\tau_i(m) &= (\lambda(h)+\alpha_i(h)h_i)\tau_i(m) \\
&= \lambda(h)\tau_i(m)+\alpha_i(h)(-\tau_i(h_i))\tau_i(m) \\
&= \lambda(h)\tau_i(m)-\alpha(h)\tau_i(h_im) \\
&= \lambda(h)\tau_i(m)-\lambda(h_i)\alpha_i(h)\tau_i \\
&= (\lambda-\lambda(h_i)\alpha)(h)\tau_i(m) \\
&= s_i(\lambda)(h)\tau_i(m)
\end{aligned}
$$

ゆえに $\tau_i(m) \in M_{s_i(\lambda)}$ がなりたつ。これで示せた。(証明終わり)
本質的に重要なのは命題の (2) である。本とは違う流れだが、命題の (2)⇒(4)⇒ 補題 6.2⇒(3) の流れの方がスムーズである。
補足
$Ad(g)x = gxg^{-1}, \mathrm{ad}(g)x = gx - xg$ として大文字の Ad と小文字の ad を区別する。何かしらの作用素 X, Y に対して次の公式は重要であるので覚えておきたい。

$$\begin{aligned}
Ad(e^X)(Y) &= e^X Y e^{-Y} \\
&= (1 + \frac{X}{1!} + \frac{X^2}{2!} + \frac{X^3}{3!} + \cdots)Y(1 - \frac{x}{1!} + \frac{X^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \cdots) \\
&= Y + \frac{1}{1!}[X, Y] + \frac{1}{2!}[X, [X, Y]] + \frac{1}{3!}[X, [X[X, Y]]] + \cdots \\
&= e^{ad(X)}Y
\end{aligned}$$

また $e^X Y$ の Y を前に持っていくときどうなるかをみよう。

$$\begin{aligned}
e^X Y &= e^X Y e^{-1} e^X \\
&= e^{\mathrm{ad}(X)} Y e^X
\end{aligned}$$

以上の計算から Y を前に出すと $e^{\mathrm{ad}(X)}$ がおつりで前に出でくるのだ！急だが $a \in U(\mathfrak{g})$ とする。以下の計算を見て欲しい。

$$\begin{aligned}
\exp(e_i)\exp(-f_i)\exp(e_i)a &= \exp(e_i)\exp(-f_i)\exp(\mathrm{ad}(e_i))a\exp(e_i) \\
&= \exp(e_i)\exp(-\mathrm{ad}(f_i))\exp(\mathrm{ad}(e_i))a\exp(e_i)\exp(-f_i) \\
&= \exp(\mathrm{ad}(e_i))\exp(-\mathrm{ad}(f_i))\exp(\mathrm{ad}(e_i))a\exp(e_i)\exp(-f_i)\exp(e_i)
\end{aligned}$$

つまり $\tau_i \cdot a = \tau_i^{\mathrm{ad}}(a) \cdot \tau_i$ であることを主張している。これは命題 (2) でみている。
今日はこの辺でお終い。次回は 8 月 2 日です。宜しくお願いいたします。

7 2018/08/03

7.1 正から負の道が狭い！

命題 7.1 任意の $i \in I$ に対して $s_i(\Delta^+ \backslash \{\alpha_i\}) = \Delta^+ \backslash \{\alpha_i\}$

(証明) $\alpha \in \Delta^+ \backslash \{\alpha_i\}$ とする。$\alpha = \sum_{j \in I} n_j \alpha_j$ とかく。任意の $j \in I \backslash \{i\}$ に対して $n_j = 0$ ならば $\mathbb{Z}\alpha_i \cap \Delta = \{\pm\alpha_i\}$ より $\alpha = \alpha_i$ となるがこれは仮定に反するので、ある $j \in I \backslash \{i\}$ があって $n_j \neq 0$ を満たす。

$$\begin{aligned}
s_i(\alpha) &= \alpha - \alpha(h_i)\alpha_i \\
&= \sum_{j \neq I} n_j \alpha_j + n_i \alpha_i - \alpha(h_i)\alpha_i \\
&= \sum_{j \neq i} n_j \alpha_j + (n_i - \alpha(h_i))\alpha_i
\end{aligned}$$

以上の計算と $\Delta = \Delta^+ \sqcup \Delta^-$ から $s_i(\alpha) \in \Delta^+ \backslash \{\alpha_i\}$ がいえた。$s_i^2 = 1$ なので $s_i(\Delta^+ \backslash \{\alpha_i\}) = \Delta^+ \backslash \{\alpha_i\}$ である。(証明終わり)

上は $s_i, i \in I$ で正ルートから負ルート (あるいは負ルートから正ルート) に写るのは α_i $(-\alpha_i)$ のみである事を主張している。

7.2　実ルートと虚ルート

定義 7.1 $\alpha \in \Delta$ であって $\alpha = w(\alpha_i)$ $(w \in W, i \in I)$ とかけるもののことを**実ルート**といい、そうでないものを**虚ルート**という。

Δ_{re} : 実ルート全体、Δ_{im} : 虚ルート全体

- $\Delta_{re} = \cup_{i \in I} W(\alpha_i), \Delta_{im} = \Delta \backslash \Delta_{re}$
- $\Delta^{\pm}_{re} = \Delta_{re} \cap \Delta^{\pm}, \Delta^{\pm}_{im} = \Delta_{im} \cap \Delta^{\pm}$

以下が成り立つ。

$$\dim \mathfrak{g}_\alpha = 1 \quad (\alpha \in \Delta_{re}) \tag{9}$$
$$W(\Delta_{re}) = \Delta_{re} \tag{10}$$
$$W(\Delta_{im}) = \Delta_{im} \tag{11}$$
$$\Delta^-_{re} = -\Delta^+_{re} \tag{12}$$
$$\Delta^-_{im} = -\Delta^+_{im} \tag{13}$$
$$W(\Delta^+_{im}) = \Delta^+_{im}, W(\Delta^-_{im}) = \Delta^-_{im} \tag{14}$$

(9) は $\mathfrak{g}_\alpha = \mathfrak{g}_{w(\alpha)}, w \in W$ という事実に加えて $\alpha = w(\alpha_i)$ とかけているのだから $\mathfrak{g}_\alpha = \mathfrak{g}_{\alpha_i} = Ke_i \neq 0$ となり従う。(10) から (13) はワイル群の定義などからすぐに分かるだろう。(14) を示す。任意の元 $w \in W$ に対して $w(\Delta^+_{im}) \subset \Delta^+_{im}$ を示せばいい。$w = s_i$ としてよい。$s_i(\Delta^+_{im}) \subset \ s_i(\Delta^+ \backslash \{\alpha_i\}) \subset \Delta^+$ である。あとは (11) より主張が従う。

7.3　余ルートの登場

ある実ルート α に対して $\alpha = w(\alpha_i)$ を満たす $w \in W, i \in I$ が取れるが、このとき $\alpha^\vee = w(h_i) \in \mathfrak{H}$ が $\alpha = w(\alpha_i)$ を満たす $w \in W, i \in I$ のとりかたによらずに決まる。この $\alpha^\vee$ を $\alpha \in \Delta_{re}$ に対応する**余ルート** (coroot) という。
以下、本当に α に対応する余ルート $\alpha^\vee$ が $\alpha = w(\alpha_i)$ を満たす $w \in W, i \in I$ のとりかたによらずに決まるのかをみていく。

補題 7.1 $w \in W$ とする。$i, j \in I$ に関して $w(\alpha_i) = \alpha_j$ が成立しているとする。このとき $w(h_i) = h_j$ が成り立つ。

(証明) $w = s_{i_1} \cdots s_{i_r}$ とする。$\mathfrak{g}$ の自己同型写像 $\tau : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ を $\tau = \tau_{i_1} \cdots \tau_{i_r}$ で定義する。前回の結果から $\tau(\mathfrak{g}_{\pm\alpha_i}) = \mathfrak{g}_{\pm w(\alpha_i)} = \mathfrak{g}_{\pm\alpha_j}$ である。したがって $\tau(e_i) \in Ke_j, \tau(f_i) \in Kf_j$ が成り立つ。τ はリー代数としての同型写像であって、$\tau|_{\mathfrak{H}} = w$ より

$$w(h_i) = \tau(h_i) = \tau([e_i, f_i]) = [\tau(e_i), \tau(f_i)] \in Kh_j$$

したがって $w(h_i) = ch_j, c \in K$ とかける。しかし

$$2 =< \alpha_i, h_i >=< w^{-1}(\alpha_j), h_i >=< \alpha_j, w(h_i) >= c < \alpha_j, h_j >= 2c$$

であるから $c = 1$ でなければならない。(証明終わり)

$\alpha \in \Delta_{re}$ に対して二通りの表示 $\alpha = w(\alpha_i) = y(\alpha_j)$ をしたとき $y^{-1}w(\alpha_i) = \alpha_j$ で先ほどの補題から $y^{-1}w(h_i) = h_j$ が成り立つ。したがって $w(h_i) = y(h_j)$ である。以上から $\alpha^\vee$ が $\alpha = w(\alpha_i)$ を

満たす $w \in W, i \in I$ のとりかたによらずに決まることがわかった。また余ルート全体からなる集合 $\{\alpha^\vee \mid \alpha \in \Delta_{re}\}$ は W 不変である。さらに

$$w(\alpha^\vee) = (w(\alpha))^\vee \qquad (w \in W, \alpha \in \Delta_{re})$$

が成り立つ。$\alpha \in \Delta_{re}$ に対して $\mathfrak{H}^*$ の線型変換 s_α を

$$s_\alpha(\lambda) = \lambda - \lambda(\alpha^\vee)\alpha \qquad (\lambda \in \mathfrak{H}^*)$$

で定義する。

補題 7.2

$$s_\alpha \in W \qquad (\alpha \in \Delta_{re}) \tag{15}$$
$$s_{w(\alpha)} = w s_\alpha w^{-1} \qquad (w \in W, \alpha \in \Delta_{re}) \tag{16}$$

(証明) 先に (16) から示す。任意の元 $\lambda \in \mathfrak{H}^*$ に対して

$$\begin{aligned} w s_\alpha w^{-1}(\lambda) &= w((w^{-1}\lambda) - (w^{-1}\lambda)(\alpha^\vee)\alpha) \\ &= \lambda - \lambda((w(\alpha))^\vee) w(\alpha) \\ &= s_{w(\alpha)}(\lambda) \end{aligned}$$

これで示せた。次は (15) を示そう。$\alpha \in \Delta_{re}$ より $\alpha = w(\alpha_i)$ を満たす $w \in W$ と $i \in I$ がとれる。(16) を使うと

$$\begin{aligned} s_\alpha &= s_{w(\alpha_i)} \\ &= w s_i w^{-1} \in W \end{aligned}$$

となり、これで証明できた。

7.4 $w \in W$ の最短表示

W は s_i たちで生成される群なので $w \in W$ は

$$w = s_{i_1} \cdots s_{i_r} \qquad (i_1, \ldots i_r \in I) \tag{17}$$

とかける。このような表示のうちで r が最小になるものを w の最短表示とよぶ。そのときの r を長さといい $\ell(w)$ で表す。

$$\ell(w) := \{r \mid w = s_{i_1} \cdots s_{i_r} \quad i_1, \ldots i_r \in I\}$$

課題

任意の $w \in W$ に対してその最短表示を導くアルゴリズムを与えよ。

今日はここまで。次回は 8 月 30 日 (木) です。宜しくお願いいたします。

8 2018/08/30

8.1 最短表示の特徴付け

次の補題は主張以上に証明方法が重要である。

補題 8.1 $w = s_{i_1} \cdots s_{i_r}$ が $w \in W$ の最短表示ならば、$s_{i_1} \cdots s_{i_{r-1}}(\alpha_r) \in \Delta^+$ である。

(証明) $s_{i_1}\cdots s_{i_{r-1}}(\alpha_r)\in\Delta^-$ であると仮定する。α_{i_r} は正ルートだから、次のルートの列

$$\alpha_{i_r}, s_{i_{r-1}}(\alpha_{i_r}), s_{i_{r-2}}s_{i_{r-1}}(\alpha_{i_r}), \ldots, s_{i_1}\cdots s_{i_{r-1}}(\alpha_{i_r})$$

を左から順に見ていくと、正ルートから負ルートに変わるところがある。すなわち、ある $1\leqq k\leqq r-1$ であって

$$s_{i_{k+1}}\cdots s_{i_{r-1}}(\alpha_{i_r})\in\Delta^+\ ,\ s_{i_k}\cdots s_{i_{r-1}}(\alpha_{i_r})\in\Delta^-$$

をみたす。$\beta := s_{i_{k+1}}\cdots s_{i_{r-1}}(\alpha_{i_r})\in\Delta^+$ とすると $\beta\in\Delta^+$ かつ $s_{i_k}(\beta)\in\Delta^-$ であるから命題 7.1 より $\beta=\alpha_{i_k}$ である。補題 7.2 より

$$s_{i_k}=(s_{i_{k+1}}\cdots s_{i_{r-1}})s_{i_r}(s_{i_{k+1}}\cdots s_{i_{r-1}})^{-1}$$

すなわち

$$s_{i_k}s_{i_{k+1}}\cdots s_{i_{r-1}}=s_{i_{k+1}}\cdots s_{i_{r-1}}$$

が成り立つ。このとき

$$w=s_{i_1}\cdots s_{i_r}=(s_{i_1}\cdots s_{i_k})(s_{i_k}\cdots s_{i_{r-1}})=s_{i_1}\cdots s_{i_{k-1}}s_{i_{k+1}}\cdots s_{i_{r-1}}$$

となりこれは $w=s_{i_1}\cdots s_{i_r}$ が最短表示であることに矛盾する。(証明終わり)

補題 8.2 $w\in W, i\in I$ とすると $\ell(ws_i)=\ell(w)-1$ または $\ell(ws_i)=\ell(w)+1$ が成立する。

(証明) $w=s_{i_1}\cdots s_{i_r}\in W$ は最短表示とする。すなわち $\ell(w)=r$ であるとする。このとき $\ell(ws_i)\leqq\ell(w)+1$ である。ここで w と ws_i の立場を変えれば $\ell(ws_i)\geqq\ell(w)-1$ がでる。あとは $\ell(w)\neq\ell(ws_i)$ をいえば主張が従う。いま群準同型 $\epsilon : W\to K^*, w\mapsto\det(w)$ を考える。s_i たちは $\mathfrak{H}^*$ の鏡映変換だから $\epsilon(s_i)=-1$ である。このことから $\epsilon(w)=(-1)^{\ell(w)}$ であると分かる。

$$\epsilon(ws_i)=\epsilon(w)\epsilon(s_i)=(-1)^{\ell(w)+1}\neq(-1)^{\ell(w)}=\epsilon(w)$$

より $\ell(w)\neq\ell(ws_i)$ (証明終わり)
以上２つの補題から従う２つの系を書いておく。

系 8.1 $w=s_{i_1}\cdots s_{i_r}$ は最短表示 $\Leftrightarrow$ $\alpha_{i_1}, s_{i_1}(\alpha_{i_2}), s_{i_1}s_{i_2}(\alpha_{i_3}),\ldots,s_{i_1}\cdots s_{i_{r-1}}(\alpha_{i_r})$ はすべて正ルート

系 8.2 *(1).* $w(\alpha_j)\in\Delta^+\Rightarrow\ell(ws_i)=\ell(w)+1$ *(2).* $w(\alpha_j)\in\Delta^-\Rightarrow\ell(ws_i)=\ell(w)-1$

さて次は A 型の場合のワイル群の最短表示について具体的に考える。

$$W\curvearrowright\mathfrak{H}*=\{\lambda=\lambda_1\epsilon_1+\cdots+\lambda_l\epsilon_l\mid\lambda_1,\ldots,\lambda_l\in\mathbb{C},\lambda_1+\cdots+\lambda_l=0\}\subset V=\mathbb{C}\epsilon_1\oplus\cdots\oplus\mathbb{C}\epsilon_l$$

$$<\epsilon_i,\epsilon_j>:=\delta_{ij}\ ,\ s_i(\lambda)=\lambda-<\alpha_i^\vee,\lambda>\alpha_i\ ,\ \alpha_i:=\epsilon_i-\epsilon_{i+1}$$

$\mathfrak{H}$ と $\mathfrak{H}^*$ の元を同一視すれば $\alpha_i^\vee=\frac{2}{<\alpha_1,\alpha_i>}\alpha_i=\alpha_i$ だから $s_i(\lambda)=\lambda-<\alpha_i,\lambda>\alpha_i$ と書き直せる。これから $s_i(\epsilon_j)$ を計算していく。

$$<\alpha_i,\epsilon_j>=\begin{cases}1 & (j=i)\\ -1 & (j=i+1)\\ 0 & (j\neq i)\end{cases}$$

上の計算から

$$s_i(\epsilon_j)=\begin{cases}\epsilon_{i+1} & (j=i)\\ \epsilon_i & (j=i+1)\\ \epsilon_j & (j\neq i)\end{cases}$$

という結果を得る。これは s_i は $\mathfrak{H}^*$ の元への作用は添字の互換 (特に隣接互換) であることを意味する。

$$\begin{aligned}\Delta &= \{\epsilon_i - \epsilon_j \mid i, j \in \{1, \ldots, l\}, i \neq j\}\\ \Delta^+ &= \{\epsilon_i - \epsilon_j \mid i < j\}\\ \Delta^- &= \{\epsilon_i - \epsilon_j \mid i > j\}\end{aligned}$$

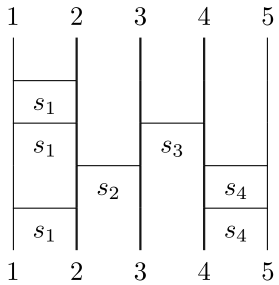
$\ell(w) = |\Delta^+ \cap w^{-1}(\Delta^-)|$ という最短表示に関する公式が知られている。$\alpha \in \Delta^+ \cap w^{-1}(\Delta^-)$ となる α の条件を書き下してみよう。

$$\begin{aligned}\alpha \in \Delta \cap w^{-1}(\Delta^-) &\Leftrightarrow \alpha \in \Delta^+, w(\alpha) \in \Delta^-\\ &\Leftrightarrow \alpha = \epsilon_i - \epsilon_j\ (i < j), w(\alpha) = \epsilon_{w(i)} - \epsilon_{w(j)}\ (w(i) > w(j))\end{aligned}$$

以上の議論から

$$\ell(w) = |\Delta^+ \cap w^{-1}(\Delta^-)| = |\{\alpha = \epsilon_i - \epsilon_j \mid i < j, w(i) > w(j)\}|$$

という結果を得た。$w = s_4 s_1 s_4 s_2 s_3 s_1 s_1$ は以下のあみだくじで実現できる。



このあみだくじを下の横線から辿り、交差するところはその横線を消せば最短表示を得る。また w の長さは転倒数に他ならないことが容易に分かるだろう。さて今日はここまで。次回は 9 月 7 日です。どうぞ宜しくお願いいたします。

9 2018/09/06

9.1 最高ウェイト表現

以前、$\mathfrak{g}$ の表現のうち可積分表現というものを学習した。(局所的に $\mathfrak{sl}_2$ とみなせるものだった。) 今日は $\mathfrak{g}$ の最高ウェイト表現について考える。

定義 9.1 $U(\mathfrak{g})$ 加群 V であって、ある $\lambda \in \mathfrak{H}^*$ と $v \in V$ に関して

$$v \in V \backslash \{0\}\ ,\ V = U(\mathfrak{g})v\ ,\ e_i v = o\ (i \in I) \tag{18}$$

が成り立っているもののことを λ を**最高ウェイト**にもつ**最高ウェイト加群**と呼ぶ。また v を V の**最高ウェイト・ベクトル**と呼ぶ。

$\mathfrak{H}^*$ 上の半順序が

$$\lambda \geqq \mu \Leftrightarrow \lambda - \mu \in Q^+$$

で決まる。これを**標準半順序**と呼ぶ。さて $U(\mathfrak{g})$ は三角分解で $U(\mathfrak{N}^-)U(\mathfrak{H})U(\mathfrak{N}^+)$ となるのであった。V を λ を最高ウェイトにもつ最高ウェイト加群で $v \in V$ を最高ウェイト・ベクトルとすると $V = U(\mathfrak{g})v = U(\mathfrak{N}^-)U(\mathfrak{H})U(\mathfrak{N}^+)v$ で $U(\mathfrak{N}^+)$ は $\{e_i\}_{i \in I}$ たちで生成されているから $V = U(\mathfrak{N}^-)v$ が成り立つ。また $\mathfrak{N}^-$ は $\{f_i\}_{i \in I}$ たちで生成されていて、$f_i V_\mu \subset V_{\mu - \alpha_i}$ であるから、

$$V = \bigoplus_{\mu \leqq \lambda} V_\mu, \qquad V_{\lambda - \gamma} = \sum_{\gamma = \alpha_{i_1} + \cdots + \alpha_{i_r}} K f_{i_1} \cdots f_{i_r} v \tag{19}$$

が成り立つ。V は特にウェイト加群であり、$V_\lambda = Kv$ である。λ は標準半順序に関して最大のものとして決まる。

9.2　ヴァーマ加群 $M(\lambda)$ の登場

定義 9.2 $\lambda \in \mathfrak{H}^*$ に対して $U(\mathfrak{g})$ 加群 $M(\lambda)$ と $m_\lambda \in M(\lambda)_\lambda$ を

$$M(\lambda) = U(\mathfrak{g})/(\sum_{h\in\mathfrak{H}} U((g))(h-\lambda(h)) + \sum_{i\in I} U(\mathfrak{g})e_i) \tag{20}$$

$$m_\lambda = \overline{1} \tag{21}$$

により定める。$M(\lambda)$ を λ を最高ウェイトにもつ**ヴァーマ加群**と呼ぶ。

ヴァーマ加群は最高ウェイト加群を構成する方法を具体的に与えている。これからヴァーマ加群について論じていく。

命題 9.1
(1). 線型写像 $U(\mathfrak{N}^-) \to M(\lambda)$ $(u \mapsto um_\lambda)$ は全単射である。
(2). $M(\lambda)$ は λ を最高ウェイトにもつ最高ウェイト加群である。また m_λ はその最高ウェイト・ベクトルである。
(3). λ を最高ウェイトにもつ最高ウェイト加群は、$M(\lambda)$ の商 $U(\mathfrak{g})$ 加群と同型である。

命題の証明の前にコメント。(2) は $M(\lambda)$ の定義から明らかである。また (2),(3) の主張から $M(\lambda)$ は λ を最高ウェイトにもつ最高ウェイト加群の中で一番大きく、ユニバーサルなものであることがわかる。(1) の証明がすこし複雑[*1]なのでじっくりやろう。
(証明) (1) を示す。まず $\mathfrak{B} = \mathfrak{H} \oplus \mathfrak{N}^+$ とする。$\mathfrak{B}$ は $\mathfrak{g}$ の部分代数である。$\mathfrak{B}$ 上の線型形式 $f : \mathfrak{B} \to K$ を

$$f(h) = \lambda(h) \quad (h \in \mathfrak{H}), \qquad f(x) = 0 \quad (x \in \mathfrak{N}^+)$$

で定義する。f はリー代数としての準同型である。また $\mathfrak{B}$ の一次元表現 $\rho_f : \mathfrak{B} \to \mathrm{End}_K(K_{m_\lambda}) \cong K$ が $\rho_f(x)\cdot m_\lambda = f(x)m_\lambda$ で決まる。さて

$$M(\lambda) = U(\mathfrak{g})/\mathscr{I}, \qquad \mathscr{I} = \sum_{h\in\mathfrak{H}} U(\mathfrak{g})(h-\lambda(h)) + \sum_{i\in I} U(\mathfrak{g})e_i$$

であるが、

$$\mathscr{J} = \sum_{x\in\mathfrak{B}} U(\mathfrak{B})(x - f(x))$$

とおけば $\mathfrak{N}^+$ が $\{e_i\}_{i\in I}$ で生成されていることに注意して $\mathscr{I} = U(\mathfrak{g})\mathscr{J}$ と書き直せる。PBW の定理より $U(\mathfrak{g}) = U(\mathfrak{N}^-)U(\mathfrak{B})$ なので $\mathscr{I} = U(\mathfrak{g})\mathscr{J} = U(\mathfrak{N}^-)U(\mathfrak{B})\mathscr{J} = U(\mathfrak{N}^-)\mathscr{J}$ である。したがって $U(\mathfrak{g}) = U(\mathfrak{N}^-) \oplus U(\mathfrak{N}^-)\mathscr{J}$ をいえばよい。まずは $U(\mathfrak{B}) = \mathscr{J} \oplus K$ を示す。$U(\mathfrak{B})$ の任意の元は $x_1\cdots x_r, x_k \in U(\mathfrak{B})$ の形をしている。モジュロ $\mathscr{J}$ で考えると、

$$x_1\cdots x_r = x_1\cdots x_{r-1}(x_r - f(x_r)) + f(x_r)x_1\cdots x_{r-1} \equiv f(x_r)x_1\cdots x_{r-1} \equiv \cdots \equiv f(x_1)\cdots f(x_r) \in K$$

となるから $U(\mathfrak{B}) = \mathscr{J} + K$ が分かる。さてさて ρ_f は $\mathfrak{B}$ の一次元表現であり $U(\mathfrak{B})$ の普遍写像性質によって結合代数としての準同型写像 $F : U(\mathfrak{B}) \to \mathrm{End}_K(K_{m_\lambda}) \cong K$ が $F(x) = f(x),\quad x \in \mathfrak{B}$ で決まる。ところが

[*1] 僕がそう感じただけですが。。。

F の定め方から $F(\mathscr{J})=\{0\}$ がわかる。以上より $\mathscr{J}\cap K=\{0\}$ で $U(\mathfrak{B})=\mathscr{J}\oplus K$ が証明できた。さて PBW の定理より $U(\mathfrak{g})=U(\mathfrak{N}^-)\otimes U(\mathfrak{B})$ である。今までの結果を使って

$$\begin{aligned}U(\mathfrak{N}^-)\otimes U(\mathfrak{B})&=U(\mathfrak{N}^-)\otimes_K(\mathscr{J}\oplus K)\\&=(U(\mathfrak{N}^-)\otimes\mathscr{J}))\oplus(U(\mathfrak{N}^-)\otimes K)\\&=U(\mathfrak{N}^-)\mathscr{J}\oplus U(\mathfrak{N}^-)\end{aligned}$$

であり、これで $U(\mathfrak{g})=U(\mathfrak{N}^-)\mathscr{J}\oplus U(\mathfrak{N}^-)$ が言えて、主張が証明できた。
(3) を証明する。V を λ を最高ウェイトにもつ最高ウェイト加群、$v\in V$ をその最高ウェイト・ベクトルとする。$\varphi:U(\mathfrak{g})\to V$ を $\varphi(u)=uv$ で定める。$U(\mathfrak{g})$ を左からのかけ算により $U(\mathfrak{g})$ 加群とみなすとき φ は $U(\mathfrak{g})$ 加群としての準同型写像である。また $\mathscr{I}\subset Ker(\varphi)$ が容易な計算でわかる。したがって $U(\mathfrak{g})$ 加群の準同型写像 $\overline{\varphi}:M(\lambda)\to V$ が $\overline{\varphi}(um_\lambda)=uv,\quad(u\in U(\mathfrak{g}))$ により決まる。$V=U(\mathfrak{g})v$ なので $\overline{\varphi}$ は全射である。したがって、V は $M(\lambda)$ の商 $U(\mathfrak{g})$ 加群である。(証明終わり)

9.3 誘導表現 (加群) としてのヴァーマ加群

”超表現論者”[*2]を目指す僕にとってヴァーマ加群 $M(\lambda)$ を表現論のコトバで解釈することはとても大切なことである。命題 9.1 に出てきた記号を本節でも用いる。さて一次元 $U(\mathfrak{B})$ 加群 $K_\lambda=K_{m_\lambda}$ を考える。$(hm_\lambda=\lambda(h)m_\lambda,(h\in\mathfrak{H})\quad e_im_\lambda=0,(i\in I))$ つぎは短完全列である。

$$0\to\mathscr{J}\to U(\mathfrak{B})\to K_\lambda\to 0$$

上の列に左から $U(\mathfrak{g})$ を $U(\mathfrak{B})$ 上で左からテンソルする。(左完全)

$$U(\mathfrak{g})\otimes_{U(\mathfrak{B})}\mathscr{J}\to U(\mathfrak{g})\otimes_{U(\mathfrak{B})}U(\mathfrak{B})\to U(\mathfrak{g})\otimes_{U(\mathfrak{B})}K_\lambda\to 0$$

以上から、$U(\mathfrak{g})\otimes_{U(\mathfrak{B})}K_\lambda=U(\mathfrak{g})/U(\mathfrak{g})\mathscr{J}=U(\mathfrak{g})/\mathscr{I}=M(\lambda)$ となることがわかる。これは $M(\lambda)$ は $\mathfrak{B}$ のから誘導された $\mathfrak{g}$ の表現 (誘導表現) であることを意味する。また V を左 $U(\mathfrak{g})$ 加群としたとき

$$\mathrm{Hom}_{U(\mathfrak{g})}(M(\lambda),V)\xleftarrow{\sim}\{v\in V_\lambda\mid e_iv=0,\ i\in I\}$$

が成り立つ。一般に標準半順序に関して最高ウェイトより低いところ $\mu\in\mathfrak{H}^*$ でも $e_iv=0,\ i\in I$ をみたす $v\in V_\mu$ が存在する。このような v を**特異ベクトル**と呼んだりする。

9.4 ヴァーマ加群 $M(\lambda)$ の指標を求めてみよう

まず $M(\lambda)$ の指標は $ch(M(\lambda))=\sum_{\mu\in\mathfrak{H}^*}\dim(M(\lambda)_\mu)e^\mu$ であったことを思い出そう。これよりさらに具体的な表示を試みる。$U(\mathfrak{N}^-)$ を $\mathfrak{H}$ の随伴作用 $\mathrm{ad}(h)(y)=hy-yh$ により $U(\mathfrak{H})$ 加群とみなそう。このとき $U(\mathfrak{N}^-)$ はウェイト加群で

$$U(\mathfrak{N}^-)=\bigoplus_{\gamma\in Q^+}U(\mathfrak{N}^-)_{-\gamma}$$

と分解される。$y\in U(\mathfrak{N}^-)_{-\gamma}$, $h\in\mathfrak{H}$ に対して

$$hym_\lambda=([h,y]+yh)m_\lambda=(\lambda-\gamma)(h)ym_\lambda$$

であるから命題 9.1 と合わせて以下が成り立つ。

$$M(\lambda)=\bigoplus_{\gamma\in Q^+}M(\lambda)_{\lambda-\gamma}\tag{22}$$

$$M(\lambda)_{\lambda-\gamma}=U(\mathfrak{N}^-)_{-\gamma}m_\lambda\tag{23}$$

$$\dim(M(\lambda)_{\lambda-\gamma})=\dim(U(\mathfrak{N}^-)_{-\gamma})\tag{24}$$

[*2] この言葉は僕が尊敬してやまない柴田大樹先生の Twitter のつぶやきから引用したものである。

したがって $M(\lambda)$ の指標を求めたくば各 $\gamma \in Q^+$ に対して $\dim(U(\mathfrak{N}^-)_{-\gamma})$ を勘定すればよい。$\mathfrak{N}^- = \bigoplus_{\alpha\in\Delta^+}\mathfrak{g}_{-\alpha}$ であった。各 $\alpha \in \Delta^+$ に対して $\mathfrak{g}_{-\alpha}$ の基底 $\{y_{(\alpha,k)} \mid k = 1,\ldots,d_\alpha\}$ をえらぶ。今、$\Xi = \{(\alpha,k) \mid \alpha\in\Delta^+,\ k=1,\ldots,d_\alpha\}$ という集合を考え、$\xi = (\alpha,k) \in \Xi$ に対して $\overline{\xi} = \alpha$ という記法を用いる。一つ Ξ に全順序 $\leqq$ を定義すれば PBW の定理により順序を保つ単項式 $y_{\xi_1}\cdots y_{\xi_r},\ \xi_1 \leqq \cdots \leqq \xi_r$ の全体が $U(\mathfrak{N}^-)$ の基底になる。また $y_{\xi_1}\cdots y_{\xi_r} \in U(\mathfrak{N}^-)_{-\gamma},\ \overline{\xi_1}+\cdots+\overline{\xi_r} = \gamma$ だから $U(\mathfrak{N}^-)$ は $\{y_{\xi_1}\cdots y_{\xi_r} \mid \xi_1 \leqq \cdots \leqq \xi_r, \overline{\xi_1}+\cdots+\overline{\xi_r} = \gamma\}$ を基底とするベクトル空間である。その次元は $\{y_{\xi_1}\cdots y_{\xi_r} \mid \xi_1 \leqq \cdots \leqq \xi_r, \overline{\xi_1}+\cdots+\overline{\xi_r} = \gamma\}$ の元の数である。さて各 $\alpha\in\Delta^+$ を d_α 個含んだ重複度つきの集合を $\widetilde{\Delta^+}$ とする。Ξ は $\overline{\xi} = \alpha$ をみたす $\xi \in \Xi$ が d_α 個あるので Ξ と $\widetilde{\Delta^+}$ は一対一に対応する。だから $\dim U(\mathfrak{N}^-)_{-\gamma}$ は γ を $\widetilde{\Delta^+}$ の和で表す表し方の数

$$P(\gamma) = \{(n_\alpha)_{\alpha\in\widetilde{\Delta^+}} \mid n_\alpha \in \mathbb{Z}_{\geqq 0}, \gamma = \sum_{\alpha\in\widetilde{\Delta^+}} n_\alpha\alpha\} \tag{25}$$

に一致する。この $P(\cdot)$ は **Kostant の分割関数**と呼ばれている。以上により $ch(M(\gamma))$ は

$$ch(M(\gamma)) = \sum_{\gamma\in Q^+} P(\gamma)e^{\lambda-\gamma} \tag{26}$$

により与えられることがわかった。次に別の表示をする。$\alpha = \sum_{i\in I} m_i\alpha_i \in Q^+$ に対して e^γ を形式的冪級数環 $\mathbb{Z}[[e^{-\alpha_i}|i\in I]]$ の元 $\prod_{i\in I}(e^{-\alpha_i})^{m_i}$ とみなす。このとき

$$\begin{aligned}\frac{1}{\prod_{\alpha\in\Delta^+}(1-e^{-\alpha})^{d_\alpha}} &= \prod_{\alpha\in\widetilde{\Delta^+}} \frac{1}{(1-e^{-\alpha})} \\ &= \prod_{\alpha\in\widetilde{\Delta^+}} (1+e^{-\alpha}+e^{-2\alpha}+\cdots) \\ &= \sum_{\gamma\in Q^+} P(\gamma)e^{-\gamma}\end{aligned}$$

なので $\mathbb{Z}[[e^{-\alpha_i}|i\in I]]$ 上のランク 1 の自由加群 $\mathbb{Z}[[e^{-\alpha_i}|i\in I]]e^\lambda$ における式

$$ch(M(\lambda)) = \frac{e^\lambda}{\prod_{\alpha\in\Delta^+}(1-e^{-\alpha})^{\dim\mathfrak{g}_\alpha}} \tag{27}$$

が成り立つ。

10　2018/09/12

今日はヴァーマ加群 $M(\lambda)$ から $\lambda\in\mathfrak{H}^*$ を最高ウェイトにもつ既約な最高ウェイト加群を構成したい。そのために $M(\lambda)$ の真部分加群について議論する。

補題 10.1 任意の最高ウェイト加群は最大の真部分加群をもつ。

(証) V を λ を最高ウェイトにもつ最高ウェイト加群とする。V はウェイト空間分解 $V = \bigoplus_{\mu\leq\lambda} V_\mu$ をもち、$\dim V_\lambda = 1, V = U(\mathfrak{g})V_\lambda$ がなりたつ。K を V の部分加群とすると、K もウェイト加群なので $K = \bigoplus_{\mu\leq\lambda}(K\cap V_\mu)$ とウェイト分解される。いま $K\cap V_\lambda \neq \{0\}$ とすれば $\dim V_\lambda = 1$ より $V_\lambda \subset K$ となり $V = U(\mathfrak{g})V_\lambda$ より $V = K$ となる。つまり K が V の真部分加群ならば $K\cap V_\lambda = \{0\}$、したがって $K \subset \bigoplus_{\mu<\lambda} V_\mu$ が成り立つ。よって V の真部分加群の和 K_0 も $\bigoplus_{\mu<\lambda} V_\mu$ に含まれる真部分加群となりこれが最大の真部分加群である。(証明終わり)

さて $M(\lambda)$ の最大の真部分加群を $K(\lambda)$ として、

$$L(\lambda) = M(\lambda)/K(\lambda) \tag{28}$$
$$\ell_\lambda = \overline{m_\lambda} \in L(\lambda) \tag{29}$$

とおくと $L(\lambda)$ は λ を最高ウェイトにもつ既約な最高ウェイト加群である。ℓ_λ はその最高ウェイト・ベクトルである。

命題 10.1 λ を最高ウェイトにもつ既約な最高ウェイト加群は $L(\lambda)$ と同型である。

(証明) L を λ を最高ウェイトにもつ既約な最高ウェイト加群とする。命題 9.1(3) より、L は $M(\lambda)$ の商加群である。したがって $M(\lambda)$ のある真部分加群 K によって $L = M(\lambda)/K$ とかける。$K \subset K(\lambda)$ であるが、もし $K \neq K(\lambda)$ ならば L は自明でない部分加群 $K(\lambda)/K$ をもつことになり L の既約性に矛盾。したがって $K = K(\lambda)$ が成り立ち $L = L(\lambda)$ がいえた。(証明終わり)

以上のようにして λ を最高ウェイトにもつ既約な最高ウェイト加群を構成できるが、これでは構成法だけで実際にどのようなものなのかわからない。(例えば $\mathfrak{sl}_2$ のときは $V(n) = \{f \in K[x,y] \mid f : n$ 次同次式 $\}$ であった) ここが難しいところである。つぎの命題は $L(\lambda)$ に関していえるひとつの性質である。

命題 10.2 $\lambda \in \mathfrak{H}^*$ と $i \in I$ に対して $\lambda(h_i)$ が非負整数であるとする。このとき $f_i^{\lambda(h_i)+1} m_\lambda$ は $M(\lambda)$ の最大の真部分加群 $K(\lambda)$ に含まれる。言い換えれば $L(\lambda)$ において $f_i^{\lambda(h_i)+1}\ell_\lambda = 0$ が成立する。

(証明) 同型写像 $\varphi_i : \mathfrak{sl}_2 \to \mathfrak{A}_i = \mathbb{K}h_i + \mathbb{K}e_i + \mathbb{K}f_i$ によって $V = M(\lambda)$ を $U(\mathfrak{sl}_2)$ 加群と思う。このとき $m_\lambda \in V_{\lambda(h_i)}$ である。このとき $e_i(f_i^{\lambda(h_i)+1}m_\lambda) = f^{\lambda(h_i)+1}e_i m_\lambda + (\lambda(h_i)+1)f^{\lambda(h_i)}(h - \lambda(h_i))m_\lambda = 0$ である。$i \neq j$ とすると $[e_j, f_i] = 0$ により $e_j(f_i^{\lambda(h_i)+1}m_\lambda) = 0$ である。また $f_i^{\lambda(h_i)+1}m_\lambda \in M(\lambda)_{\lambda-(\lambda(h_i)+1)\alpha_i}$ なので、$K = U(\mathfrak{g})f^{\lambda(h_i)+1}m_\lambda$ は $\lambda - (\lambda(h_i)+1)\alpha_i$ を最高ウェイトにもつ最高ウェイト加群である。したがって

$$K = \bigoplus_{\mu \leq \lambda-(\lambda(h_i)+1)\alpha_i} K_\mu \subset \bigoplus_{\mu \leq \lambda-(\lambda(h_i)+1)\alpha_i} M(\lambda)_\mu \subsetneq M(\lambda)$$

であり、したがって K は $M(\lambda)$ の真部分加群である。$K(\lambda)$ は最大の真部分加群だから $f_i^{\lambda(h_i)+1}m_\lambda \in K \subset K(\lambda)$ がいえて主張が示せた。(証明終わり)

一般に最高ウェイト加群 V は可積分表現ではない。ではどのような条件を満たすときに V は可積分になるだろうか？それについて以下が知られている。

命題 10.3 V を $\lambda \in \mathfrak{H}^*$ を最高ウェイトにもつ最高ウェイト加群とし、v をそのウェイト・ベクトルとする。このとき

$$V \text{ は可積分 } \Leftrightarrow \lambda(h_i) \in \mathbb{Z}_{\geqq 0}, f_i^{\lambda(h_i)+1}v = 0, \forall i \in I$$

が成り立つ。

(証明) V が可積分であるとする。$i \in I$ に対して

$$h_i v = \lambda(h_i)v\ ,\ e_i v = 0$$

であるが、同型写像 $\varphi_i : \mathfrak{sl}_2 \to \mathfrak{A}_i = \mathbb{K}h_i + \mathbb{K}e_i + \mathbb{K}f_i$ によって $U(\mathfrak{A}_i)v$ を有限次元 $U(\mathfrak{sl}_2)$ 加群とみなす。$v_n = f_i^n v \in V_{\lambda(h_i)-2n}$ とおく。($v_0 = v$ に注意。) $\{v_c \mid 0 \leq c, v_c \neq 0\}$ は線型独立である。また $U(\mathfrak{A}_i)v$ は有限次元だから有限個の c を除いて $v_c = 0$ である。v_n の定義から $v_n = 0$ ならば $v_{n+1} = v_{n+2} = \cdots = 0$ である。だからある $m \geq 0$ で $v_0, \ldots_m$ は非零で $v_{m+1} = v_{m+2} = \cdots = 0$ となる。このとき $e_i v_{m+1} =$

$f_i^{m+1}e_iv+(m+1)(h_i+m)f_i^mv=(m+1)f_i^m(\lambda(h_i)-m)v=0$ であるが $v\neq 0$ だから $\lambda(h_i)=m\geq 0$ これで $\Rightarrow$ がいえた。次は $\Leftarrow$ を示す。任意の $i\in I$ に対して $\lambda(h_i)$ が非負整数で $f_i^{\lambda(h_i)+1}v=0$ が成り立っていると仮定する。このとき任意の $u\in V$ に対して $\dim U(\mathfrak{A}_i)u<\infty$ となることを示せばよい。さて $\dim U(\mathfrak{A}_i)u<\infty$ となる $u\in V$ 全体は V の部分空間になるので、ある $\mu\in\mathfrak{H}^*,\mu\leq\lambda$ に関して $u\in V_\mu$ としてよい。このとき

$$U(\mathfrak{A}_i)u=\sum_{p,q,r}\mathbb{K}f_i^pe_i^qh_i^ru=\sum_{q=0}^{\infty}\mathbb{K}[f_i]e_i^qu$$

となる。($\mathbb{K}[f_i]=\sum_{p=0}^{\infty}\mathbb{K}f_i^p$) ここで $e_i^qu\in V_{\mu+q\alpha_i}$ であるが、$\mu+q\alpha_i\leq\lambda$ すなわち $q\alpha_i\leq\lambda-\mu$ でないと $V_{\mu+q\alpha_i}=0$ となる。したがって有限個の q を除いて $e_i^qu=0$ である。よって任意の $u\in V_\mu,\mu\leq\lambda$ に対して $f_i^pu=0,(p>>0)$ を示せばよい。$u=v$ のときは仮定により成り立っている。$V=U(\mathfrak{N}^-)v$ なので $u\in V_\mu,i,j\in I,p$ に関して $f_i^pu=0$ が成立しているときに、$f_i^pu=0$ が成立しているときに $f_i^qf_ju<\infty$ $(q>>0)$ が成り立つことを言えばよい。$i=j$ のときは明らか。$i\neq j$ とする。簡単のため $N=1-a_{ij}$ とする。[*3]$\mathrm{ad}(f_i)^N(f_j)=0$ なので、$U(\mathfrak{g})$ の ad に関する公式によって

$$\sum_{p=0}^{N}(-1)^{N-p}\binom{N}{p}f_i^pf_jf_i^{N-p}$$

が成り立つ。特に $f_i^Nf_j=\binom{N}{1}f_i^{N-1}f_jf_i+\cdots+(-1)^{N+1}f_jf_i^N\in\mathbb{K}[f_i]f_j\mathbb{K}[f_i]f_i$ である。m に関する帰納法のより $f_i^{Nm}f_j\in\mathbb{K}[f_i]f_j\mathbb{K}[f_i]f_i^m$ であることがわかる。特に $m=p$ のとき $f_i^{Np}f_ju\in\mathbb{K}[f_i]f_j\mathbb{K}[f_i]f_i^pu=\{0\}$ であることがわかった。以上により V が $U(\mathfrak{A}_i)$ 加群として局所有限であることがわかった。(証明終わり)

上の証明で出てきた ad の公式

$$\mathrm{ad}(X)^n(y)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}x^{n-k}yx^k$$

は n に関する帰納法で示せるが、ここでは別の証明を与えよう。$L_x(y)=xy$, $R_x(y)=yx$ と定義する。このとき $\mathrm{ad}(x)(y)=(L_x-R_x)(y)$ である。

$$\begin{aligned}\mathrm{ad}(x)^n(y)=(L_x-R_x)^n(y)&=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}(L_x^{n-k}R_x^k)(y)\\&=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}x^{n-k}yx^k\end{aligned}$$

これは作用素の公式を示す際によく行うテクニックである。次は時間のあるときに計算してみてほしい。
$U(\mathfrak{sl}_2)$ の公式

$$[e^m,f^n]=\sum_{k=1}^{min\{m,n\}}e^{m-k}p_k^{m,n}(h)f^{n-k}$$

を与えよ。$p_k^{m,n}(h)\in\mathbb{K}[h]=\sum_{p=1}^{\infty}\mathbb{K}f^p$
次回は 9 月 27 日です。宜しく願いします。

[*3] セールの関係式

11　2018/10/05

11.1　前回の問の解説

$U(\mathfrak{sl}_2)$ の公式

$$[e^m, f^n] = \sum_{k=1}^{min\{m,n\}} e^{m-k} p_k^{m,n}(h) f^{n-k}$$

を与えよ。つまり m, n に関して h の多項式 $p_k^{m,n}$ を具体的に記述せよ。

$m = 1, 2, 3, \ldots$ として計算して規則性を見れば次のように予想できた。

$$[e^m, f^n] = \sum_{k=1}^{min\{m,n\}} e^{m-k} \frac{(m)_k (n)_k}{k!} (h+m+n-2k)\cdots(h+m+n-k-1) f^{n-k}$$

ただし $(m)_k = m(m-1)\cdots(m-k+1)$ あとは m あるいは n に関する帰納法で示せば解決である。

12　整ウェイト, 優整ウェイト, 基本ウェイト

有限型カルタン行列の定義

$A = (a_{ij})_{i,j\in I}$ が有限型のカルタン行列であるとは $A = (a_{ij})_{i,j\in I}$ が対称化可能なカルタン行列かつ標準形式 $(,)$ が正定値であるときをいう。

- $A = (a_{ij})_{i,j\in I}$: 既約成分が有限型となるカルタン行列
- $\mathfrak{g}$: A に付随する有限次元 Kac-Moody 代数
- $\mathfrak{H} = \bigoplus_{i\in I} \mathbb{K}h_i$: $\mathfrak{g}$ のカルタン部分代数
- $\mathfrak{H}^* = \bigoplus_{i\in I} \mathbb{K}\alpha_i$
- $P = \{\lambda \in \mathfrak{H}^* \mid \lambda(h_i) \in \mathbb{Z}\}$: 整ウェイトの集合
- $P^+ = \{\lambda \in P \mid \lambda(h_i) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$: 優整ウェイトの集合
- $\rho = \frac{1}{2}\sum_{\alpha\in\Delta^+} \alpha \in \mathfrak{H}^*$

P はルート格子 Q を含むことに注意。さて $\mathfrak{H}$ の基底 $\{h_i\}_{i\in I}$ の双対基底を $\{\varpi\}_{i\in I}$ とする。このとき定義から $\varpi_i \in P^+$ で

$$P = \bigoplus_{i\in I} \mathbb{Z}\varpi_i\ ,\ P^+ = \bigoplus_{i\in I} \mathbb{Z}_{\geq 0}\varpi_i$$

が成り立つ。ϖ_i を**基本ウェイト**と呼ぶ。

命題 12.1 $\rho = \sum_{i\in I} \varpi_i$ が成り立つ。

(証明) 任意の $i \in I$ に対して $\rho(h_i) = 1$ であることをいえば主張は明らか。$s_i(\rho) = \rho - \rho(h_i)\alpha_i$ である。一方

$$s_i(\rho) = \frac{1}{2}\sum_{\alpha\in\Delta^+} s_i(\alpha) = \frac{1}{2}(\sum_{\alpha\in\Delta^+-\{\alpha_i\}} \alpha - \alpha_i) = \rho - \alpha_i$$

であるから $\rho(h_i) = 1$ がいえた。(証明終わり)

補題 12.1
(1). P は W 不変である。

(2). P^+ は W の P への作用に関する軌道の完全代表系をなす。すなわち $P = W(P^+)$ で、しかも任意の $\lambda \in P^+$ に対して $W(\lambda) \cap P^+ = \{\lambda\}$ が成り立つ。
(3). $\lambda \in P^+$ とするとき λ の固定部分群 $\{w \in W \mid w(\lambda) = \lambda\}$ は $\{s_i \mid i \in I, \lambda(h_i) = 0\}$ により生成される。

(証明) (1) を示す。$\lambda \in P$ とする。$w \in W$ は s_i たちで生成されているから $w = s_i$ としてよい。$s_i(\lambda) = \lambda - \lambda(h_i)\alpha_i$ であるが任意の $j \in I$ に対して $s_i(\lambda)(h_j) = \lambda(h_j) - a_{ji}\lambda(h_i) \in \mathbb{Z}$ で $s_i(\lambda) \in P$ がいえた。
(2),(3) を示す。$\lambda \in P$ とする。W は有限群なので λ の W 軌道 $W(\lambda)$ は dominance order で極大元 $\mu \in W(\mu)$ が取れる。$s_i(\mu) = \mu - \mu(h_i)\alpha_i$ だが μ の取り方から $\mu - s_i(\mu) \in Q^+$ である。したがって $\mu(h_i) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ で $\mu \in P^+$ である。これで $P = W(P^+)$ がいえた。次に $J = \{i \in I \mid \lambda(h_i) = 0\}$ とし $\{s_i \mid i \in J\}$ 達で生成される W の部分群を W' とする。$i \in J$ ならば $s_i(\lambda) = \lambda - \lambda(h_i)\alpha_i = \lambda$ なので $w \in W'$ に対して $w(\lambda) = \lambda$ が成り立っている。したがって

$$\lambda \in P^+, w \in W, w(\lambda) \in P^+ \Longrightarrow w \in W'$$

を示せばよい。これは $\ell(w)$ に関する帰納法で示す。$\ell(w) = 0$ のときは $w = 1$ なので明らか.$\ell(w) = r > 0$ とする。w の最短表示 $w = s_{i_1} \cdots s_{i_r}$ を 1 つ選ぶ。このとき

$$w(\alpha_{i_r}) = s_{i_1} \cdots s_{i_r}(\alpha_{i_r}) = -s_{i_1} \cdots s_{i_{r-1}}(\alpha_{i_r}) \in \Delta^-$$

である。したがって

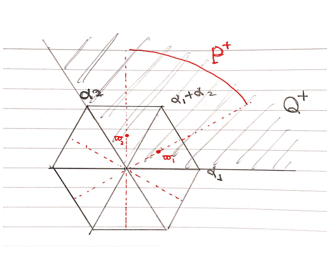
$$0 \leqq (\lambda, \alpha_{i_r}) = (w(\lambda), w(\alpha_{i_r})) \leqq 0$$

により $(\lambda, \alpha_{i_r}) = 0$ がいえた。$(\lambda, \alpha_{i_r}) = \lambda(h_i)\frac{(\alpha_{i_r}, \alpha_{i_r})}{2} = 0$ で $\frac{(\alpha_{i_r}, \alpha_{i_r})}{2} > 0$ より $\lambda(h_{i_r}) = 0$ だから $i_r \in J(s_{i_r} \in W')$ である。$y = s_{i_1} \cdots s_{i_{r-1}}$ とおくと $y(\lambda) = ys_{i_r}(\lambda) = w(\lambda) \in P^+$ であるが $\ell(y) < r$ であるので帰納法の仮定から $y \in W'$ でないといけない。ゆえに $ys_{i_r} = w \in W'$ (証明終わり)

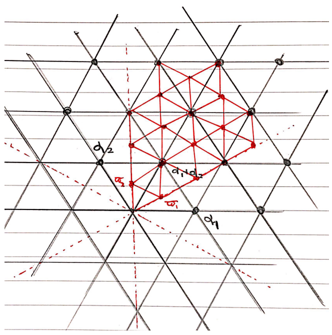
13　2018/10/26

- $A = (a_{ij})_{i,j \in I}$: 有限型カルタン行列
- $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(A)$: A に付随する有限次元 Kac-Moody 代数
- $\mathfrak{H} = \bigoplus_{i \in I} \mathbb{K}h_i$,　$\mathfrak{H}^* = \bigoplus_{i \in I} \mathbb{K}\alpha_i$
- $Q = \bigoplus_{i \in I} \mathbb{Z}\alpha_i$(ウェイト格子),　$Q^+ = \bigoplus_{i \in I} \mathbb{Z}_{\geq 0}\alpha_i$
- $Q \subset P = \{\lambda \in \mathfrak{H}^* \mid \lambda(h_i) \in \mathbb{Z}\} = \bigoplus_{i \in I} \mathbb{Z}\varpi_i$
- $\{\varpi_i\}_{i \in I}$ は $\{h_i\}_{i \in I}$ の双対基底 $(< \varpi_i, h_j >= \delta_{ij})$,　$\rho = \sum_{\alpha \in \Delta^+} \alpha = \sum_{i \in I} \varpi_i$

A_2 のルート系を描いてみよう。



Scanned with CamScanner



Scanned with CamScanner

右の図は $Q \subset P$ であることがよくわかるだろう。さてここまで来たら次の二つの定理は確実に理解していたい。

定理 13.1

$$\{\text{ 有限次元既約 } U(\mathfrak{g}) \text{ 加群の同型類 }\} = \{L(\lambda) \mid \lambda \in P^+\}$$

定理 13.2 任意の有限次元 $U(\mathfrak{g})$ 加群は完全可約である。

以上２つの定理から有限次元 $U(\mathfrak{g})$ 加群の研究は $L(\lambda)$ の研究に帰着することが分かった。今後は $ch(L(\lambda))$ の明示的な表示 (Weyl の指標公式) を試みることにする。そのために次の命題を準備する。

命題 13.1 M を $\lambda \in P$ を最高ウェイトにもつ最高ウェイト加群する。M の $U(\mathfrak{g})$ 加群としての有限増大列

$$\{0\} = M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_r = M$$

と $\mu_1, \ldots, \mu_r \in P$ が存在して以下を満たすものが存在する。

- $\mu_r = \lambda, \mu_i < \lambda \ (0 \leq i < r)$
- $(\lambda + \rho, \lambda + \rho) = (\mu_i + \rho, \mu_i + \rho) \ \ (0 \leq i \leq r)$
- $M_i / M_{i-1} \cong L(\mu_i)$

(証明) $a = (\lambda + \rho, \lambda + \rho) \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$ とし $\Gamma_a = \{\mu \in P \mid (\mu + \rho, \mu + \rho) = a\}$ とする.Γ_a は有限集合であるから $n(M) = \sum_{\mu \in \Gamma_a} \dim(M_\mu)$ が意味をもつ.$n(M)$ に関する帰納法で示す.$n(M) = 1$ のときを考える.M が既約なときは明らかであるから M は既約でないとする。M の部分加群 V をとる。V のウェイトの中で極大なものを μ とする $(\mu < \lambda)$. このとき $v \in V_\mu - \{0\}$ で $V = U(\mathfrak{g})v$ は μ を最高ウェイトにもつ最高ウェイト加群である. ところでカシミール元 Ω は M に $(\lambda, \lambda + 2\rho)id$ で作用する. また V には $(\mu, \mu + 2\rho)id$ で作用する。しかし V は M の部分加群であるから $(\lambda, \lambda + 2\rho) = (\mu, \mu + 2\rho)$ でありこれは $\mu \in \Gamma_a$ を意味する。しかし $n(M) = 1$ の仮定に反するので $M \cong L(\lambda)$ が従う。次に $n(M) > 1$ とする. 議論は $n(M) = 1$ のときと同じである.M が既約でないとして,M の部分加群 V をとる.V のウェイトの中で極大なものを μ とおく.

$$0 \to V \to M \to M/V \to 0$$

$\dim(M/V)_\mu = \dim(M)_\mu - 1 < \dim(M)_\mu$, $\dim(V)_\lambda = 0 < 1 = \dim(M)_\lambda$ だから $n(V) < n(M)$, $n(M/V) < n(M)$ である. あとは帰納法の仮定を適用すれば主張が従う。(証明終わり)
ここで少し指標の復習をしておく。 M をウェイト $U(\mathfrak{g})$ 加群とする。このとき M の指標は

$$ch(M) = \sum_{\mu \in \mathfrak{H}^*} \dim(M)_\mu e^\mu$$

であった. ここでの e^μ は形式的なシンボルとみている。一方, 群 G の G 加群 M が与えられたとき M の指標は

$$ch_M(g) = tr(g : M \to M) \ , \ g \in G$$

で与えられるのであった.$m \in M_\lambda$ に対して $h \in \mathfrak{H}$ は $hm = \lambda(h)m$ と作用するのだが e^μ を $\mathfrak{H}$ 上の関数とみなし M_μ に定義域を制限すると e^μ は $e^{\mu(h)} id_{M_\mu}$ で作用する. だから $tr(e^\mu : M_\mu \to M_\mu) = \dim(M)_\mu e^{\mu(h)}$ となり群のときと同じように思える. さて数回前のゼミでやったがヴァーマ加群 $M(\lambda)$ の指標は次で与えられるのであった.

$$ch(M(\lambda)) = \frac{e^\lambda}{\prod_{\alpha \in \Delta^+} (1 - e^{-\alpha})^{\dim \mathfrak{g}_\alpha}}$$

この式はランク 1 の自由加群 $\mathbb{Z}[[\alpha_i | i \in I]] e^\lambda$ における等式である。

14 2018/11/09

14.1 ワイルの指標公式

まずはいつものように記号をひとしきり準備する.

- $A = (a_{ij})_{i,j\in I}$: 有限型カルタン行列
- $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(A)$: A に付随する Kac-Moody 代数
- $\mathfrak{H} = \bigoplus_{i\in I} \mathbb{K}h_i$: $\mathfrak{g}$ のカルタン部分代数
- $W = \langle s_i \mid i \in I\rangle$: ワイル群
- $P = \{\lambda \in \mathfrak{H}^* \ : \ \lambda(h_i) \in \mathbb{Z}, i \in I\} \supset Q = \bigoplus_{i\in I} \mathbb{Z}\alpha_i \supset Q^+ = \bigoplus_{i\in I} \mathbb{Z}_{\geqq 0}\alpha_i$
- $P^+ = \{\lambda \in P \ : \ \lambda(h_i) \in \mathbb{Z}_{\geqq 0}\}$
- $\rho = \frac{1}{2}\sum_{\alpha\in\Delta^+} \alpha$

命題 14.1 M を $\lambda \in P$ を最高ウェイトにもつ最高ウェイト加群する. M の $U(\mathfrak{g})$ 加群としての有限増大列

$$\{0\} = M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_r = M$$

と $\mu_1, \dots, \mu_r \in P$ が存在して以下を満たすものが存在する.

- $\mu_r = \lambda, \mu_i < \lambda \ (0 \le i < r)$
- $(\lambda+\rho, \lambda+\rho) = (\mu_i+\rho, \mu_i+\rho) \ \ (0 \le i \le r)$
- $M_i/M_{i-1} \cong L(\mu_i)$

上の題は前回に証明した. 命題にでてくる有限増大列を M の**組成列**といい, 各 M_i/M_{i-1} を M の**組成因子**と呼ぶ. また $[M : L(\mu)] = {}^{\#}\{\ i \ : \ M_i/M_{i-1} \cong \ L(\mu)\}$ を $L(\mu)$ の M における**重複度**という. 一般にウェイト加群 M とその部分加群 M' が与えられたとき任意の $\lambda \in \mathfrak{H}^*$ に対して $\dim(M_\lambda) = \dim(M'_\lambda) + \dim((M/M')_\lambda)$ でるから

$$\mathrm{ch}(M) = \sum_{\mu\in\mathfrak{H}^*} \mathrm{ch}(M_i/M_{i-1}) = \sum_{\mu\in\mathfrak{H}^*} [M : L(\mu)]\mathrm{ch}(L(\mu))$$

とかける. さて $a \in \mathbb{Q}_{\geqq 0}$ を固定して $\Gamma_a = \{\mu \in P \ : \ (\mu+\rho, \mu+\rho) = a\}$ とする. Γ_a は有限集合であることに注意する. 以上の議論から

$$\mathrm{ch}(M(\lambda)) = \sum_{\mu\in\Gamma_a, \mu\le\lambda} [M(\lambda) : L(\mu)]\mathrm{ch}(L(\mu))$$

である. 簡単のため以下 $q_{\mu,\lambda} := [M(\lambda) : L(\mu)]$ とかくことする. 行列 $Q = (q_{\mu,\lambda})_{\mu,\lambda\in\Gamma_a}$ を $q_{\lambda,\lambda} = 1, q_{\mu,\lambda} \neq 0 \ (\mu \le \lambda)$, $q_{\mu,\lambda} = 0 \ (\mu \not\le \lambda)$ として定義する. Q は対角成分 1 の上三角行列である. $\det(Q) = 1$ より $P = Q^{-1} = (p_{\mu,\lambda})$ も対角成分 1 の上三角行列で成分も皆整数である.

$$\begin{aligned}
\sum_{\mu\in\Gamma_a} \mathrm{ch}(M(\mu))p_{\mu,\lambda} &= \sum_{\mu\in\Gamma_a}\left(\sum_{\nu\in\Gamma_a} q_{\nu,\mu}\mathrm{ch}(L(\nu))\right)p_{\mu,\lambda} \\
&= \sum_{\nu\in\Gamma_a}\left(\sum_{\mu} q_{\nu,\mu}p_{\mu,\lambda}\right)\mathrm{ch}(L(\nu)) \\
&= \sum_{\nu\in\Gamma_a} \delta_{\nu,\lambda}\mathrm{ch}(L(\nu)) \\
&= \mathrm{ch}(L(\lambda))
\end{aligned}$$

我々の目標は $\mathrm{ch}(L(\lambda))$ の計算である. いま

$$\mathrm{ch}(L(\lambda)) = \sum_{\mu\in\Gamma_a} p_{\mu,\lambda}\mathrm{ch}(M(\mu))$$

まで分かった. あとは $p_{\mu,\lambda}$ を求めればよい. さて整ウェイトの集合 P の $\mathbb{Z}$ 上の群環 $\mathbb{Z}[P]$ は

$$\mathbb{Z}[P]=\bigoplus_{\lambda\in P}\mathbb{Z}e^{\lambda}\ ,\ e^{\lambda}e^{\mu}=e^{\lambda+\mu}$$

で与えられる. $D\in\mathbb{Z}[P]$ を

$$D=\prod_{\alpha\in\Delta^+}(1-e^{-\alpha})$$

とする. 以下 $\lambda\in P^+$ とし $\Gamma=\{\mu\in P\ :\ \mu\le\lambda\ ,\ (\mu+\rho,\mu+\rho)=(\lambda+\rho,\lambda+\rho)\}$ として

$$\mathrm{ch}(L(\lambda))=\sum_{\mu\in\Gamma}p_{\mu,\lambda}\mathrm{ch}(M(\mu))$$

と書き直しておく. ヴァーマ加群 $M(\lambda)$ の指標は

$$\mathrm{ch}(M(\mu))=\frac{e^{\mu}}{\prod_{\alpha\in\Delta^+}(1-e^{-\alpha})^{\dim\mathfrak{g}_\alpha}}$$

だが, $\mathfrak{g}$ は有限次元であるから $\Delta=\Delta_{re}$ であり $\dim(\mathfrak{g}_\alpha)=\dim(\mathfrak{g}_{w(\alpha)})$ という事実を使えば任意の $\alpha\in\Delta$ に対して $\dim(\mathfrak{g}_\alpha)=1$ が成り立つ. それで上の結果をつかって $\mathrm{ch}(L(\lambda))$ は

$$\mathrm{ch}(L(\lambda))=\sum_{\mu\in\Gamma}p_{\mu,\lambda}e^{\mu}D^{-1}$$

と書き直せる. うえの式は $R=\mathbb{Z}[[e^{-\alpha_i}|i\in I]]$ 上の等式である. さらに $\tilde{D}=e^{\rho}D$ としてこれを上の式の両辺に右からかけると

$$\mathrm{ch}(L(\lambda))\tilde{D}=\sum_{\mu\in\Gamma}p_{\mu,\lambda}e^{\mu+\lambda}$$

となる.

補題 14.1 $w\in W$ に対して

$$w(\tilde{D})=(-1)^{\ell(w)}\tilde{D}$$

(証明). $w=s_i$ としてよい.

$$\begin{aligned}
s_i(\tilde{D})&=s_i(e^{\rho}\prod_{\alpha\in\Delta^+}(1-e^{-\alpha}))\\
&=e^{s_i(\rho)}(1-e^{s_i(-\alpha_i)})\prod_{\alpha\in\Delta^+\setminus\{\alpha_i\}}(1-e^{-\alpha})\\
&=e^{\rho-\alpha_i}(1-e^{\alpha_i})\prod_{\alpha\in\Delta^+\setminus\{\alpha_i\}}(1-e^{-\alpha})\\
&=-e^{\rho}(1-e^{-\alpha_i})\prod_{\alpha\in\Delta^+\setminus\{\alpha_i\}}(1-e^{-\alpha})\\
&=-e^{\rho}\prod_{\alpha\in\Delta^+}(1-e^{-\alpha})=-\tilde{D}
\end{aligned}$$

(証明おわり)

補題 14.2 $w\in W$ に対して

$$w(\mathrm{ch}(L(\lambda)))=\mathrm{ch}(L(\lambda))\ ,\ \lambda\in P^+$$

(証明).

$$\begin{aligned}
w(\mathrm{ch}(L(\lambda))) &= w(\sum_{\mu\in\mathfrak{H}^*}\dim(L(\lambda))_\mu e^\mu) \\
&= \sum_{\mu\in\mathfrak{H}^*}\dim(L(\lambda)_\mu)e^{w\mu} \\
&= \sum_{\mu\in\mathfrak{H}^*}\dim(L(\lambda)_{w^{-1}\mu})e^{\mu}
\end{aligned}$$

ここで $\lambda\in P^+$ より $L(\lambda)$ は可積分である. ゆえに $\dim(L(\lambda)_{w^{-1}\mu})=\dim(L(\lambda)_\mu)$. したがって

$$w(\mathrm{ch}(L(\lambda)))=\mathrm{ch}(L(\lambda))$$

(証明おわり)
次に以下を計算する.

$$w(\mathrm{ch}(L(\lambda))\tilde{D})=\sum_{\mu\in\Gamma}p_{\mu,\lambda}e^{w(\mu+\rho)}$$

(左辺)$=(-1)^{\ell(w)}\mathrm{ch}(L(\lambda))=(-1)^{\ell(w)}\sum_{\mu\in\Gamma}p_{\mu,\lambda}e^{\mu+\rho}$
$w(\mu+\rho)=\nu+\rho$ とおく. $\nu=w(\mu+\rho)-\rho$ として μ を ν でかくと $\mu=w^{-1}(\nu+\rho)-\rho$ である
(右辺)$=\sum_{\mu\in\Gamma}p_{w^{-1}(\nu+\rho)-\rho,\lambda}e^{\nu+\rho}$
ここで $e^{\mu+\rho}$ の係数を比較する

$$(-1)^{\ell(w)}p_{\mu,\lambda}=p_{w^{-1}(\mu+\rho)-\rho,\lambda}$$

$W\curvearrowright P,\ w\star\lambda=w(\lambda+\rho)-\rho$ これを shifted action という. この記法で

$$(-1)^{\ell(w)}p_{\mu,\lambda}=p_{w^{-1}\star\mu,\lambda}$$

である. $p_{\mu,\lambda}\neq 0$ とする. $w\star\mu=w(\mu+\rho)-\rho\in P^+$ となる $w\in W$ をとる. このとき $w\star\mu\in\Gamma$ が成り立つ. したがって

$$\Gamma_0=\{\mu\in\Gamma\mid p_{\mu,\lambda}\neq 0\}$$

とおけば,

$$\Gamma_0=W\star(\Gamma_0\cap P^+),\quad (-1)^{\ell(w)}p_{\mu,\lambda}=p_{w(\mu+\rho)-\rho,\lambda},\ \mu\in\Gamma_0$$

が成り立つ. $\nu\in\Gamma_0\cap P^+$ を任意にとる. $(\nu+\rho)(h_i)=0$ となる $i\in I$ が存在したとする. このとき $s_i(\nu+\rho)=\nu+\rho$ である. $-p_{\nu,\lambda}=p_{\nu,\lambda}$ であるから $p_{\nu,\lambda}=0$ となるがこれは $\nu\in\Gamma_0$ に反する. したがって任意の $i\in I$ に対して $(\nu+\rho)(h_i)>0$ が成り立つ. また $\rho(h_i)=1$ なので $\nu\in P^+$ である. ところが $\nu\leq\lambda,(\nu+\rho,\nu+\rho)=(\lambda+\rho,\lambda+\rho)$ である.

$$\begin{aligned}
&(\lambda+\rho,\lambda+\rho)-(\nu+\rho,\nu+\rho) \\
&=(a,a)-(b,b) \\
&=(a+b,a-b) \\
&=(\lambda+\nu+2\rho,\lambda-\nu)
\end{aligned}$$

$\lambda>\nu$ ならば $(2\rho,\lambda-\nu)>0$ なので $\nu=\lambda$ となる. 以上により $\Gamma_0\cap P^+=\{\lambda\}$ が示された. $w\in W$ に対する $w(\lambda+\rho)$ は全て相異なることに注意すると, $p_{w\star\lambda,\lambda}=(-1)^{\ell(w)}$ がわかる.

定理 14.1 *(Weyl の指標公式)* $\lambda\in P^+$ に対して,

$$\mathrm{ch}(L(\lambda))=\frac{\sum_{w\in W}(-1)^{\ell(w)}e^{w(\rho+\lambda)-\rho}}{\prod_{\alpha\in\Delta^+}(1-e^{-\alpha})}$$

$L(0)$ は $\mathfrak{g}$ の自明表現に対応する一次元 $U(\mathfrak{g})$ 加群である. よって次を得る.

系 14.1 *(Weyl の分母公式)*

$$\prod_{\alpha\in\Delta^+}(1-e^{-\alpha})=\sum_{w\in W}(-1)^{\ell(w)}e^{w\rho-\rho}$$

15　2018/11/23

古典型 (A,B,C,D 型) の場合の指標公式を具体的に与えよう.