Ex　$z^5=1$ を解け.

$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$　$(r>0,\ 0\leqq\theta<2\pi)$ とする.

$z^5=1 \iff r^5(\cos 5\theta+i\sin 5\theta)=\cos 0+i\sin 0$

ド・モアブル

$$\begin{cases} r^5=1 \\ \cos 5\theta=\cos 0 \\ \sin 5\theta=\sin 0 \end{cases}$$

$\therefore r=1$

$5\theta=2k\pi \quad (k\in\mathbb{Z})$

$\theta=\frac{2}{5}k\pi$　　$0\leqq\theta<2\pi$ なので

$\therefore z=\cos\frac{2}{5}k\pi+i\sin\frac{2}{5}k\pi$　$(k=0,1,2,3,4)$

$\cos\frac{2}{5}\pi$ を求める.

$z_1=\cos\frac{2}{5}\pi+i\sin\frac{2}{5}\pi$ とおく.

z_1 は $z^5=1$ の解であるから

$z_1^5-1=0 \iff (z_1-1)(1+z_1+z_1^2+z_1^3+z_1^4)=0$

$z_1\neq1$

$1+z_1+z_1^2+z_1^3+z_1^4=0$

$\times\frac{1}{z_1^2}$

$z_1^2+z_1+1+\frac{1}{z_1}+\left(\frac{1}{z_1}\right)^2=0$

$$(\underbrace{z_1+\frac{1}{z_1}}_{t})^2-2+(\underbrace{z_1+\frac{1}{z_1}}_{t})+1=0$$

$t^2+t-1=0$

$$t = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$t = z_1 + \frac{1}{z_1} = \left(\cos\frac{2}{5}\pi + i\sin\frac{2}{5}\pi\right) + \left(\cos\left(-\frac{2}{5}\pi\right) + i\sin\left(-\frac{2}{5}\pi\right)\right)$$

$$= 2\cos\frac{2}{5}\pi > 0$$

$$\therefore \cos\frac{2}{5}\pi = \frac{-1+\sqrt{5}}{4} \quad //$$

Thm（オイラーの等式）

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \qquad \square$$

特に $\theta = \pi$ とすると $e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi$

$$\therefore e^{i\pi} = -1 .$$

§4 数列

§4.1 数列

順序付けられた数の列を数列という.

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \cdots, a_n, a_{n+1}, \cdots =: \{a_n\}$$

初項　　一般項

◎ 等差数列

$$a_1 \xrightarrow{+d} a_2 \xrightarrow{+d} a_3, \cdots, a_{n-1} \xrightarrow{+d} a_n \xrightarrow{+d} a_{n+1} \xrightarrow{+d} \cdots$$

- 隣り合う項の差が一定　$(a_{n+1} - a_n = d)$　公差　漸化式
- $a_n = a_1 + (n-1)d$　: 一般項

◎ 等比数列

$$a_1 \xrightarrow{\times r} a_2 \xrightarrow{\times r} a_3, \cdots, a_{n-1} \xrightarrow{\times r} a_n \xrightarrow{\times r} a_{n+1}$$

- 隣り合う項の比が一定　$\left(\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = r\right)$　公比　漸化式
- $a_n = a_1 r^{n-1}$　: 一般項

§.4.2 数列の和

数列 $\{a_n\}$ の第 i 項から第 j 項までの和を

$$a_i + a_{i+1} + \cdots + a_j =: \sum_{k=i}^{j} a_k$$

とかく。　$(i \leq j)$

和 ⇔ Sum　　Σ (ギリシャ文字で S に対応)
　　　　　　Sigma

⑪ 等差数列の和

$\{a_n\}$は$\begin{cases} \text{公差}: d \\ \text{初項}: a \end{cases}$ とする

$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} (a+(k-1)d)$ をnの式で表す.

$$S_n = a + (a+d) + \cdots + (a+(n-1)d)$$

$$+)\ S_n = (a+(n-1)d) + (a+(n-2)d) + \cdots + a$$

$$2S_n = (2a+(n-1)d) + (2a+(n-1)d) + \cdots + (2a+(n-1)d)$$

$$2S_n = n(2a+(n-1)d)$$

$$\therefore\ \underline{S_n = \frac{n}{2}(2a+(n-1)d)}\ //$$

⑫ 等比数列の和

$\{a_n\}$ は $\begin{cases} \text{公比}: r \neq 1 \\ \text{初項}: a \end{cases}$ とする.

$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} ar^{k-1}$ を nの式で表す.

$$1-r^n = (1-r)(1+r+r^2+\cdots+r^{n-1})$$

$1-r \neq 0$

$$1+r+r^2+\cdots+r^{n-1} = \frac{1-r^n}{1-r}$$

$\times a$

$$a+ar+\cdots+ar^{n-1} = \underline{\frac{a(1-r^n)}{1-r}}\ //$$

$$\|$$

$$S_n$$

Prop

(1) $$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

(2) $$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

(3) $$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 \qquad \square$$

Ex 次の和を計算せよ (教 P22, 問4.5)

(1) $$\sum_{k=1}^{10} (k^3 + 4k + 7)$$

(2) $$\sum_{k=10}^{20} k^2$$