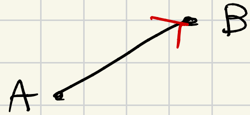
§5. ベクトルと行列

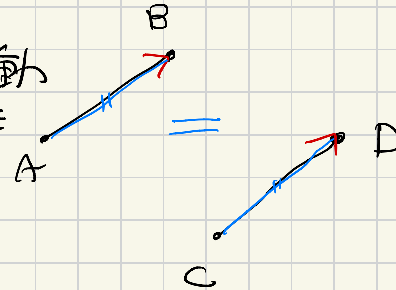
§5.1 ベクトル

○有向線分



○幾何ベクトル：有向線分を平行移動で互いに移り合うものを同一視したもの

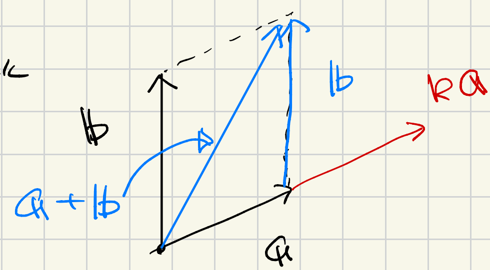
(キカ・ベクトル)



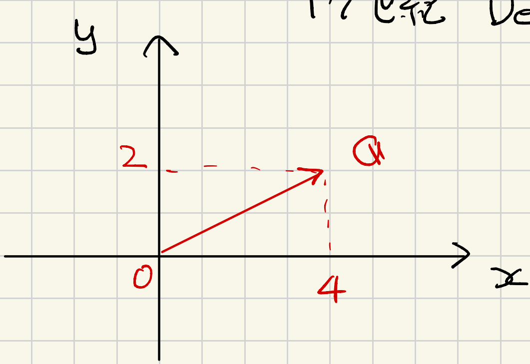
○基本演算　$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ ：キカ・ベクトル

加法：$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$

スカラー倍：$k\boldsymbol{a}$ (k ：スカラー)



17世紀 Descartes（デカルト）座標



$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

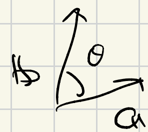
数ベクトル

座標系を導入することで"キカ・ベクトル $\Longleftrightarrow$ 数ベクトル"とみれる.

$$\mathbb{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix},\quad \mathbb{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}$$

$\rightsquigarrow$ 加法： $\mathbb{a}+\mathbb{b}=\begin{pmatrix}a_1+b_1\\a_2+b_2\end{pmatrix}$

スカラー； $k\mathbb{a}=\begin{pmatrix}ka_1\\ka_2\end{pmatrix}$ $\square$



◎ 内積.

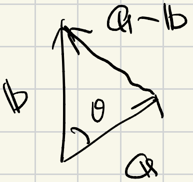
$\mathbb{a}, \mathbb{b}$: キカ・ベクトル , θ = $\mathbb{a}$ と $\mathbb{b}$ のなす角

$$\mathbb{a}\cdot\mathbb{b} := |\mathbb{a}|\,|\mathbb{b}|\cos\theta \qquad (*)$$

$\mathbb{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}$, $\mathbb{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}$ とすると

$(*) \Longleftrightarrow \quad \mathbb{a}\cdot\mathbb{b} = a_1b_1+a_2b_2$ となる.

__Pf__ $(\Longrightarrow)$ $|\mathbb{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2}$, $|\mathbb{b}|=\sqrt{b_1^2+b_2^2}$ である.



余弦定理より

$$|\mathbb{a}-\mathbb{b}|^2 = |\mathbb{a}|^2+|\mathbb{b}|^2-2|\mathbb{a}||\mathbb{b}|\cos\theta$$

$$\begin{aligned}2|\mathbb{a}||\mathbb{b}|\cos\theta &= |\mathbb{a}|^2+|\mathbb{b}|^2-|\mathbb{a}-\mathbb{b}|^2\\ &= (a_1^2+a_2^2)+(b_1^2+b_2^2)\\ &\quad -\left((a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2\right)\end{aligned}$$

$$\cancel{2}\underbrace{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\theta} = \cancel{2}a_1b_1 + 2a_2b_2$$

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2 \quad \square$$

$$\boxed{\cos\theta = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|}}$$

Rmk　2つのベクトルが直交 $\iff$ 内積が0

$\iff a_1a_2 + b_1b_2 = 0$

§5.2 ベクトルと図形

例 直線の方程式

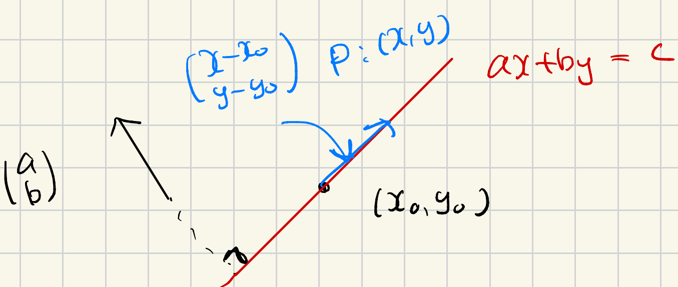
方程式 $ax+by=c$ (*) は xy 平面上における直線を表す.

∵ (x_0, y_0) は (*) の解とする.

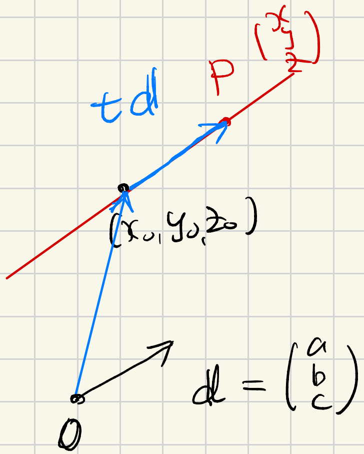
$(ax_0 + by_0 = c)$

$$\begin{array}{rl} & ax+by=c \\ -) & ax_0+by_0=c \\ \hline & a(x-x_0)+b(y-y_0)=0 \end{array}$$

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)=0 \iff \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix} = 0$$



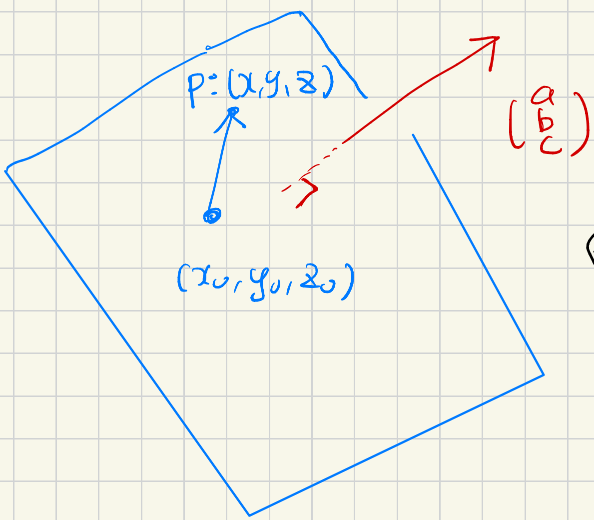
(i) 方向ベクトルを用いる



$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

(t: パラメータ)

(ii) 平面の方程式



$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Longleftrightarrow a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

$$\Longleftrightarrow ax + by + cz = \overset{d}{\overset{\|}{ax_0 + by_0 + cz_0}}$$

定数

<u>Ex. 1</u> 点 $(1, 2, 3)$ を通り，方向ベクトル $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ をもつ直線のパラメータ表示を求めよ

<u>Ex.2</u> 点 $(1,0,3)$ を通り法線ベクトル $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ をもつ平面の方程式を求めよ.

<u>Ex.3</u> <u>Ex.1</u> と <u>Ex.2</u> で求めた直線と平面の交点の座標を求めよ.

行列と線形写像は §7 で!