Ram-Yip の公式

山口航平 *

2020 年 6 月 17 日

目次

* 名古屋大学大学院多元数理科学研究科, d20003j@math.nagoya-u.ac.jp

0 序論

本稿は 2020 年度の神戸大学理学研究科数学専攻における修士論文を加筆・修正したものである．また, 本稿の内容は修士課程の指導教官である野海正俊氏 (神戸大) との共同研究に基づくものである．

Macdonald 多項式とは 1987,8 年頃に I. G. Macdonald によって導入されたルート系に付随して定義される多変数 (q, t) 直交多項式のクラスである．1990 年代前半に Cherednik は, Knizhnik-Zamolodchikov 方程式の量子化の観点から, アフィン Hecke 環を基礎として Macdonald 多項式の理論を再構築し, ルート系に付随する Macdonald 多項式の様々な性質を系統的に理解する方法を与えた．現在ではこの理論は Macdonald-Cherednik 理論と呼ばれている [M03].

Macdonald 多項式は, q 差分作用素の可換族の同時固有函数として定義される対称 (Weyl 群不変) Laurent 多項式である．アフィン Hecke 環は, いわゆる Dunkl 作用素の生成する可換部分環を含んでおり, Macdonald の q 差分作用素の可換族は, 対称な Dunkl 作用素の, 対称 Laurent 多項式環への作用として実現される．一方, Dunkl 作用素の可換族の Laurent 多項式環への作用から, その同時固有函数系として非対称 Macdonald 多項式が定義され, 本来の Macdonald 多項式は非対称 Macdonald 多項式の対称化として得られる．

Ram と Yip は [RY11] において, 非捩れ型アフィンルート系に付随する非対称 Macdonald 多項式に関して, alcove walk を用いた組合せ論的な明示公式 (**Ram-Yip 公式**) を構成した．また Orr と Shimozono は [OS18] において, 捩れ型アフィンルート系に対しても Ram-Yip 公式を導いた．本稿では, これらの Ram-Yip 公式が二重アフィン Hecke 環の構造論と Cherednik 対合から自然に得られることを論じる．

記号・用語

本稿全般にわたって用いる記号と用語を紹介する．

- $\mathbb{Z}$ で整数環を, $\mathbb{N} = \mathbb{Z}_{\geq 0} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ で非負整数の集合を表す．また $\mathbb{Q}$ で有理数体を表す．
- 非退化対称双線形型式のことを内積と呼ぶ．
- 群 G の集合 S への作用を, $g \in G$ と $s \in S$ に対して $g.s$ で表す．s の G 軌道は $G.s$ ないし Gs で表す．

1 Ram-Yip 型公式 (非捩れ型)

この節の目標は, 非捩れ型アフィンルート系に対する非対称 Macdonald 多項式の明示公式の導出 (§1.6 定理 1.12) である．この明示式は alcove walk による書き換えが可能であり (§1.7 定理 1.14), 書き換えた式は Ram と Yip が [RY11] で得た明示式に一致するので, **Ram-Yip 型公式**と呼ぶことにする．

§§1.1–1.5 では, 明示公式の導出に必要な範囲で, Macdonald-Cherednik 理論の復習を行う．精密な記述は [M03] を参照せよ．

1.1 ルート系の設定

この副節では非捩れ型のアフィン・ルート系付随する Macdonald 理論を展開するために必要なルート系の設定, 記号の導入をする．

R をランク ℓ の既約かつ被約な有限ルート系 [B] とし, $\Delta := \{\alpha_i \mid i \in I_0\} \subset R$ をその単純ルートとする．添字集合は $I_0 = \{1, \ldots, \ell\}$ とする．ルート格子 Q とその正錐 Q_+ を次のように表す．

$$Q = \bigoplus_{i \in I_0} \mathbb{Z}\alpha_i \supset Q_+ = \bigoplus_{i \in I_0} \mathbb{N}\alpha_i.$$

正ルートの集合を R_+, 負ルートの集合を R_- と書くと, $R_+ = Q_+ \cap R$, $R_- = -R_+$, $R = R_+ \sqcup R_-$ である. $R^\vee$ を R の双対ルート系とし, 単純余ルートを $\Delta^\vee := \{\alpha_i^\vee \mid i \in I_0\}$ で表し, 余ルート格子とその正錐を $Q^\vee$ 及び $Q_+^\vee$ で表す. また $\omega_1, \ldots, \omega_\ell$ を基本ウェイトとし, ウェイト格子 P とその正錐 P_+ を次のように表す.

$$P = \bigoplus_{i \in I_0} \mathbb{Z}\omega_i \supset P_+ = \bigoplus_{i \in I_0} \mathbb{N}\omega_i.$$

また $\omega_1^\vee, \ldots, \omega_\ell^\vee$ を基本余ウェイトとし, 余ウェイト格子とその正錐を $P^\vee$ 及び $P_+^\vee$ で表す. このとき包含関係 $Q \subset P \subset Q \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$, $Q^\vee \subset P^\vee \subset Q^\vee \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ がある. $\mathbb{K}$ を標数 0 の体とし, $U := P^\vee \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{K}$, $V := P \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{K}$ とおく. R の仮定から $\dim_{\mathbb{K}} U = \dim_{\mathbb{K}} V = |I| = \ell$ である. U と V の間の非退化な双線型形式を $\langle\ ,\ \rangle : U \times V \to \mathbb{K}$ で表す. この双線型形式について

$$\begin{aligned} \langle\ ,\ \rangle : P^\vee \times Q \longrightarrow \mathbb{Z}\ ; \quad \langle \omega_i^\vee, \alpha_j \rangle = \delta_{i,j} \quad (i, j \in I_0), \\ \langle\ ,\ \rangle : Q^\vee \times P \longrightarrow \mathbb{Z}\ ; \quad \langle \alpha_i^\vee, \omega_j \rangle = \delta_{i,j} \quad (i, j \in I_0). \end{aligned}$$

が成り立つ. 更に V 上に内積 $(\ |\ ):\ V \times V \to \mathbb{K}$ があって, ルート $\alpha \in R$ と対応する余ルート $\alpha^\vee \in R^\vee$ について次の関係式が成立する.

$$\langle \alpha^\vee, \lambda \rangle = \frac{2(\alpha|\lambda)}{(\alpha|\alpha)} \quad (\lambda \in V).$$

次に, 添字集合 I_0 にアフィン・ノード 0 を追加した添字集合を $I := I_0 \sqcup \{0\}$ とかく. V を 1 次元拡大して

$$\widetilde{V} := V \oplus \mathbb{K}\delta$$

と定義する. 拡大に用いた基底 δ を零ルートと呼ぶ. アフィン・ノード $0 \in I$ に対応したルート $\alpha_0 \in V$ を $\delta = \alpha_0 + \theta$ で定める. ここに $\theta = \sum_{i \in I_0} a_i \alpha_i \in R_+ \cap P_+$ は R の最高ルートである. V 上の内積 $(\ |\ )$ を拡張して $\widetilde{V}$ 上の内積 $(\ |\ ):\ \widetilde{V} \times \widetilde{V} \to \mathbb{K}$ を

$$(\lambda|\delta) = (\delta|\lambda) := 0 \quad (\lambda \in V), \qquad (\delta|\delta) := 0$$

で定める. 同様に U の 1 次元拡大

$$\widetilde{U} := U \oplus \mathbb{K}c \tag{1.1}$$

を用意して, $\langle\ ,\ \rangle$ を $\widetilde{U} \times \widetilde{V}$ 上に拡張する.

以上の準備の下,

$$S := \{\alpha + k\delta \mid \alpha \in R,\ k \in \mathbb{Z}\} \subset \widetilde{V}$$

を R に付随した**非捩れ型アフィンルート系**と呼ぶ. この用語は Macdonald [M03] に従っている. $R \subset S$ 及び $\alpha_0 \in S$ に注意する. 以下 S の元をアフィンルートと呼び, 特に $R \subset S$ の元を有限ルートと呼ぶ. また, $\beta = \alpha + k\delta \in S$ の R への自然な射影を $\overline{\beta} := \alpha$ と書く. 任意のアフィンルート $\alpha \in S$ は $\alpha = \sum_{i \in I} a_i \alpha_i$, $a_i \in \mathbb{Z}$ と書けるが, 更に全ての i について $a_i \geq 0$ となるか, 全ての i について $a_i \leq 0$ となる. それぞれの場合に応じて α を正ルート及び負ルートと呼び, それらの集合を S_+ 及び S_- と書く. すると $S_- = -S_+$ かつ $S = S_+ \sqcup S_-$ となる.

アフィンルート $\alpha \in S$ に対して, 鏡映変換 $s_\alpha : \widetilde{V} \to \widetilde{V}$ を $s_\alpha(\lambda) := \lambda - \langle \alpha^\vee, \lambda \rangle \alpha$ $(\lambda \in \widetilde{V})$ で定義する. 特に単純ルート α_i $(i \in I)$ に対しては $s_i := s_{\alpha_i}$ と書く. s_i $(i \in I_0)$ が生成する群

$$W_0 := \langle s_i \mid i \in I_0 \rangle \subset \mathrm{GL}(V)$$

を R に付随する有限 Weyl 群と呼ぶ. これは有限群である. さらにアフィンルート α_0 に対応する鏡映変換 $s_0 := s_{\alpha_0}$ を加えた群

$$W_{\mathrm{af}} := \langle s_i \mid i \in I \rangle$$

をアフィン Weyl 群と呼ぶ．これは無限群である．$\mu \in P^\vee$ に対して $\tau(\mu) \colon \widetilde{V} \to \widetilde{V}$ を

$$\tau(\mu)(\lambda) := \lambda + \langle \mu, \lambda \rangle \delta, \quad \lambda \in \widetilde{V}$$

で定義すれば*1, アフィン Weyl 群は次のような半直積と一致する．

$$W_{\mathrm{af}} = \tau(Q^\vee) \rtimes W_0, \quad \tau(Q^\vee) := \{\tau(\alpha^\vee) \mid \alpha \in Q^\vee\}. \tag{1.2}$$

更に W_{af} を次のようにして拡大した無限群

$$\widetilde{W}_{\mathrm{af}} := \tau(P^\vee) \rtimes W_0, \quad \tau(P^\vee) := \{\tau(\mu) \mid \mu \in P^\vee\}$$

を拡大アフィン Weyl 群という．Dynkin 図形の自己同型群の部分群 Ω が存在して, $\widetilde{W}_{\mathrm{af}}$ は半直積

$$W_{\mathrm{af}} \rtimes \Omega = \langle s_i,\, u \mid i \in I,\, u \in \Omega \rangle$$

と一致する．また, τ は

$$\tau : P^\vee / Q^\vee \xrightarrow{\sim} \Omega$$

とみなすこともできる．また, $\widetilde{W}_{\mathrm{af}} = \langle s_i, u \mid i \in I, u \in \Omega \rangle$ の基本関係式は

$$\begin{aligned} s_i^2 &= 1 \quad (i \in I) \\ \overbrace{s_i s_j \cdots}^{m_{ij}} &= \overbrace{s_j s_i \cdots}^{m_{ij}} \\ u_\sigma u_\tau &= u_{\sigma\tau} \quad (u_\sigma, u_\tau \in \Omega) \\ u_\sigma s_i &= s_{\sigma(i)} u_\sigma \quad (i \in I,\, u_\sigma \in \Omega) \end{aligned}$$

であった．ただし m_{ij} は相異なる $i, j \in I$ の組 (i, j) 毎に

$$\langle \alpha_i^\vee, \alpha_j \rangle \langle \alpha_j^\vee, \alpha_i \rangle = 0, 1, 2, 3, \geq 4$$

に応じて

$$m_{ij} := 2, 3, 4, 6, \infty$$

と定めたものであり, $m_{ij} = \infty$ のときは関係式を課さないものとする．

1.2 アフィン Weyl 群と Bruhat 順序

(拡大) アフィン Weyl 群は Coxeter 群なので Bruhat 順序が定義される [B, Chap. 5]．この副節では本稿の主目標である Ram-Yip の公式の証明に必要な (拡大) アフィン Weyl 群の Bruhat 順序に関する事実を記す．

拡大アフィン Weyl 群の元 $w \in \widetilde{W}_{\mathrm{af}}$ に対して

$$\mathrm{inv}(w) := \left\{ \alpha \in S_+ \mid w^{-1}(\alpha) \in S_- \right\}$$

と定義する．$\mathrm{inv}(w)$ は有限集合であり, $\ell(w) := |\mathrm{inv}(w)|$ を w の長さという．$w = s_{i_1} \cdots s_{i_p} u$ かつ $\ell(w) = p$ であるとき, $s_{i_1} \cdots s_{i_p} u$ を w の最短表示という．任意の $u \in \Omega$ に対しては $\mathrm{inv}(u) = \emptyset$ となることに注意する．また, 任意の (最短表示とは限らない) 表示 $w = s_{i_1} \cdots s_{i_p} u \in \widetilde{W}_{\mathrm{af}}$ に対して $\beta_k(w) := s_{i_1} \cdots s_{i_{k-1}}(\alpha_k)$ と書くと, もし $w = s_{i_1} \cdots s_{i_p} u$ が最短表示ならば

$$\mathrm{inv}(w) = \{\beta_1(w), \ldots \beta_p(w)\}$$

が成り立つことに注意する．

*1 [M03] での定義 $\lambda \mapsto \lambda - \langle \mu, \lambda \rangle \delta$ とは異なることに注意する．

命題 1.1 (exchange relation)**.** $w = s_{i_1}\cdots s_{i_p}$ を $w \in \widetilde{W}_{\mathrm{af}}$ の最短表示とする．このとき $\ell(s_i w) < \ell(w)$ ならば, ある $k \in \{1,\ldots,p\}$ が存在して $s_i w = s_{i_1}\cdots \widehat{s_{i_k}}\cdots s_{i_p}$ となる．

証明. $\ell(s_i w) < \ell(w)$ ならば $w^{-1}(\alpha_i) < 0$ であり, $\alpha_i \in \mathrm{inv}(w)$ である．従って $\alpha_i = \beta_k = s_{i_1}\cdots s_{i_{k-1}}(\alpha_k)$ なる $k \in \{1,\ldots,p\}$ が存在する．よって, $s_i = s_{\beta_k} = (s_{i_1}\cdots s_{i_{k-1}})s_{i_k}(s_{i_{k-1}}\cdots s_{i_1})$ と書き直せる．ゆえに $s_i w = s_{i_1}\cdots\widehat{s_{i_k}}\cdots s_{i_p}$ となる． □

系 1.2. 任意の元 $w \in \widetilde{W}_{\mathrm{af}}$ と $i \in I$ に対して次が成り立つ.

$$\ell(s_i w) = \begin{cases} \ell(w)+1 & (w^{-1}(\alpha) \in S_+) \\ \ell(w)-1 & (w^{-1}(\alpha) \in S_-) \end{cases}$$

$w, w' \in \widetilde{W}_{\mathrm{af}}$ に対して, $\ell(w) > \ell(w')$ であって, 更にある正ルート $\beta \in S_+$ が存在して $w' = s_\beta w$ となる時 $w \leftarrow w'$ と書く．また, $w_1,\ldots,w_{p-1} \in \widetilde{W}_{\mathrm{af}}$ が存在して $w = w_0 \leftarrow w_1 \leftarrow \cdots \leftarrow w_p = w'$ となっている時 $w \succcurlyeq_B w'$ と書く．これで定まる $\widetilde{W}_{\mathrm{af}}$ 上の順序 $\succcurlyeq_B$ を Bruhat 順序と呼ぶ.

命題 1.3. $w, w' \in \widetilde{W}_{\mathrm{af}}$ とし, $w = s_{i_1}\cdots s_{i_p}$ を最短表示とする．このとき次の 3 条件は同値.

(a) $w \succcurlyeq_B w'$

(b) $(i_1,\ldots,i_p)$ の部分列 $(j_1,\ldots,j_q)$ が存在して $w' = s_{j_1}\cdots s_{j_q}$ と書ける.

(c) $(i_1,\ldots,i_p)$ の部分列 $(j_1,\ldots,j_q)$ が存在して $w' = s_{j_1}\cdots s_{j_q}$ は最短表示である.

証明. (a) ⇒ (b), (c) について．$w \succcurlyeq_B w'$ とする．すなわち W_{af} の列 $w = w_0 \leftarrow w_1 \leftarrow \cdots \leftarrow w_p = w'$ が存在して $w_i = s_{\beta_i}w_{i-1}$, $\beta_i \in S_+$ かつ $\ell(w_{i-1}) > \ell(w_i)$ である．これから $w_{i-1}^{-1}(\beta_i) < 0$ が従う．ここで exchange relation (命題 1.1) より, ある $k \in \{1,\ldots,p\}$ が存在して $w_1 = s_{\beta_1}w_0 = s_{\beta_1}w = s_{i_1}\cdots\widehat{s_{i_k}}\cdots s_{i_p}$. これを順次繰り返して, w' は w から p 文字抜かれた表示 $w' = s_{j_1}\cdots s_{j_q}$ を得る．これが w' の最短表示でなければ, 再び命題 1.1 より $s_{j_1}\cdots s_{j_q} \leftarrow \cdots \leftarrow w'$ なる列が作れてしまい, 長さ ℓ に関して矛盾する.

(c) ⇒ (a) について．最短表示 $w = s_{i_1}\cdots s_{i_p}$ に対して w' がその部分ワードで $w' = s_{j_1}\cdots s_{j_q}$ と書けたとする．つまり $w = s_{i_1}\cdots s_{j_1}\cdots s_{j_q}\cdots s_{i_p}$ である．w のワードを右から見て w' のワードにないものを s_β の形にして左に送ることで $w \succcurlyeq_B w'$ が言える． □

$\lambda, \mu \in P$ に対して支配的順序 $\geq$ を

$$\lambda \geq \mu \ :\Longleftrightarrow\ \lambda - \mu \in Q_+$$

で定義する．また任意の $\mu \in P^\vee$ に対して, その W_0 における軌道の中で $P_+^\vee$ に属する元が唯一つ決まるが, その元を μ_+ と書く．即ち $W_0.\mu \cap P_+^\vee = \{\mu_+\}$. 次の命題は Bruhat 順序と支配的順序の関係についてのものであり, 後の議論で非常に重要になる.

命題 1.4. $u \in \Omega$, $w, w' \in \widetilde{W}_{\mathrm{af}}$, $\mu, \mu' \in P^\vee$, $v, v' \in W_0$ が $wu = \tau(\mu)v$ かつ $w'u = \tau(\mu')v'$ を満たす時,

$$w \succcurlyeq_B w' \Longrightarrow \mu_+ > \mu'_+ \quad \text{又は} \quad \begin{cases} \mu_+ = \mu'_+ \\ \mu \geq \mu' \end{cases}$$

証明. $w \succcurlyeq_B w'$ だから, ある $\beta \in S_+$ が存在して $w' = s_\beta w$ かつ $w^{-1}(\beta) < 0$. このとき $w'u = s_\beta wu = s_\beta\tau(\mu)v = \tau(s_\beta\mu)s_\beta v$ である．以下, $\beta \in R_+$ か否かで場合分けする.

(1) $\beta \in R_+$ を仮定する．このとき $\mu' = s_\beta\mu$, $v' = s_\beta v$ である.

$$u^{-1}w^{-1}(\beta) = v^{-1}(\tau(-\mu)(\beta)) = v^{-1}(\beta - \langle\mu,\beta\rangle\delta) = v^{-1}(\beta) - \langle\mu,\beta\rangle\delta < 0$$

これから $u^{-1}w^{-1}(\beta) < 0 \iff \langle\mu,\beta\rangle = 0$ かつ $v^{-1}(\beta) < 0$ または $\langle\mu,\beta\rangle > 0$.

- $\langle\mu,\beta\rangle = 0$ のとき: $\mu' = s_\beta(\mu) = \mu - \langle\mu,\beta\rangle\beta^\vee = \mu$ であり, $v^{-1}(\beta) < 0$ から $v' = s_\beta v \prec_B v$.
- $\langle\mu,\beta\rangle > 0$ のとき: $\mu' = s_\beta(\mu) = \mu - \langle\mu,\beta\rangle\beta^\vee < \mu$.

(2) $\beta \in S_+$ かつ $\beta \notin R_+$ を仮定する. 即ち $\beta = \gamma + m\delta$, $m \in \mathbb{Z}_{>0}$ と書ける.

$$\begin{aligned} u^{-1}w^{-1}(\beta) &= v^{-1}\tau(-\mu)(\gamma + m\delta) = v^{-1}(\gamma + m\delta - \langle\mu,\gamma\rangle\delta) \\ &= v^{-1}(\gamma + (m - \langle\mu,\gamma\rangle)\delta) = v^{-1}(\gamma) + (m - \langle\mu,\gamma\rangle)\delta \end{aligned}$$

より, $u^{-1}w^{-1}(\beta) < 0 \iff m - \langle\mu,\gamma\rangle = 0$ かつ $v^{-1}(\gamma) < 0$ または $m - \langle\mu,\gamma\rangle < 0$ が従う. 次に $s_\beta = s_{\gamma+m\delta} = \tau(m\gamma^\vee)s_\gamma$ である. 実際, (1.1) の $c \in \widetilde{U}$ を用いて, 任意の $\lambda \in P$ に対して

$$\begin{aligned} s_\beta(\lambda) &= \lambda - \langle\gamma^\vee + mc, \lambda\rangle(\gamma + m\delta) = \lambda - \langle\gamma^\vee,\lambda\rangle(\gamma + m\delta) = (\lambda - \langle\gamma^\vee,\lambda\rangle\gamma) - \langle m\gamma^\vee,\lambda\rangle\delta \\ &= s_\gamma(\lambda) + \langle m\gamma^\vee, s_\gamma(\lambda)\rangle\delta = \tau(m\gamma^\vee)s_\gamma(\lambda) \end{aligned}$$

より分かる. さて,

$$w'u = s_\beta wu = s_\beta\tau(\mu)v = \tau(m\gamma^\vee)s_\gamma\tau(\mu)v = \tau(s_\gamma(\mu) + m\gamma^\vee))s_\gamma v$$

つまり $\mu' = s_\gamma(\mu) + m\gamma^\vee$, $v' = s_\gamma v$ である.

- $m - \langle\mu,\gamma\rangle = 0$ かつ $v^{-1}(\gamma) < 0$ の場合. $\mu' = s_\gamma(\mu) + m\gamma^\vee = \mu - (\langle\mu,\gamma\rangle - m)\gamma^\vee = \mu$ であり, $v^{-1}(\gamma) < 0$ から $v' = s_\gamma v \preccurlyeq_B v$ である.
- $m - \langle\mu,\gamma\rangle < 0$ の場合. $\mu' = s_\gamma(\mu) + m\gamma^\vee$, $s_\gamma(\mu) = \mu - \langle\mu,\gamma\rangle\gamma^\vee$ である. $m > 0$, $m - \langle\mu,\gamma\rangle < 0$ より $\langle\mu,\gamma\rangle > 0$. ここで $k := \langle\mu,\gamma\rangle$ とおく. $s_\gamma(\mu) = \mu - k\gamma^\vee$ で $\mu' = s_\gamma(\mu) + m\gamma^\vee = \mu + (m-k)\gamma^\vee$, $m - k < 0$ かつ $m > 0$ より $0 < m < k$ である. これで $\mu'_+ < \mu_+$ がいえた.

□

ここで, $\lambda, \mu \in P^\vee$ に対して順序 $\succcurlyeq$ を

$$\lambda \succcurlyeq \mu \iff \lambda_+ > \mu_+ \ \text{又は}\ \begin{cases} \lambda_+ = \mu_+ \\ \lambda \geq \mu \end{cases}$$

により定義する.

1.3 アフィン Hecke 環

1990 年代前半に Cherednik は, アフィン Hecke 環を基礎として Macdonald 理論を再構築した. この副節ではアフィン Hecke 環を定義し, Ram-Yip の公式を証明するための必要最低限の基本事項を紹介することを目標とする.

パラメータの集合 $\{t_\alpha \mid \alpha \in S\} \subset \mathbb{K}$ は, 条件 $\beta \in \widetilde{W}_{\mathrm{af}}.\alpha \Rightarrow t_\alpha = t_\beta$ を満たすものとする. 特に $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_\ell$ に対しては $t_i := t_{\alpha_i}$ と書く. また $e \in \mathbb{Z}_{>0}$ であって

$$\langle P^\vee, P\rangle \subseteq e^{-1}\mathbb{Z}$$

を満たすものを固定し, $\mathbb{K} := \mathbb{Q}(t_\alpha^{\frac{1}{2}}, q^{\frac{1}{e}} \mid \alpha \in S)$ と定義する. 各 Weyl 群 W_0, W_{af}, $\widetilde{W}_{\mathrm{af}}$ の Hecke 化

$$\begin{aligned} &H(W_0) = \mathbb{K}\langle T_1, \ldots, T_\ell\rangle \\ &\ \cap \\ &H(W_{\mathrm{af}}) = \mathbb{K}\langle T_0, T_1, \ldots, T_\ell\rangle \\ &\ \subseteq \\ &H(\widetilde{W}_{\mathrm{af}}) = \mathbb{K}\langle T_0, T_1, \ldots, T_\ell\ ;\ u\ (u \in \Omega)\rangle \end{aligned}$$

を考える. 正確には, まず $\widetilde{W}_{\mathrm{af}}$ の Hecke 化 $H(\widetilde{W}_{\mathrm{af}})$ を次の基本関係式で定義する.

$$\begin{aligned}
(T_i - t_i^{\frac{1}{2}})(T_i + t_i^{-\frac{1}{2}}) &= 0 \qquad && (i \in \{0, 1, \ldots, n\}) \\
\overbrace{T_i T_j \cdots}^{m_{ij}} &= \overbrace{T_j T_i \cdots}^{m_{ij}} && \\
u_\sigma u_\tau &= u_{\sigma\tau} && (u_\sigma, u_\tau \in \Omega) \\
u_\sigma T_i &= T_{\sigma(i)} u_\sigma && (i \in \{0, 1, \ldots, n\},\ u_\sigma \in \Omega)
\end{aligned}$$

二番目の関係式を組紐関係式と呼ぶ. また $H(W_0)$, $H(W_{\mathrm{af}})$, $H(\widetilde{W}_{\mathrm{af}})$ をそれぞれ有限 Hecke 環, アフィン Hecke 環, 拡大アフィン Hecke 環と呼ぶ [M03, §4.1].

一般に $\widetilde{w} \in \widetilde{W}_{\mathrm{af}}$ の最短表示 $\widetilde{w} = wu = s_{i_1} \cdots s_{i_p} u$, $u \in \Omega$ に対して,

$$T(\widetilde{w}) = T(w) T_u := T_{i_1} \cdots T_{i_p} T_u \in H(\widetilde{W}_{\mathrm{af}})$$

と定める. このとき $T(\widetilde{w})$ は $\widetilde{w}$ の最短表示の取り方に依らない (岩堀・松本の補題 [IM65]). 以後 $T(w)$ を T_w と書くこともある. 一般の T_w, $T_{w'} \in H(\widetilde{W}_{\mathrm{af}})$ に対する積 $T_w T_{w'}$ は

$$T_w T_{w'} = T_{ww'} \quad (\ell(ww') = \ell(w) + \ell(w'))$$

となる [M03, §3.1, §4.1]. また系 1.2 により次の関係式が従う:

$$T_{s_i w} = \begin{cases} T_i T_w & (w^{-1}(\alpha_i) \in S_+) \\ T_i^{-1} T_w & (w^{-1}(\alpha_i) \in S_-) \end{cases}. \tag{1.3}$$

任意の $\lambda \in P_+^\vee$ に対して

$$Y^\lambda := T(\tau(\lambda))$$

と定義する. Y^λ 達は可換である. 実際, $\rho := \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in R_+} \alpha$ と書くと次が成り立つ.

$$\begin{aligned}
\ell(\tau(\lambda)) &= \langle \lambda, 2\rho \rangle \qquad && (\lambda \in P_+^\vee), \\
\ell(\tau(\lambda + \lambda')) &= \ell(\tau(\lambda)) + \ell(\tau(\lambda')) && (\lambda, \lambda' \in P_+^\vee).
\end{aligned}$$

すると, $\lambda, \lambda' \in P_+^\vee$ に対して

$$\begin{aligned}
Y^{\lambda + \lambda'} = T(\tau(\lambda + \lambda')) &= T(\tau(\lambda)) T(\tau(\lambda')) = T(\tau(\lambda')) T(\tau(\lambda)) \\
&= Y^\lambda Y^{\lambda'} = Y^{\lambda'} Y^\lambda
\end{aligned}$$

となり, Y^λ と $Y^{\lambda'}$ は互いに可換であることがわかる.

また任意の $\mu = \sum_{i=1}^n \langle \mu, \alpha_i \rangle \omega_i^\vee \in P^\vee$ に対して $\mu = \lambda - \lambda'$ $(\lambda, \lambda' \in P_+^\vee)$ と表示し,

$$Y^\mu := T(\tau(\lambda)) T(\tau(\lambda'))^{-1} = Y^\lambda (Y^{\lambda'})^{-1}$$

と定義する. Y^λ 達の可換性から Y^μ は λ, λ' の取り方に依らない. そして $\{Y^\mu \mid \mu \in P^\vee\}$ は互いに可換であることが分かる. また $\mathbb{K}[Y^{\pm 1}] := \bigoplus_{\mu \in P^\vee} \mathbb{K} Y^\mu \simeq \mathbb{K}[Y^{P^\vee}]$ とすれば,

$$H(\widetilde{W}_{\mathrm{af}}) = H(W_{\mathrm{af}}) \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{K}[\Omega] = H(W_0) \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{K}[Y^{\pm 1}] = \bigoplus_{v \in W_0,\, \mu \in P^\vee} \mathbb{K} T_v Y^\mu$$

が成り立つ [L89, Prop. 3.7]. 次に, 一般の $\mu \in P^\vee$ に対して Y^μ を T_w, u $(w \in W_{\mathrm{af}}, u \in \Omega)$ の積で表示する公式を与える.

命題 1.5 ([M03, §3.2, (3.2.10)]). $wu = s_{i_1}\cdots s_{i_p}u = \tau(\mu)v \in \widetilde{W}_{\mathrm{af}}$ に対して

$$u^{-1}T_{i_p}^{-\epsilon_p}\cdots T_{i_1}^{-\epsilon_1} = T_{v^{-1}}^{-1}Y^{-\mu}.$$

但し, 各 $k=1,\dots,p$ に対して $\epsilon_k := \begin{cases} 1 & (\overline{\beta_k(w)} \in R_+) \\ -1 & (\overline{\beta_k(w)} \in R_-) \end{cases}$.

証明. $u^{-1}w^{-1} = u^{-1}s_{i_p}\cdots s_{i_1} = v^{-1}\tau(-\mu)$ を考える. $\kappa := m\rho^\vee = m(\omega_1^\vee + \cdots + \omega_n^\vee) \in P_+^\vee$ で $\kappa - \mu \in P_+^\vee$ となるように m を十分大きくとる. $u^{-1}w^{-1}$ に左から $\tau(\kappa)$ を乗じる.

$$u^{-1}s_{i_p}\cdots s_{i_1}\tau(\kappa) = v^{-1}\tau(\kappa-\mu)$$

ここで (1.3) を適用すると

$$u^{-1}T_{i_p}^{\epsilon'_p}\cdots T_{i_1}^{\epsilon'_1}Y^{\kappa} = T_{v^{-1}}^{-1}Y^{\kappa-\mu}$$

となる. 但し $\epsilon'_k := \pm 1$ $(\tau(-\kappa)\beta_k(w) \in S_\pm)$ とした. 以後, 記号を省略して $\beta_k := \beta_k(w)$ と書く. Y^κ を払うと

$$u^{-1}T_{i_p}^{\epsilon'_p}\cdots T_{i_1}^{\epsilon'_1} = T_{v^{-1}}Y^{-\mu}.$$

さて $\tau(-\kappa)\beta_k = \beta_k - \langle\kappa,\beta_k\rangle\delta$ であることに注意して, $\beta_k = \gamma_k + m_k\delta$ $(\gamma_k \in R)$ と表示すると

$$\tau(-\kappa)\beta_k = \gamma_k + (m_k - \langle\kappa,\gamma_k\rangle)\delta$$

である. $\kappa = m\rho^\vee$ の m を十分大きくとると,

$$\begin{cases} \gamma_k > 0 \text{ のときは } m_k - \langle\kappa,\gamma_k\rangle < 0 \\ \gamma_k < 0 \text{ のときは } m_k - \langle\kappa,\gamma_k\rangle > 0 \end{cases}$$

となる. 従って

$$u^{-1}T_{i_p}^{-\epsilon_p}\cdots T_{i_1}^{-\epsilon_1} = T_{v^{-1}}Y^{-\mu}.$$

□

1.4 アフィン Hecke 環と非対称 Macdonald 多項式

前副節 1.3 で導入したアフィン Hecke 環 $H(\widetilde{W}_{\mathrm{af}})$ から非対称 Macdonald 多項式が定義されることを解説することをこの節の目標とする.

基本ウェイト $\omega_i \in P$ $(i \in I_0)$ に対して不定元を $x^{\omega_i} := x_i$ と定義する. また零ルート $\delta \in \widetilde{V}$ に対しては $x^\delta := q \in \mathbb{K}$ とし, 一般のウェイト $\widetilde{\lambda} = \lambda + k\delta \in \widetilde{P} = P \oplus \frac{1}{e}\mathbb{Z}\delta$ に対しては $x^{\widetilde{\lambda}} := x^\lambda q^k$ と決める. 以下, 乗法群 $x^P := \{x^\lambda \mid \lambda \in P\}$ の群環

$$\mathbb{K}[x^P] = \mathbb{K}[x^{\pm\omega_1}, x^{\pm\omega_2}, \dots, x^{\pm\omega_\ell}]$$

を Laurent 多項式環の記号 $\mathbb{K}[x^{\pm 1}] = \mathbb{K}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_\ell^{\pm 1}]$ で表し, その商体を $\mathbb{K}(x)$ で表す. 各 $i \in I$ に対して

$$T_i^x = c_i(x^{\alpha_i})s_i^x + d_i(x^{\alpha_i})$$

と定める. ここで s_i^x は x 変数に関する鏡映で

$$s_i^x(x^\lambda) = x^{s_i(\lambda)} \quad (\lambda \in P).$$

また任意のアフィンルート $\widetilde{\alpha}=\alpha+k\delta\in S$ に対しては, $\alpha\in W_{\mathrm{af}}.\alpha_i$ なる $i\in I$ を用いて

$$c_i(x^{\widetilde{\alpha}}):=t_i^{-\frac{1}{2}}\frac{1-t_ix^{\widetilde{\alpha}}}{1-x^{\widetilde{\alpha}}},\quad d_i(x^{\widetilde{\alpha}}):=\frac{t_i^{\frac{1}{2}}-t_i^{-\frac{1}{2}}}{1-x^{\widetilde{\alpha}}}$$

と定める. このとき

$$c_i(x^{\widetilde{\alpha}})+d_i(x^{\widetilde{\alpha}})=t_i^{\frac{1}{2}},\quad c_i(x^{\widetilde{\alpha}})+c_i(x^{-\widetilde{\alpha}})=t_i^{\frac{1}{2}}+t_i^{-\frac{1}{2}}$$

を満たすので, T_i^x は

$$(T_i^x-t_i^{\frac{1}{2}})(T_i^x+t_i^{-\frac{1}{2}})=0\quad(i\in I)$$

を満たす. また T_i^x は組紐関係式を満たすことが直接計算によって確かめられる. よって次の $\mathbb{K}$ 代数としての準同型が得られる.

$$\rho^x:H(W_{\mathrm{af}})=\mathbb{K}\langle T_0,T_1.\dots,T_\ell\rangle\longrightarrow\mathbb{K}(x)[W_{\mathrm{af}}];\quad\rho^x(T_i):=T_i^x\quad(i\in\{0,1,\dots,\ell\})$$

また $u_\sigma\in\Omega$ に対して u_σ^x を次で定める.

$$u_\sigma^x(x^\lambda)=x^{u_\sigma(\lambda)}\quad(\lambda\in P).$$

$\rho^x(u_\sigma):=u_\sigma^x$ とすることで, ρ^x は拡大アフィン Hecke 環 $H(\widetilde{W}_{\mathrm{af}})$ の表現に持ち上がる.

$$\rho^x:H(\widetilde{W}_S)\longrightarrow\mathrm{End}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}[x^{\pm1}])$$

また $\mu\in P^\vee$ に対して q 差分作用素 $\tau^x(\mu)$ を次で定める.

$$\tau^x(\mu)(x^\lambda):=x^{\tau(\mu)(\lambda)}=q^{\langle\mu,\lambda\rangle}x^\lambda\quad(\lambda\in P).$$

命題 1.6. $H(W_0)=\langle T_1,\dots,T_\ell\rangle$ の生成元の $\mathbb{K}[x^{\pm1}]$ への作用は次の三角性をもつ.

$$T_i^x(x^\lambda)=t_i^{\epsilon(-\langle\alpha_i^\vee,\lambda\rangle)}x^{s_i(\lambda)}+(\succcurlyeq \text{に関して小さい項})\quad(i\in I_0).$$

但し $\epsilon(x):=\begin{cases}1/2 & (x\geq 0)\\ -1/2 & (x<0)\end{cases}.$

証明. T_i^x $(i\in I)$ の単項式 x^λ $(\lambda\in P)$ への作用を計算する. $k=\langle\alpha_i^\vee,\lambda\rangle$ とおき, $k\geq 0,\ k=0,\ k<0$ の 3 つの場合に分けて計算を行う. また $c_i(x^{\alpha_i})+d_i(x^{\alpha_i})=t_i^{\frac{1}{2}}$ が成り立つので

$$T_i^x=c_i(x^{\alpha_i})s_i^x+d_i(x^{\alpha_i})=t_i^{\frac{1}{2}}s_i^x+\frac{t_i^{\frac{1}{2}}-t_i^{-\frac{1}{2}}}{1-x^{\alpha_i}}(1-s_i^x)$$

と表せることに注意する.

$$\begin{aligned}
(k\geq 0)\qquad T_i^x(x^\lambda)&=t_i^{\frac{1}{2}}x^{\lambda-k\alpha_i}-(t_i^{\frac{1}{2}}-t_i^{-\frac{1}{2}})x^{\lambda-k\alpha_i}\frac{1-x^{k\alpha_i}}{1-x^{\alpha_i}}\\
&=t_i^{\frac{1}{2}}x^{\lambda-k\alpha_i}-(t_i^{\frac{1}{2}}-t_i^{-\frac{1}{2}})x^{\lambda-k\alpha_i}(1+x^{\alpha_i}+\cdots+x^{(k-1)\alpha_i})\\
&=t_i^{-\frac{1}{2}}x^{s_i(\lambda)}-(t_i^{\frac{1}{2}}-t_i^{-\frac{1}{2}})(x^{\lambda-(k-1)\alpha_i}+\cdots+x^{\lambda-\alpha_i}),\\
(k=0)\qquad T_i^x(x^\lambda)&=t_i^{\frac{1}{2}}x^\lambda,\\
(k<0)\qquad T_i^x(x^\lambda)&=t_i^{\frac{1}{2}}x^{\lambda-k\alpha_i}+(t_i^{\frac{1}{2}}-t_i^{-\frac{1}{2}})x^\lambda\frac{1-x^{-k\alpha_i}}{1-x^{\alpha_i}}\\
&=t_i^{\frac{1}{2}}x^{\lambda-k\alpha_i}+(t_i^{\frac{1}{2}}-t_i^{-\frac{1}{2}})x^\lambda(1+x^{-\alpha_i}+\cdots+x^{-(k-1)\alpha_i})\\
&=t_i^{\frac{1}{2}}x^{\lambda-k\alpha_i}+(t_i^{\frac{1}{2}}-t_i^{-\frac{1}{2}})x^\lambda+(t_i^{\frac{1}{2}}-t_i^{-\frac{1}{2}})(x^{\lambda-\alpha_i}+\cdots+x^{\lambda-(k-1)\alpha_i}).
\end{aligned}$$

以上の計算から, $\alpha \in R,\ \lambda \in P$ とし, $k = \langle \alpha^\vee, \lambda \rangle > 0$ としたとき λ と $s_\alpha(\lambda) = \lambda - k\alpha$ を結ぶ線分の任意の内部の点 $\mu = \lambda - k\alpha$ $(k = 1, \ldots, k-1)$ に対して $\mu_+ < \lambda_+$ が成り立つことを示せばよい. いま $\mu_+ = w(\mu)$ を満たす $w \in W_0$ をとると, $\mu_+ = w(\lambda) - kw(\alpha)$ は

$$w(\lambda),\ ws_\alpha(\lambda) = s_{w(\alpha)}w(\lambda) = w(\lambda) - \langle w(\alpha)^\vee, w(\lambda) \rangle w(\alpha) = w(\lambda) - kw(\alpha)$$

の線分上の点である. この時 $w(\lambda) \le \lambda_+,\ ws_\alpha(\lambda) \le \lambda_+$ が成り立っている. もし $w(\alpha) > 0$ ならば $w(\lambda) - \mu_+ = k(\alpha) > 0$ であり $\lambda_+ > \mu_+$ が言える. また $w(\alpha) < 0$ ならば, $ws_\alpha(\lambda) - \mu_+ = (k-k)w(\alpha) > 0$ であり $\lambda_+ > \mu_+$ が従う. □

以下, 各 $i \in I$ に対して T_i^x を単に T_i と略記する. Y^μ $(\mu \in P_+^\vee)$ の単項式 x^λ への作用を計算することを目標にする. まずは Y^μ を $T_i^{\pm 1}$ の単項式でかく. $\tau(\mu) \in \widetilde{W}_{\mathrm{af}}$ の最短表示

$$\tau(\mu) = s_{i_1} \cdots s_{i_p} u_\sigma \quad (i_1, \ldots, i_p \in \{0, 1, \ldots, \ell\},\ u_\sigma \in \Omega)$$

を選ぶと, アフィンルートの列

$$\beta_1 = \alpha_{i_1},\ \beta_2 = s_{i_1}(\alpha_{i_2}),\ \ldots,\ \beta_p = s_{i_1} \cdots s_{i_{p-1}}(\alpha_{i_p}) \in S$$

について

$$\mathrm{inv}(\tau(\mu)) = \{\beta \in S_+ \mid \tau(-\mu)(\beta) < 0\} = \{\beta_1, \ldots, \beta_p\}$$

が成立する. 一般に $\beta \in S_+$ を $\beta = \alpha + m\delta$ $(\alpha \in R,\ m \in \mathbb{Z})$ の形で表すと, $m \ge 0,\ \alpha \in R_+$ または $m > 0$, $\alpha \in R_-$ となる. $\tau(-\mu)\beta = \beta - \langle \mu, \beta \rangle \delta = \alpha + (m - \langle \mu, \alpha \rangle)\delta$ であるから, $\tau(-\mu)\beta < 0 \iff \alpha \in R_+$ かつ $0 \le m < \langle \mu, \alpha \rangle$. 特に $k = 1, \ldots, p$ に対して

$$\beta_k = \gamma_k + m_k\delta \quad (\gamma_k \in R_+,\ 0 \le m_k < \langle \mu, \alpha \rangle).$$

従って命題 1.5 から以下が成立する.

$$Y^{-\mu} = u_\sigma^{-1} T_{i_p}^{-1} \cdots T_{i_1}^{-1}, \quad Y^\mu = T_{i_1} \cdots T_{i_p} u_\sigma.$$

Y^μ を $\mathbb{K}[x^{\pm 1}]$ 上の作用素とみるとき Y^μ のことを **Dunkl 作用素**と呼ぶ. Y^μ の単項式 x^λ への作用を計算しやすくするために, $\alpha \in W_{\mathrm{af}}.\alpha_i$ $(i = 0, 1, \ldots, \ell)$ に対して R 作用素を次で定義する.

$$R(\alpha) := c_i(x^\alpha) + d_i(x^\alpha)s_i^x = t_i^{\frac{1}{2}} + d_i(x^{\alpha_i})(s_i^x - 1).$$

このとき $T_i = R(\alpha_i)s_i$ $(i = 0, 1, \ldots, \ell)$ となることに注意する. T_i のときと同様の計算で次が従う.

命題 1.7. 以上の設定のもと

$$R(\alpha)(x^\lambda) = t_i^{\epsilon(\langle \alpha^\vee, \lambda \rangle)} x^{s_i(\lambda)} + (\succcurlyeq \text{に関して小さい項}) \quad (i = 1, \ldots, \ell)$$

が成り立つ. 但し $\epsilon(x) := \begin{cases} 1/2 & (x \ge 0) \\ -1/2 & (x < 0) \end{cases}$.

命題 1.7 から，$R(\alpha)$ の $\mathbb{K}[x^{\pm 1}]$ への作用が命題 1.4 の順序 $\succcurlyeq_B$ に関して三角性をもつことが確認できる．以上で Y^μ $(\mu \in P_+^\vee)$ の $\mathbb{K}[x^{\pm 1}]$ への作用を計算する準備ができた．

$$
\begin{aligned}
Y^\mu(x^\lambda) &= T_{i_1}^x \cdots T_{i_p}^x u_\sigma^x(x^\lambda) = R(\alpha_{i_1}) s_{i_1}^x \cdots R(\alpha_{i_p}) s_{i_p}^x u_\sigma^x(x^\lambda) \\
&= R(\beta_1)R(\beta_2)\cdots R(\beta_p)\tau^x(\mu)(x^\lambda) \\
&= q^{\langle \mu,\lambda\rangle} R(\beta_1)\cdots R(\beta_p)(x^\lambda) \\
&= q^{\langle \mu,\lambda\rangle} t_{\beta_1}^{\epsilon(\langle \beta_1^\vee,\lambda\rangle)} \cdots t_{\beta_p}^{\epsilon(\langle \beta_p^\vee,\lambda\rangle)} x^\lambda + (\succcurlyeq_B \text{ に関して小さい項}) \\
&= \eta_\lambda^\mu x^\lambda + (\succcurlyeq_B \text{ に関して小さい項})
\end{aligned}
$$

従って Dunkl 作用素 Y^μ も $\mathbb{K}[x^{\pm 1}]$ への作用が順序 $\succcurlyeq_B$ に関して三角性をもつことが分かった．

上の計算での最高次係数 η_λ^μ に注目しよう．$\beta \in S$ に対して $t_\beta = q^{c_\beta}$ とおく．既約かつ被約なルート系の設定 1.1 の下では，$\beta = \alpha + m\delta$ $(\alpha \in R)$ ならば $t_\beta = t_\alpha$ であることに注意しておく．

$$
t_{\beta_1}^{\epsilon(\langle \beta_1^\vee,\lambda\rangle)} \cdots t_{\beta_p}^{\epsilon(\langle \beta_p^\vee,\lambda\rangle)} = \prod_{\beta \in S_{\tau(\mu)}} t_\beta^{\epsilon(\langle \beta^\vee,\lambda\rangle)} = q^{\sum_{\beta \in S_{\tau(\mu)}} \epsilon(\langle \beta^\vee,\lambda\rangle) c_\beta} = q^{\sum_{\alpha \in R_+} \epsilon(\langle \alpha^\vee,\lambda\rangle)\langle \mu,\alpha\rangle c_\alpha}.
$$

ここで

$$
\rho_c(\lambda) = \sum_{\alpha \in R_+} \epsilon(\langle \alpha^\vee,\lambda\rangle) c_\alpha \alpha \qquad (\lambda \in P)
$$

という記号を用いる．特に $\lambda \in P^+$ のときは $\rho_c(\lambda) = \rho_c = \frac{1}{2}\sum_{\alpha \in R_+} c_\alpha \alpha$ となる．すると η_λ^μ は次のように書ける．

$$
\eta_\lambda^\mu = q^{\langle \mu,\lambda\rangle + \langle \mu,\rho_c(\lambda)\rangle} = q^{\langle \mu,\lambda+\rho_c(\lambda)\rangle}.
$$

η_λ^μ は $P^\vee$ 上の指標

$$
\eta_\lambda = q^\lambda t^{\rho(\lambda)} \in \mathrm{Hom}(P^\vee,\mathbb{K}^*) \qquad (t^{\rho(\lambda)} = \prod_{\alpha \in R_+} t_\alpha^{\epsilon(\langle \alpha^\vee,\lambda\rangle)\alpha})
$$

の $\mu \in P^\vee$ での値とみなせる． 代数的トーラス $(\mathbb{K}^*)^\ell$ の有限集合に対して，各点で相異なる値をとる $f(x) \in \mathbb{K}[x^{\pm 1}]$ が存在することと，Dunkl 作用素 Y^μ の単項式 x^λ に関する三角性から次の定理を得る．

定理 1.8. 任意の $\lambda \in P$ に対して，Laurent 多項式 $E_\lambda(x) \in \mathbb{K}[x^{\pm 1}]$ であって次の条件を満たすものが唯一つ存在する．

1. $E_\lambda(x) = x^\lambda + (\succcurlyeq$ に関して低い項.)
2. 任意の $\mu \in P_+^\vee$ に対し $Y^\mu E_\lambda(x) = \eta_\lambda^\mu E_\lambda(x)$, $\eta_\lambda^\mu = q^{\langle \mu,\lambda\rangle}\prod_{\alpha \in R_+} t_\alpha^{\epsilon(\langle \alpha^\vee,\lambda\rangle)\langle \mu,\alpha\rangle}$.

定理 1.8 の $E_\lambda(x)$ を**非対称 Macdonald 多項式**という [M03].

1.5 絡作用素の計算

この副節では Lusztig 関係式と二重アフィン Hecke 環の反対合から絡作用素を導入し，非対称 Macdonald 多項式に対して，その絡作用素がどのような働きをするのかを説明する．

T_i $(i = 0,1,\ldots,\ell)$ と単項式 x^λ との関係式をみる．一般の $f(x) \in \mathbb{K}[x^{\pm 1}]$ に対して

$$
\begin{aligned}
&T_i^x x^\lambda f(x) - x^{s_i\lambda} T_i^x f(x) \\
&= (c_i(x^{\alpha_i}) s_i^x + d_i(x^{\alpha_i})) x^\lambda f(x) - x^{s_i\lambda}(c_i(x^{\alpha_i}) s_i^x + d_i(x^{\alpha_i})) f(x) \\
&= c_i(x^{\alpha_i}) x^{s_i\lambda} s_i^x(f(x)) + d_i(x^{\alpha_i}) x^\lambda f(x) - x^{s_i\lambda} c_i(x^{\alpha_i}) s_i^x(f(x)) - x^{s_i\lambda} d_i(x^{\alpha_i}) f(x) \\
&= d_i(x^{\alpha_i})(x^\lambda - x^{s_i\lambda}) f(x)
\end{aligned}
$$

となる．この関係式

$$T_i x^\lambda - x^{s_i\lambda} T_i = d_i(x^{\alpha_i})(x^\lambda - x^{s_i\lambda})$$

を **Lusztig 関係式**という [L89, Prop. 3.6]．以下では少し変形した

$$(T_i - d_i(x^{\alpha_i}))x^\lambda = x^{s_i\lambda}(T_i - d_i(x^{\alpha}))$$

を用いる．$i = 0, 1, \ldots, \ell$ に対して

$$S_i^x := T_i + \varphi_i^+(x^{\alpha_i}) = T_i^{-1} + \varphi_i^-(x^{\alpha_i}), \quad \varphi_i^\pm(z) := \mp\frac{t_i^{\frac{1}{2}} - t_i^{-\frac{1}{2}}}{1 - z^{\pm 1}}$$

とおき，S_i^x を x **側の絡作用素** (intertwiner) という．これらは組紐関係式を満たすことから，$w = s_{i_1}\cdots s_{i_p}u \in \widetilde{W}_{\mathrm{af}}$ に対して

$$S_w^x := S_{i_1}^x \cdots S_{i_p}^x u$$

が well-defined である．

二重アフィン Hecke 環 [C92] とは次の代数のことであった:

$$DH(W_{\mathrm{af}}) = \mathbb{K}[x^P] \otimes_{\mathbb{K}} H(W_0) \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{K}[Y^{P^\vee}]$$

$DH(W_{\mathrm{af}})$ 上には **Cherednik 対合**と呼ばれる反対合 ϕ が存在する．

定理 1.9 ([C92])**.** 二重アフィン Hecke 環 $DH(W_{\mathrm{af}})$ の反対合 ϕ であって以下の条件を満たすものが存在する．

$$\phi(x^\lambda) = Y^{-\lambda}, \quad \phi(Y^\mu) = x^{-\mu}, \quad \phi(T_i) = T_i \ (i = 0, 1, \ldots, \ell)$$

定理 1.9 の証明については [M03, (3.5.1)] を参照せよ．Lusztig 関係式に ϕ を施すことで，T_i $(i = 1, \ldots, \ell)$ と Y^λ との関係式が得られる．

$$Y^{-\lambda}T_i - T_i Y^{-s_i\lambda} = d_i(Y^{-\alpha_i^\vee})(Y^{-\lambda} - Y^{-s_i\lambda})$$
$$Y^{-\lambda}(T_i - d_i(Y^{-\alpha_i^\vee})) = (T_i - d_i(Y^{-\alpha_i^\vee}))Y^{-s_i\lambda}$$

ここで $-s_i\lambda$ を改めて λ と置き直す．

$$(T_i - d_i(Y^{-\alpha_i^\vee}))Y^\lambda = Y^{s_i\lambda}(T_i - d_i(Y^{-\alpha_i^\vee})). \tag{1.4}$$

(1.4) を展開すれば Y 側の Lusztig 関係式を得る [L89, Prop. 3.6]．さて，$i = 1\ldots, \ell$ に対して S_i^Y を

$$S_i^Y := T_i + \varphi_i^+(Y^{-\alpha_i^\vee}) = T_i^{-1} + \varphi_i^-(Y^{-\alpha_i^\vee})$$

と定義する．また最高ルート θ (1.1) によって $s_0 = s_\theta \tau(\theta^\vee)$ と書けることと命題 1.5 によって

$$T_0 = T_{s_\theta}^{-1} Y^{\theta^\vee}$$

が従う．そこで S_0^Y を次のように決める．

$$S_0^Y := x^{-\theta^\vee} T_\theta^{-1} + \varphi_0^+(qY^{-\theta}) = T_\varphi x^{\theta^\vee} + \varphi_0^-(qY^{-\theta})$$

S_i^Y $(i = 0, 1, \ldots, \ell)$ を Y **側の絡作用素**という．x 側の絡作用素と同様に S_i^Y 達も組紐関係式を満たす．任意の $w = s_{i_1}\cdots s_{i_p}u \in \widetilde{W}_{\mathrm{af}}$ に対して

$$S_w^Y := S_{i_1}^Y \cdots S_{i_p}^Y u$$

とかく．S_i^Y $(i=0,1,\dots,\ell)$ と非対称 Macdonald 多項式 $E_\lambda(x)$ は

$$Y^\mu S_i^\mu E_\lambda(x) = S_i^Y Y^{s_i\mu} E_\lambda(x) = S_i^Y \eta_\lambda^{s_i\mu} E_\lambda(x) = \eta_{s_i\lambda}^\mu S_i^Y E_\lambda(x).$$

という関係を満たす．つまり

$$S_i^Y E_\lambda(x) = \mathrm{Const.} E_{s_i\lambda}(x)$$

となる．また上記の Const. は具体的に計算できる．

補題 1.10. S_i^Y $(i=1,\dots,\ell)$ と $E_\lambda(x)$ $(\lambda \in P)$ に対して

$$S_i^Y E_\lambda(x) = \begin{cases} t_i^{-\frac{3}{2}} \frac{(1-t_i\eta_\lambda^{\alpha_i^\vee})(1-t_i\eta_\lambda^{-\alpha_i^\vee})}{(1-\eta_\lambda^{\alpha_i^\vee})(1-\eta_\lambda^{-\alpha_i^\vee})} E_{s_i\lambda}(x) & (\langle \alpha_i^\vee, \lambda\rangle > 0) \\ 0 & (\langle \alpha_i^\vee, \lambda\rangle = 0) \\ t_i^{\frac{1}{2}} E_{s_i\lambda}(x) & (\langle \alpha_i^\vee, \lambda\rangle < 0) \end{cases}$$

証明.

$$S_i^Y E_\lambda(x) = (T_i + \varphi_i^+(Y^{-\alpha_i^\vee}))E_\lambda(x) = \mathrm{Const.} E_{s_i(\lambda)}(x),$$

$$T_i E_\lambda(x) = \mathrm{Const.} E_{s_i(\lambda)}(x) - \varphi_i^+(\eta_\lambda^{-\alpha_i^\vee})E_\lambda(x), \tag{1.5}$$

$$T_i E_\lambda(x) = \alpha_\lambda E_\lambda(x) + \beta_\lambda E_{s_i\lambda}(x). \tag{1.6}$$

$k=\langle \alpha_i^\vee, \lambda\rangle$ とし，$k>0,\ k=0,\ k<0$ に場合分けして計算する．

$k=0$ のときを考える．$s_i(\rho(\lambda)) = \rho(\lambda) - \langle \alpha_i^\vee, \rho(\lambda)\rangle \alpha_i$ であるが，一方で

$$s_i(\rho(\lambda)) = \sum_{\alpha \in R_+ \setminus \{\alpha_i\}} \epsilon(\langle \alpha^\vee, \lambda\rangle)\alpha - \frac{1}{2}\alpha_i = \rho(\lambda) - \alpha_i$$

であることから $\langle \alpha_i^\vee, \rho(\lambda)\rangle = 1$ であることが分かった．さらに

$$\langle \alpha_i^\vee, \rho(\lambda)\rangle = \langle \alpha_i^\vee, \frac{1}{2}\alpha_i\rangle + \langle \alpha_i^\vee, \sum_{\alpha \in R_+ \setminus \{\alpha_i\}} \epsilon(\langle \alpha^\vee, \lambda\rangle)\alpha\rangle = 1 + \langle \alpha_i^\vee, \sum_{\alpha \in R_+ \setminus \{\alpha_i\}} \epsilon(\langle \alpha^\vee, \lambda\rangle)\alpha\rangle = 1$$

から $\langle \alpha_i^\vee, \sum_{\alpha \in R_+ \setminus \{\alpha_i\}} \epsilon(\langle \alpha^\vee, \lambda\rangle)\alpha\rangle = 0$ となる．従って

$$\eta_\lambda^{-\alpha_i^\vee} = q^{\langle -\alpha_i^\vee, \lambda\rangle} t^{\langle -\alpha_i^\vee, \rho(\lambda)\rangle} = t_i^{-1}$$

となる．あとは直接計算によって $S_i^Y E_\lambda(x) = 0$ となる．

$k<0$ のときは $\lambda - s_i\lambda = k\alpha_i < 0$ なので，$E_\lambda(x)$ には $x^{s_i\lambda}$ の項は現れないことに注意すれば，$T_i(x^\lambda)$ の $x^{s_i\lambda}$ の係数を見れば β_λ が計算できることがわかる．

$$T_i(x^\lambda) = t_i^{\frac{1}{2}} x^{s_i\lambda} + (t_i^{\frac{1}{2}} - t_i^{-\frac{1}{2}})x^\lambda + (t_i^{\frac{1}{2}} - t_i^{-\frac{1}{2}})(x^{\lambda-\alpha_i} + \cdots + x^{\lambda-(k-1)\alpha_i}) \quad (k<0).$$

すなわち $k<0$ のとき $\beta_\lambda = t_i^{\frac{1}{2}}$．

$k>0$ のときの β_λ を計算する．(1.6) の両辺に T_i を作用させる．

$$T_i^2 E_\lambda(x) = \alpha_\lambda T_i E_\lambda(x) + \beta_\lambda T_i E_{s_i\lambda}(x)$$

$$((t_i^{\frac{1}{2}} - t_i^{-\frac{1}{2}})T_i + 1)E_\lambda(x) = \alpha_\lambda(\alpha_\lambda E_\lambda(x) + \beta_\lambda E_{s_i\lambda}(x)) + \beta_\lambda(\alpha_{s_i\lambda} E_{s_i\lambda}(x) + \beta_{s_i\lambda} E_\lambda(x))$$

$$(-\alpha_\lambda^2 + (t_i^{\frac{1}{2}} - t_i^{-\frac{1}{2}})\alpha_\lambda + 1 - \beta_\lambda\beta_{s_i\lambda})E_\lambda(x) = (\alpha_\lambda\beta_\lambda + \alpha_{s_i\lambda}\beta_\lambda - (t_i^{\frac{1}{2}} - t_i^{-\frac{1}{2}})\beta_\lambda)E_{s_i\lambda}(x).$$

以上から関係式

$$\beta_\lambda \beta_{s_i\lambda} = (t_i^{\frac{1}{2}} - \alpha_\lambda)(t_i^{-\frac{1}{2}} + \alpha_\lambda)$$

が得られる．$\beta_{s_i\lambda} = t_i^{\frac{1}{2}}$, $\alpha_\lambda = -\varphi_i^+(\eta_\lambda^{-\alpha_i^\vee})$ であるから

$$\begin{aligned}
\beta_\lambda &= t_i^{-\frac{1}{2}} \left(t_i^{\frac{1}{2}} - \frac{t_i^{\frac{1}{2}} - t_i^{-\frac{1}{2}}}{1-\eta_\lambda^{-\alpha_i^\vee}} \right) \left(t_i^{-\frac{1}{2}} + \frac{t_i^{\frac{1}{2}} - t_i^{-\frac{1}{2}}}{1-\eta_\lambda^{-\alpha_i^\vee}} \right) = t_i^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{t_i^{-\frac{1}{2}} - t_i^{\frac{1}{2}}\eta_\lambda^{-\alpha_i^\vee}}{1-\eta_\lambda^{-\alpha_i^\vee}} \right) \left(\frac{t_i^{\frac{1}{2}} - t_i^{-\frac{1}{2}}\eta_\lambda^{-\alpha_i^\vee}}{1-\eta_\lambda^{-\alpha_i^\vee}} \right) \\
&= t_i^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{t_i^{-\frac{1}{2}} - t_i^{\frac{1}{2}}\eta_\lambda^{-\alpha_i^\vee}}{1-\eta_\lambda^{-\alpha_i^\vee}} \right) \left(\frac{t_i^{-\frac{1}{2}} - t_i^{\frac{1}{2}}\eta_\lambda^{\alpha_i^\vee}}{1-\eta_\lambda^{\alpha_i^\vee}} \right) = t_i^{-\frac{3}{2}} \frac{(1-t_i\eta_\lambda^{\alpha_i^\vee})(1-t_i\eta_\lambda^{-\alpha_i^\vee})}{(1-\eta_\lambda^{\alpha_i^\vee})(1-\eta_\lambda^{-\alpha_i^\vee})}.
\end{aligned}$$

□

1.6 Ram-Yip 型公式

この副節では，いよいよ本稿の主目的である Ram-Yip の公式を解説する．$w = s_{i_1} \cdots s_{i_p} u = \tau(\lambda) v \in \widetilde{W}_S$, $u \in \Omega$ に対して，

$$S_w^Y = S_{i_1}^Y \cdots S_{i_p}^Y u \cdot 1 = \mathrm{Const}.E_\lambda(x) \tag{1.7}$$

となることがわかる．ここで絡作用素の積 S_w^Y に 1 を作用させて直ちに $E_\lambda(x)$ を得れるようにするには予めどのように展開しておくべきかという問題が考えられる．Ram-Yip の公式 [RY11] はその問題の解答を与えているのである．その説明をするために次の記号を導入する．$w = s_{i_1} \cdots s_{i_p}$ に対して

$$\beta'_k(w) = s_{i_p} \cdots s_{i_{k+1}}(\alpha_k) \quad (k = 1, \ldots, p)$$

と定める[*2]．さらに元 $w = s_{i_1} \cdots s_{i_p} u \in \widetilde{W}_{\mathrm{af}}$ の添字集合 $\{1, \ldots, p\}$ の部分集合 I に対して Weyl 群の元

$$w_I := \overrightarrow{\prod_{k \in I}} s_{i_k}, \qquad w_{I,k} = \overleftarrow{\prod_{\ell \in I,\ \ell < k}} s_\ell \quad (k \in \{1, \ldots, p\})$$

を定義する．但し $\overrightarrow{\prod}$ は小さい順に，$\overleftarrow{\prod}$ は大きい順にかけるという意味で用いている．また $\beta \in S$ に対して符号 $\epsilon(\beta) = \pm$ を

$$\epsilon(\beta) := \begin{cases} + & (\overline{\beta} \in R_+) \\ - & (\overline{\beta} \in R_-) \end{cases}$$

と定義する．また $w = s_{i_1} \cdots s_{i_p} u$ に対して $S_{w^{-1}}^x$ を次のように展開する．

- $S_{w^{-1}}^x = \sum_{I \subset \{1,\ldots,p\}} \prod_{k \notin I} \varphi_{i_k}^\pm(x^\beta) \prod_{k \in I} T_{i_k}^\pm$ という形になるように展開する．(T_i が右で $\varphi(x^\beta)$ が左に来るように展開する．)
- S_i^x の符号を命題 1.5 の左辺の T_i の符号の決め方と同じように展開する．

以下，都合上 $T_i^{\pm 1}$ を $T_i^\pm$ と書くこともあるので断っておく．

例 1.11 ($w = s_{i_1} s_{i_2}$ の場合)**.** 添字集合 $\{1, 2\}$ の部分集合を

$$I_a := \{1, 2\},\ I_b := \{1\},\ I_c := \{2\},\ I_d := \emptyset$$

[*2] $\beta_k(w)$ とは添字の並びが逆向きになっていることに注意．

とする．

$$\begin{aligned}
S^x_{i_2}S^x_{i_1} &= S^x_{i_2}(T_{i_1}^{-\epsilon(\alpha_{i_1})}+\varphi_{i_1}^{-\epsilon(\alpha_{i_1})}(x^{\alpha_i}))\\
&= S^x_{i_2}T_{i_1}^{-\epsilon(\alpha_{i_1})}+\varphi_{i_1}^{-\epsilon(\alpha_{i_1})}(x^{s_{i_2}(\alpha_{i_1})})S^x_{i_2}\\
&= (T_{i_2}^{-\epsilon(s_{i_1}(\alpha_{i_2}))}+\varphi_{i_2}^{-\epsilon(s_{i_1}(\alpha_{i_2}))}(x^{\alpha_{i_2}}))T_{i_1}^{-\epsilon(\alpha_{i_1})}+\varphi_{i_1}^{-\epsilon(\alpha_{i_1})}(x^{s_{i_2}(\alpha_{i_1})})(T_{i_2}^{-\epsilon(\alpha_{i_2})}+\varphi_{i_2}^{-\epsilon(\alpha_{i_2})}(x^{\alpha_{i_2}}))\\
&= T_{i_2}^{-\epsilon(s_{i_1}(\alpha_{i_2}))}T_{i_1}^{-\epsilon(\alpha_{i_1})}+\varphi_{i_2}^{-\epsilon(s_{i_1}(\alpha_{i_2}))}(x^{\alpha_{i_2}})T_{i_1}^{-\epsilon(\alpha_{i_1})}\\
&\qquad +\varphi_{i_1}^{-\epsilon(\alpha_{i_1})}(x^{s_{i_2}(\alpha_{i_1})})T_{i_2}^{-\epsilon(\alpha_{i_2})}+\varphi_{i_1}^{-\epsilon(\alpha_{i_1})}(x^{s_{i_2}(\alpha_{i_1})})\varphi_{i_2}^{-\epsilon(\alpha_{i_2})}(x^{\alpha_{i_2}})\\
&= T_{i_2}^{-\epsilon(\beta'_2(w_{I_a}))}T_{i_1}^{-\epsilon(\beta'_1(w_{I_a}))}+\varphi_{i_2}^{-\epsilon(w_{I_b,2}(\alpha_{i_2}))}(x^{\beta'_2})T_{i_1}^{-\epsilon(\beta_1(w_{I_b}))}\\
&\qquad +\varphi_{i_1}^{-\epsilon(w_{I_c,1}(\alpha_{i_1}))}(x^{\beta'_1})T_{i_2}^{-\epsilon(\beta_2(w_{I_c}))}+\varphi_{i_1}^{-\epsilon(w_{I_d,1}(\alpha_{i_1}))}(x^{\beta'_1})\varphi_{i_2}^{-\epsilon(w_{I_d,2}(\alpha_{i_2}))}(x^{\beta'_2})
\end{aligned}$$

例 1.11 のように，$w=s_{i_1}\cdots s_{i_p}u\in\widetilde{W}_S$ に対して右から帰納的に展開すれば次の公式が得られる．

$$S^x_{w^{-1}}=u^{-1}S^x_{i_p}\cdots S^x_{i_1}=\sum_{I\subseteq\{1,\ldots,p\}}\prod_{k\notin I}\varphi_{i_k}^{-\epsilon(w_{I,k}(\alpha_{i_k}))}(x^{\beta'_k})\overleftarrow{\prod_{k\in I}}T_{i_k}^{-\epsilon(\beta_k(w_I))}$$

さらに命題 1.5 から

$$u^{-1}S^x_{i_p}\cdots S^x_{i_1}=\sum_{I\subseteq\{1,\ldots,p\}}\prod_{k\notin I}\varphi_{i_k}^{-\epsilon(w_{I,k}(\alpha_k))}(x^{\beta'_k})T_{v_I}^{-1}Y^{-\lambda_I}\tag{1.8}$$

と書き直せる．但し $I\subseteq\{1,\ldots,p\}$ に対して

$$w_I=\tau(\lambda_I)v_I\quad(v_I\in W_0,\ \lambda_I\in P^\vee)$$

という記号を用いた．(1.8) に対して ϕ を施す．$k=1,\ldots,p$ に対して $\beta'_k=\gamma_k+m_k\delta$ $(\gamma_k\in R,\ m_k\in\mathbb{Z})$ という記号を使う．

$$S^Y_w=S^Y_{i_1}\cdots S^Y_{i_p}u=\sum_{I\subseteq\{1,\ldots,p\}}x^{\lambda_I}T_{v_I}^{-1}\prod_{k\notin I}\varphi_{i_k}^{\epsilon'(w_{I,k}(\alpha_k))}(q^{m_k}Y^{-\gamma_k}).$$

また

$$Y^{-\gamma_k}1=Y^{-\gamma_k}E_0(x)=t^{\langle-\gamma_k,\rho(0)\rangle}=t^{\langle-\gamma_k,\rho\rangle}$$

に注意する．ここで w に対して $\mathbb{K}$ の元 t_w を次のように定義する．

$$t_w=\prod_{v\in\mathrm{Inv}(w)}t_v\in\mathbb{K}.$$

定理 1.12 (非捩れアフィンルート系の Ram-Yip 型公式)**.** $w=s_{i_1}\cdots s_{i_p}u=\tau(\lambda)v$ $(u\in\Omega,\ v\in W_0)$ を最短表示としたとき次が成り立つ．

$$E_\lambda(x)=t_v\sum_{I\subseteq\{1,\ldots,p\}}x^{\lambda_I}t_{v_I}^{-\frac{1}{2}}\prod_{k\notin I}\varphi_{i_k}^{-\epsilon(w_{I,k}(\alpha_k))}(q^{m_k}t^{\langle-\gamma_k,\rho\rangle}).\tag{1.9}$$

証明. 上の定理の設定で $S^Y_w.1=\mathrm{Const.}E_\lambda(x)$ となることは (1.7) によりわかる．(1.9) の右辺の三角性を示す．そのためには任意の $I\subseteq\{1,\ldots,p\}$ に対して $\lambda\succcurlyeq\lambda_I$ が示せればよい．ここで w と任意の $I\subseteq\{1,\ldots,p\}$ に対する w_I は Bruhat 順序 $\succcurlyeq_B$ に関して $w\succcurlyeq_B w_I$ であることがと命題 1.3 から従う．すなわち $\tau(\lambda)v\succcurlyeq_B\tau(\lambda_I)v_I$ である．ゆえに命題 1.4 から $\lambda\succcurlyeq\lambda_I$ が従う．あとは先頭項 $t_v^{-\frac{1}{2}}x^\lambda$ の $t_v^{-\frac{1}{2}}$ を払うことで定理の証明が完了する．

□

1.7　alcove walk を用いた表示

この副節では Ram-Yip の公式 (1.9) を alcove walk と呼ばれる格子上の path で表示できることを説明する．[RY11] で与えられた明示式は，この alcove walk を用いたものである．

アフィンルート $\beta = \alpha + k\delta \in S$ を V 上の一次函数 $V \ni v \mapsto \beta(v) = \langle v, \alpha \rangle + k \in \mathbb{K}$ とみなし，

$$C_0 := \{v \in V \mid \alpha_i(v) \geq 0 \ (i = 0, 1, \ldots, \ell)\}$$

を基本領域 (あるいは Weyl の部屋) と呼ぶ．s_0 の V への作用を $s_0(v) = v + (1 - \langle v, \theta \rangle)\theta^\vee$ で定め，これで W_{af} の V への作用を決める．すると V は

$$V = \bigcup_{w \in W_{\mathrm{af}}} wC_0$$

と書ける．また $\alpha \in S$ に関する超平面 $H_\alpha = \{v \in V \mid \alpha(v) = 0\}$ を用いて

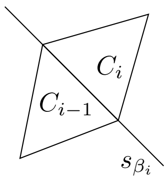
$$C_0^{\mathrm{int}} := C_0 - \bigcup_{i=0}^{\ell} H_{\alpha_i}$$

と定義し，$\bigcup_{w \in W_{\mathrm{af}}} wC_0^{\mathrm{int}}$ 内の連結成分を **alcove** という．

アフィン Weyl 群の元 $w = s_{i_1} \cdots s_{i_p} \in W_{\mathrm{af}}$ に対して V 上の path を次のように定義する．$k = 0, 1, \ldots, p$ に対して $w_0 = \mathrm{id}$, $w_k = s_{i_1} \cdots s_{i_k}$ とする．対応した alcove の列

$$C_0, \ C_1 := w_1 C_0, \ C_2 := w_2 C_0, \ \ldots, \ C_p := w_p C_0$$

を考える．$w_k = w_{k-1} s_{i_k} = s_{\beta_k} w_{k-1}$ であることに注意すれば，$i = 0, 1, \ldots, \ell$ に対して $C_i = s_{\beta_i} C_{i-1}$ となっている．



$C_0, C_1, \ldots, C_p$ からそれぞれ一点 $p_i \in C_i$ をとり，それらを $p_0, p_1, \ldots, p_p$ の順に向き付きの矢印で結ぶ．以上により出来る path を w **に付随する alcove walk** と呼び，$\overrightarrow{w} = (p_1, \ldots, p_p)$ とかく．

添字集合の部分集合 $I \subseteq \{1, \ldots, p\}$ に対する w_I に対して $1, \ldots, p$ の順番にみていき，$k \in I$ なら 1 を，$k \notin I$ なら 0 を対応させ，ビット列 $(1, 0, 1, \ldots, 1) \in \{1, 0\}^p$ を得る．

例 1.13. $w = s_{i_1} s_{i_2} s_{i_3} s_{i_4}$ とする．

- $I = \{1, \ldots, 4\}$ のとき $(1, 1, 1, 1)$ となる．
- $I = \emptyset$ のとき $(0, 0, 0, 0)$ となる．
- $I = \{1, 3\}$ のとき $(1, 0, 1, 0)$ となる．

このビット列と alcove 上の path を次の表 1.1 のように対応させる．

$w = s_{i_1} \cdots s_{i_p}$ の添字集合 $I \subseteq \{1, \ldots, p\}$ から以上の対応で得られる alcove 上の path の集合を $\mathcal{P}(\overrightarrow{w}) = \{0, 1\}^p$ $(\ell(w) = p)$ とかき，この集合の元も alcove walk という．$\overrightarrow{w} = (p_1, \ldots, p_p)$ には $(1, 1, \ldots, 1)$ が対応することに注意する．また $b = (b_1, \ldots, b_p) \in \mathcal{P}(\overrightarrow{w})$ に対して，

$$\mathrm{end}(b) := s_{i_1}^{b_1} \cdots s_{i_p}^{b_p} = \tau(\mathrm{wt}(b)) v_{\mathrm{dir}(b)} \quad (\mathrm{wt}(b) \in P^\vee, \ \mathrm{dir}(b) \in W_0)$$

ビット	1	0
	$p_{i-1}\bullet\longrightarrow\bullet p_i$	$p_{i-1}\bullet\Leftarrow$ $\bullet p_i$

表 1.1　ビットと alcove path との対応

と定める．

次に基本領域 C_0 を囲む境界 H_{α_i} $(i=0,1,\dots,\ell)$ に対して符号をつける．

- H_{α_i} $(i=1,\dots,\ell)$ には C_0^{int} 側に $+$, 反対側に $-$ と決める．
- H_{α_0} には C_0^{int} 側に $-$, 反対側に $+$ と決める．

他の境界 H_α に対しても, それと平行な H_{α_i} $(i=0,1,\dots,\ell)$ と同じ向きで符号を決める．以上によって符号も加味した alcove walk を 4 つに分類する (表 1.2).

正の通過	負の通過	正の折り返し	負の折り返し
$+\mid-$ $p_{i-1}\bullet\longrightarrow\bullet p_i$	$-\mid+$ $p_{i-1}\bullet\longrightarrow\bullet p_i$	$+\mid-$ $p_{i-1}\bullet\Leftarrow$ $\bullet p_i$	$-\mid+$ $p_{i-1}\bullet\Leftarrow$ $p_i\bullet$

表 1.2　alcove walk の分類

alcove walk $b=(b_1,\dots,b_p)\in\mathcal{P}(\overrightarrow{w})$ に対して

$$f_+(b):=\{b_i\mid b_i\ \text{は正の折り返し}\ \},\quad f_-(b):=\{b_i\mid b_i\ \text{は負の折り返し}\ \}$$

と定める．$w=s_{i_1}\cdots s_{i_p}$ の添字集合の部分集合 $I\subseteq\{1,\dots,p\}$ と $k=1,\dots,p$ に対して $k\notin I$ に 0, $k\in I$ に $+$ と対応させることで $\{1,\dots,p\}$ の冪集合 $2^{\{1,\dots,p\}}$ と $\mathcal{P}(\overrightarrow{w})$ の間に全単射

$$2^{\{1,\dots,p\}}\xrightarrow{\sim}\mathcal{P}(\overrightarrow{w}),\quad I\longmapsto b=(b_1,\dots,b_p),\quad b_i:=\begin{cases}0 & (i\notin I)\\ 1 & (i\in I)\end{cases}$$

が与えられる．この対応のもと

$$I_+^c\longmapsto f_+(b),\quad I_-^c\longmapsto f_-(b)$$

が対応する．以上から, 定理 1.12 と同じ設定で, alcove walk を用いた Ram-Yip 公式 [RY11] が従う:

定理 1.14 (Ram-Yip 公式 [RY11])**.** $w=s_{i_1}\cdots s_{i_p}u$ $(u\in\Omega)$ を最短表示としたとき次が成り立つ．

$$E_\lambda(x)=t_v\sum_{b\in\mathcal{P}(\overrightarrow{w})}x^{\mathrm{end}(b)}t_{\mathrm{dir}(b)}^{-\frac{1}{2}}\prod_{b_i\in f_+(b)}\varphi_{i_k}^-(q^{m_k}t^{\langle-\gamma_k,\rho\rangle})\prod_{b_i\in f_-(b)}\varphi_{i_k}^+(q^{m_k}t^{\langle-\gamma_k,\rho\rangle}).$$

2 Ram-Yip 型公式 ($(C_n^\vee, C_n)$ 型)

この節では振れ型アフィンルート系に対する Ram-Yip 型の明示公式として, 特に $C^\vee C_n$ 型のもの, 即ち非対称 Macdonald-Koornwinder 多項式の明示公式を導出する (定理 2.4). alcove path を用いた明示式は Orr と Shimozono [OS18, Theorem 3.13] によって与えられており, §1.7 と同様の議論で, 定理 2.4 と [OS18] の結果が同じことも分かる.

この節では $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ を固定する. §2.1–§2.3 は主に [野 95] に沿って Koornwinder 多項式のアフィン Hecke 環による定式化を述べる. [St00] も参考のこと. §2.4 は本稿独自の内容だが, [OS18, §3.2, §3.3] と本質的には同じものと考えられる.

2.1 ルート系の設定

$\mathbb{K}$ を標数 0 の体とし, その上の n 次元線形空間 $\mathbf{V} := \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{K}\epsilon_i$ とその上の標準内積 $(\epsilon_i|\epsilon_j) = \delta_{i,j}$ を考える.

C_n 型ルート系 $R = R_+ \cup (-R_+)$, $R_+ := \{\epsilon_i \pm \epsilon_j \mid 1 \le i < j \le n\} \cup \{2\epsilon_k \mid 1 \le k \le n\}$ を考える. 単純ルートは $\alpha_i := \epsilon_i - \epsilon_{i+1}$ $(1 \le i \le n-1)$, $\alpha_n := 2\epsilon_n$ とし, 基本ウェイトは $\omega_i := \epsilon_1 + \cdots + \epsilon_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ と定める. そしてルート格子 Q とウェイト格子 P を

$$Q = \mathbb{Z}\alpha_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}\alpha_n \subset P = \mathbb{Z}\omega_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}\omega_n$$

と定める. また余ルート格子と余ウェイト格子を

$$Q^\vee = \mathbb{Z}\alpha_1^\vee \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}\alpha_n^\vee \subset P^\vee = \mathbb{Z}\omega_1^\vee \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}\omega_n^\vee$$

と書く. この状況では

$$Q^\vee = P = \mathbb{Z}\epsilon_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}\epsilon_n$$

となることに注意する. $U := P^\vee \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{K}$ と $V := P \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{K}$ は互いに線型双対であり, 自然な $\mathbb{K}$ 双線型形式を $\langle\cdot,\cdot\rangle\colon U \times V \to \mathbb{K}$ と書くと

$$\begin{aligned} &Q^\vee \times P \to \mathbb{Z}, \quad \langle \alpha_i^\vee, \omega_j \rangle = \delta_{i,j}, \\ &P^\vee \times Q \to \mathbb{Z}, \quad \langle \omega_j^\vee, \alpha_j \rangle = \delta_{i,j} \end{aligned}$$

となる. 双線型形式 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ で U と V を同一視すると, 余ルートや余ウェイトは以下のように $\mathbf{V}$ において実現できる.

$$\begin{cases} \alpha_1^\vee = \epsilon_1 - \epsilon_2 \\ \alpha_2^\vee = \epsilon_2 - \epsilon_3 \\ \vdots \\ \alpha_{n-1}^\vee = \epsilon_{n-1} - \epsilon_n \\ \alpha_n^\vee = \epsilon_n \end{cases} \qquad \begin{cases} \omega_1^\vee = \epsilon_1 \\ \omega_2^\vee = \epsilon_1 + \epsilon_2 \\ \vdots \\ \omega_{n-1}^\vee = \epsilon_1 + \cdots + \epsilon_{n-1} \\ \omega_n^\vee = \frac{1}{2}(\epsilon_1 + \cdots + \epsilon_n) \end{cases}$$

次に V を 1 次元拡大した $\widetilde{V} = V \oplus \mathbb{K}\delta$ を考える. V 上の内積 $(\cdot|\cdot)$ を, $(\delta|\delta) = 0$, $(\delta|\lambda) = (\lambda|\delta) = 0$ $(\lambda \in V)$ として $\widetilde{V}$ 上に拡張する. §1.1 と同様に δ を零ルートと呼ぶ. また $\alpha_0 := \delta - 2\epsilon_1 \in \widetilde{V}$ と定める. さらに U も同様に一次元拡大 $\widetilde{U} = U \oplus \mathbb{K}c$ を考え, $\langle\ ,\ \rangle$ を

$$\langle U, \delta \rangle = 0, \quad \langle c, V \rangle = 0, \quad \langle c, \delta \rangle = 1$$

により $\langle\ ,\ \rangle : \widetilde{U} \times \widetilde{V} \to \mathbb{K}$ に拡張する．そして

$$S := \{\pm\epsilon_i + \frac{k}{2}\delta, \pm 2\epsilon_i + k\delta \mid k \in \mathbb{Z},\ i = 1, \dots, n\} \cup \{\pm\epsilon_i \pm \epsilon_j + k\delta \mid k \in \mathbb{Z}, 1 \le i < j \le n\} \subset \widetilde{V}$$

を $(C_n^\vee, C_n)$ **型アフィンルート系** [M03, (1.3.18)], [St00] と呼ぶ．

$s_0, s_1, \dots, s_n \in \mathrm{GL}(\widetilde{V})$ を次で定める．

$$s_0(\epsilon_j) = \begin{cases} \delta - \epsilon_1 & (j = 1) \\ \epsilon_j & (j \neq 1) \end{cases}, \qquad s_i(\epsilon_j) = \begin{cases} \epsilon_{i+1} & (j = i) \\ \epsilon_i & (j = i+1) \\ \epsilon_j & (j \neq i, i+1) \end{cases}, \qquad s_n(\epsilon_j) = \begin{cases} -\epsilon_n & (j = n) \\ \epsilon_j & (j \neq n) \end{cases}.$$

これらで生成される群 $W := \langle s_0, s_1, \dots, s_n \rangle \subset \mathrm{GL}(\widetilde{V})$ をアフィン Weyl 群と呼び，その部分群 $W_0 := \langle s_1, \dots, s_n \rangle \subset W$ を有限 Weyl 群と呼ぶ．W は次の関係式を満たす．

$$\begin{aligned} s_i^2 &= 1 && (i = 0, 1, \dots, n) \\ s_i s_j &= s_j s_i && (|i - j| > 1) \\ s_i s_{i+1} s_i &= s_{i+1} s_i s_{i+1} && (i = 1, \dots, n-2) \\ s_i s_{i+1} s_i s_{i+1} &= s_{i+1} s_i s_{i+1} s_i && (i = 0, n-1) \end{aligned}$$

また $W = \tau(Q^\vee) \rtimes W_0 = \tau(P) \rtimes W_0$ という表示もできる (1.2)．ここでの $\tau(\mu)$ $(\mu \in V)$ は $f \in \widetilde{V}$ に対して $\tau(\mu)(f) := f + \langle \mu, f \rangle \delta$ で定義される作用素で，$\tau(Q^\vee) = \tau(P) = \{\tau(\mu) \mid \mu \in P(= Q^\vee)\}$ である．また $w \in W$, $\tau(\mu) \in \tau(P)$ に対して

$$w\tau(\mu)w^{-1}(f) = w(w^{-1}(f) + \langle \mu, w^{-1}(f) \rangle \delta) = f + \langle w\mu, f \rangle \delta = \tau(w\mu)(f) \tag{2.1}$$

が成り立つ．最短表示 $\tau(\epsilon_1) = s_1 \cdots s_{n-1} s_n s_{n-1} \cdots s_0$ と (2.1) により

$$\tau(\epsilon_i) = s_i \cdots s_{n-1} s_n s_{n-1} \cdots s_0 s_1 \cdots s_{i-1} \quad (i = 1, \dots, n) \tag{2.2}$$

が得られる．

2.2 アフィン Hecke 環と非対称 Koornwinder 多項式

この副節では C_n 型のアフィン Hecke 環から非対称 Koornwinder 多項式が定義されることを解説する．まずはアフィン Hecke 環は Weyl 群つきの q 差分作用素環の上に実現できることを思い出そう．

パラメーター $\{t_\alpha \mid \alpha \in S\}$ は条件

$$t_\alpha = t_\beta \Rightarrow \beta \in W.\alpha$$

を満たすものであった．$(C_n^\vee, C_n)$ 型のアフィン・ルート系 S のアフィン Weyl 群の軌道は

$$\begin{aligned} &W.\alpha_i = W.\alpha_i^\vee \quad (i = 1, \dots, n-1), \\ &W.\alpha_n,\ W.\alpha_n^\vee,\ W.\alpha_0,\ W.\alpha_0^\vee \end{aligned}$$

の 5 つである．それに応じてパラメータ 5 つを $(t_{\alpha_0}, t_{\alpha_i} = t_{\alpha_i^\vee}, t_{\alpha_n}, t_{\alpha_0^\vee}, t_{\alpha_n^\vee}) = (t_0, t, t_n, u_0, u_n)$ と書き表す．そして基礎体を $\mathbb{K} := \mathbb{Q}(q^{\frac{1}{2}}, t^{\frac{1}{2}}, t_0^{\frac{1}{2}}, t_n^{\frac{1}{2}}, u_0^{\frac{1}{2}}, u_n^{\frac{1}{2}})$ に置き直す．

次に q 差分作用素に関連する記号の確認をしよう．$\mathbb{K}[x^{\pm 1}]$ は n 変数の Laurent 多項式環で $\mathbb{K}(x)$ はその商体を表す．q-差分作用素 $T_{q,x_i} \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}(x))$ $(i = 1, \dots, n)$ とは，

$$T_{q,x_i}(x_j) = \begin{cases} qx_i & (j = i) \\ x_j & (j \neq i) \end{cases}$$

とのことであった．また q 差分作用素環を $\mathcal{D}_{q,x}=\mathbb{K}(x)[T_{q,x}^{\pm 1}]\subset \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}(x))$ とかく．また，Weyl 群は $\mathcal{D}_{q,x}$ に変数の入れ換えと反転で作用することから，接合積により Weyl 群つきの q 差分作用素環 $\mathcal{D}_{q,x}[W_0]=\bigoplus_{w\in W_0}\mathcal{D}_{q,x}w$ が定義される．

ここで各 $i=1,\dots,n$ に対し $x^{\epsilon_i}:=x_i$ と定義し，これにより乗法群 $x^P=\left\{x^\lambda \mid \lambda\in P\right\}$ の群環 $\mathbb{K}[x^P]$ を n 変数の Laurent 多項式環を $\mathbb{K}[x^{\pm 1}]$ と同一視する．またその商体を $\mathbb{K}(x)$ とかく．アフィン Weyl 群 W は $\mathbb{K}[x^{\pm 1}]$ に $wx^\lambda=x^{w.\lambda}$ $(\lambda\in P,\ w\in W)$ として作用することから，(2.2) の $\tau(\epsilon_i)$ $(i=1,\dots,n)$ は，$x^\delta:=q$ と定義すると，$\tau(\epsilon_i)x_j=q^{\delta_{ij}}x_j$ となり q-差分作用素と見なすことができる．

さて，アフィン Hecke 環 $H(W)$ は $T_0,T_1,\dots,T_n$ で生成され以下の関係式で定義される $\mathbb{K}$ 代数であった．

$$\begin{aligned}
(T_i-t_i)(T_i+t_i^{-1})&=0 &&(i=0,1,\dots,n),\\
T_iT_j&=T_jT_i &&(|i-j|>1,(i,j)\notin\{(n,0),(0,n)\}), &&(2.3)\\
T_iT_{i+1}T_i&=T_{i+1}T_iT_{i+1} &&(i=1,\dots,n-2), &&(2.4)\\
T_iT_{i+1}T_iT_{i+1}&=T_{i+1}T_iT_{i+1}T_i &&(i=0,n-1). &&(2.5)
\end{aligned}$$

関係式 (2.3), (2.4), (2.5) は C_n 型の組紐関係式と呼ばれる．また $H(W)$ の元 Y_i を

$$\begin{aligned}
Y_1&=T_1\cdots T_{n-1}T_n\cdots T_0\\
Y_2&=T_2\cdots T_{n-1}T_n\cdots T_0T_1^{-1}\\
&\ \vdots\\
Y_i&=T_i\cdots T_{n-1}T_n\cdots T_0T_1^{-1}\cdots T_{i-1}^{-1}\\
&\ \vdots\\
Y_n&=T_n\cdots T_0T_1^{-1}\cdots T_{n-1}^{-1}
\end{aligned}$$

で定義する．$H(W)$ の関係式から Y_i たちは互いに可換であることが分かる [野 95, §2]．

ここで [野 95] で導入された $H(W)$ の基本表現を思い出そう．

$$\begin{aligned}
T_i&=t_i^{\frac12}+t_i^{-\frac12}\frac{1-t_ix_i/x_{i+1}}{1-x_i/x_{i+1}}(s_i-1)\quad(i=1,\dots,n-1),\\
T_0&=t_0^{\frac12}+t_0^{-\frac12}\frac{(1-u_0^{\frac12}t_0^{\frac12}q^{\frac12}x_1^{-1})(1+u_0^{-\frac12}t_0^{\frac12}q^{\frac12}x_1^{-1})}{1-qx_1^{-2}}(s_0-1),\\
T_n&=t_n^{\frac12}+t_n^{-\frac12}\frac{(1-u_n^{\frac12}t_n^{\frac12}x_n)(1+u_n^{-\frac12}t_n^{\frac12}x_n)}{1-x_n^2}(s_n-1)
\end{aligned}$$

この表現により，$H(W)$ は $\mathcal{D}_{q,x}[W_0]$ の部分環とみなせる．

$$u_i:=\begin{cases}1 & (i=1,\dots,n-1)\\ u_0 & (i=0)\\ u_n & (i=n)\end{cases},\quad x^{\alpha_i}:=\begin{cases}x_i/x_{i+1} & (i=1,\dots,n-1)\\ qx_1^{-2} & (i=0)\\ x_n^2 & (i=n)\end{cases}$$

とすれば，

$$T_i=t_i^{\frac12}+t_i^{-\frac12}\frac{(1-u_i^{\frac12}t_i^{\frac12}x^{\frac{\alpha_i}{2}})(1+u_i^{-\frac12}t_i^{\frac12}x^{\frac{\alpha_i}{2}})}{1-x^{\alpha_i}}(s_i-1) \tag{2.6}$$

と共通に書ける．また，三角函数の乗法的な記号

$$\langle z\rangle=z^{\frac12}-z^{-\frac12}=2\sqrt{-1}\sin(\pi\zeta)\quad(z=e(\zeta)=e^{2\pi\sqrt{-1}}\zeta)$$

を使って $c_i(z),\ d_i(z)\in\mathbb{K}(z)$ を

$$c_i(z)=\frac{\langle t_iz\rangle+\langle u_i\rangle}{\langle z\rangle},\quad d_i(z)=t_i^{\frac12}-c_i(z)=\frac{-z^{-\frac12}\langle t_i\rangle-\langle u_i\rangle}{\langle z\rangle}$$

と定義すれば, (2.6) は

$$T_i = t_i^{\frac{1}{2}} + c_i(x^{\alpha_i})(s_i - 1) = t_i^{\frac{1}{2}} s_i + d_i(x^{\alpha_i})(1 - s_i) = c_i(x^{\alpha_i}) s_i + d_i(x^{\alpha_i}) \tag{2.7}$$

とも表せる．これから Y_i の単項式 x^λ, $\lambda \in P$ への作用を計算する．§1.4 と同様に R 作用素の計算から始める．

$$R(\alpha) = c_i(x^\alpha) + d_i(x^\alpha) s_\alpha = t_i^{\frac{1}{2}} + d_i(x^\alpha)(s_\alpha - 1), \quad \alpha \in W.\alpha_i.$$

$\lambda \in P$ に対して $k = \langle \alpha^\vee, \lambda \rangle$ とおき, $k \geq 0$, $k = 0$, $k < 0$ の 3 つの場合に分けて計算する．

$$\begin{aligned}
k \geq 0 \qquad R(\alpha)(x^\lambda) &= t_i^{\frac{1}{2}} x^\lambda + d_i(x^\alpha)(x^{\lambda - k\alpha} - x^\lambda) \\
&= t_i^{\frac{1}{2}} x^\lambda + x^{\lambda - k\alpha} \frac{-x^{-\frac{\alpha}{2}} \langle t_i \rangle - \langle u_i \rangle}{\langle x^\alpha \rangle} (1 - x^{k\alpha}) \\
&= t_i^{\frac{1}{2}} x^\lambda + x^{\lambda - k\alpha} (\langle t_i \rangle + x^{\frac{\alpha}{2}} \langle u_i \rangle)(1 + x^\alpha + \cdots + x^{(k-1)\alpha}) \\
&= t_i^{\frac{1}{2}} x^\lambda + \langle t_i \rangle (x^{\lambda - k\alpha} + x^{\lambda - (k-1)\alpha} + \cdots + x^{\lambda - \alpha}) \\
&\qquad + \langle u_i \rangle (x^{\lambda - \frac{1}{2}(2k-1)\alpha} + x^{\lambda - \frac{1}{2}(2k-3)\alpha} + \cdots + x^{\lambda - \frac{1}{2}\alpha}) \\
k = 0 \qquad R(\alpha) x^\lambda &= t_i^{\frac{1}{2}} x^\lambda \\
k < 0 \qquad R(\alpha) x^\lambda &= t_i^{\frac{1}{2}} x^\lambda + d_i(x^\alpha)(x^{\lambda - k\alpha} - x^\lambda) \\
&= t_i^{\frac{1}{2}} x^\lambda + x^\lambda \frac{-x^{-\frac{\alpha}{2}} \langle t_i \rangle - \langle u_i \rangle}{\langle x^\alpha \rangle} (x^{-k\alpha} - 1) \\
&= t_i^{-\frac{1}{2}} x^\lambda - \langle t_i \rangle (x^{\lambda + \alpha} + \cdots + x^{\lambda - (k+1)\alpha}) - \langle u_i \rangle (x^{\lambda + \frac{\alpha}{2}} + \cdots + x^{\lambda - \frac{1}{2}(2k+1)\alpha})
\end{aligned}$$

以上の計算から $R(\alpha)$ の Laurent 多項式環への作用は順序 $\succcurlyeq_B$ に関して三角性をもつことがわかる．$\lambda \in P$ に対して

$$\begin{aligned}
Y_i(x^\lambda) &= T_i \cdots T_{n-1} T_n \cdots T_0 T_1^{-1} \cdots T_{i-1}^{-1}(x^\lambda) \\
&= R(\alpha_i) s_i \cdots R(\alpha_{n-1}) s_{n-1} R(\alpha_n) s_n \cdots R(\alpha_0) s_0 R(\alpha_1)^{-1} s_1 \cdots R(\alpha_{i-1})^{-1} s_{i-1} \\
&= R(\epsilon_i - \epsilon_{i+1}) \cdots R(\epsilon_i - \epsilon_n) R(2\epsilon_i) R(\epsilon_n + \epsilon_i) \cdots R(\epsilon_1 + \epsilon_i) \\
&\qquad R(\delta + 2\epsilon_i) \tau(\epsilon_i) R(\epsilon_1 - \epsilon_i)^{-1} \cdots R(\epsilon_{i-1} - \epsilon_i)^{-1}(x^\lambda) \\
&= q^{\lambda_i} t_0^{\rho_\ell(\lambda)_i} t_n^{\rho_\ell(\lambda)_i} t^{\rho_s(\lambda)_i} x^\lambda + (\succcurlyeq_B \text{ に関して低い項})
\end{aligned}$$

と計算できる．詳細は... 但し

$$R_+ = R_+^\ell \sqcup R_+^s = \{\alpha \in R_+ \mid \langle \alpha, \alpha \rangle = 4\} \sqcup \{\alpha \in R_+ \mid \langle \alpha, \alpha \rangle = 2\}$$

とし, また $\lambda \in P$ に対して $\rho_\ell(\lambda), \rho_s(\lambda) \in P$ を

$$\rho_\ell(\lambda) := \sum_{\alpha \in R_+^\ell} \varepsilon(\langle \alpha^\vee, \lambda \rangle)\alpha, \quad \rho_s(\lambda) := \sum_{\alpha \in R_+^s} \varepsilon(\langle \alpha^\vee, \lambda \rangle)\alpha$$

で定めた．符号は $\varepsilon(x) := \begin{cases} \frac{1}{2} & (x \geq 0) \\ -\frac{1}{2} & (x < 0) \end{cases}$ としている．また $\rho_\ell(\lambda)_i \in \mathbb{Q}$ は, $\rho_\ell(\lambda) \in P \subset \mathbf{V}$ とみなして $\rho_\ell(\lambda) = \sum_{i=1}^n \rho_\ell(\lambda)_i \epsilon_i$ と展開した時の係数である．$\rho_s(\lambda)_i \in \mathbb{Q}$ も同様に定義される．もし $\lambda \in P_+ = \{\lambda \in P \mid \langle \alpha^\vee, \lambda \rangle \geq 0, i = 1, \ldots, n\}$ ならば, $\rho_\ell(\lambda), \rho_s(\lambda)$ は単に, それぞれ長さ 4 と 2 の正ルートの和の半分である．このとき $\rho_\ell(\lambda), \rho_s(\lambda)$ は λ に寄らずに決まるので, それぞれ ρ_ℓ, ρ_s と略記する．最高次係数を

$$\eta_\lambda^i := q^{\lambda_i} t_0^{\rho_\ell(\lambda)_i} t_n^{\rho_\ell(\lambda)_i} t^{\rho_s(\lambda)_i}$$

と書こう．また $\mu \in P^\vee$ に対して

$$\eta_\lambda^\mu := q^{\langle \mu,\lambda \rangle}(t_0 t_n)^{\langle \mu, \rho_\ell(\lambda)\rangle} t^{\langle \mu, t^{\rho_s(\lambda)}\rangle}$$

とすれば，$\eta_\lambda^i = \eta_\lambda^{\epsilon_i}$ となる．代数的トーラス $(\mathbb{K}^*)^\ell$ の有限集合に対して，各点で相異なる値をとる $f(x) \in \mathbb{K}[x^{\pm 1}]$ が存在することと，Dunkl 作用素 Y^μ の単項式 x^λ に関する三角性から次の定理を得る．

定理 2.1. Laurent 多項式環 $\mathbb{K}[x^{\pm 1}] = \mathbb{K}[x^P]$ の $\mathbb{K}$ 基底 $\{E_\lambda(x)\}_{\lambda \in P}$ で次の条件を満たすものがただ一つ存在する．

(1) $E_\lambda(x) = x^\lambda + \sum_{\lambda \succ \mu} C_{\lambda,\mu} x^\mu$,

(2) $f(Y)E_\lambda(x) = E_\lambda(x) f(\eta_\lambda)$, $\eta_\lambda = (q^{\lambda_1}(t_0 t_n)^{\rho_\ell(\lambda)_1} t^{\rho_s(\lambda)_1}, \ldots, q^{\lambda_n}(t_0 t_n)^{\rho_\ell(\lambda)_n} t^{\rho_s(\lambda)_n}) \in \mathbb{K}^n$.

定理の $E_\lambda(x)$ を**非対称 Koornwinder 多項式** [Sa99, St00] という．

2.3 絡作用素の計算

単項式 x^λ と T_i の交換関係をみる．一般の $f(x) \in \mathbb{K}[x^{\pm 1}]$ に対して

$$\begin{aligned}
&T_i x^\lambda f(x) - x^{s_i\lambda} T_i f(x) \\
&= (c_i(x^{\alpha_i}) s_i + d_i(x^{\alpha_i})) x^\lambda f(x) - x^{s_i\lambda}(c_i(x^{\alpha_i}) s_i + d_i(x^{\alpha_i})) f(x) \\
&= c_i(x^{\alpha_i}) x^{s_i\lambda} s_i(f(x)) + d_i(x^{\alpha_i}) x^\lambda f(x) - x^{s_i\lambda} c_i(x^{\alpha_i}) s_i(f(x)) - x^{s_i\lambda} d_i(x^{\alpha_i}) f(x) \\
&= d_i(x^{\alpha_i})(x^\lambda - x^{s_i\lambda}) f(x)
\end{aligned}$$

である．したがって作用素としては

$$T_i x^\lambda - x^{s_i\lambda} T_i = d_i(x^{\alpha_i})(x^\lambda - x^{s_i\lambda})$$

である．これを **Lusztig 関係式**という [L89].

ここで $(C_n^\vee, C_n)$ 型の**二重アフィン Hecke 環** (DAHA)

$$DH(W) = \mathbb{K}[x^{\pm 1}] \otimes_{\mathbb{K}} H(W_0) \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{K}[Y^{\pm 1}] \subset \mathcal{D}_{q,x}[W_0]$$

を導入する．定理 1.9 に準ずる $C^\vee C_n$ 型の $DH(W)$ の場合の反対合も存在することが知られている．

定理 2.2 ([Sa99, §3])**.** $DH(W)$ には次で決まる反対合が存在する．

$$\begin{aligned}
\phi(x_i) &= Y_i^{-1} \qquad (i = 1, \ldots, n), \\
\phi(Y_i) &= x_i^{-1} \qquad (i = 1, \ldots, n), \\
\phi(T_i) &= T_i \qquad (i = 1, \ldots, n), \\
\phi(u_n) &= t_0, \quad \phi(t_0) = u_n.
\end{aligned}$$

この定理 2.2 の証明については [M03, (3.5.1)] を参照せよ．§1.5 と同様に，$i \in \{0, 1, \ldots, n\}$ に対して x 側の絡作用素を

$$S_i^x := T_i + \varphi_i^+(x^{\alpha_i}) = T_i^{-1} + \varphi_i^-(x^{\alpha_i}) \in \mathcal{D}_{q,x}[W]$$

で定める．但し

$$\varphi_i^\pm(z) := \frac{z^{\mp\frac{1}{2}}\langle t_i\rangle + \langle u_i\rangle}{\langle z\rangle} \in \mathbb{K}(z)$$

という記号を用いた．S_i^x は Lusztig の関係式から

$$S_i^x x^\lambda = x^{s_i(\lambda)} S_i^x \quad (\lambda \in P)$$

を満たす．また，S_i^x は C_n 型の組紐関係式を満たすことから $w = s_{i_1} \cdots s_{i_p} \in W$ に対して，

$$S_w^x = S_{i_1}^x \cdots S_{i_p}^x \in \mathcal{D}_{q,x}[W]$$

が well-defined に定まる．次に S_i^x を ϕ で反転させて Y 側の絡作用素を導入する．

$$\begin{aligned} S_i^Y &= T_i + \psi_i^+(Y^{-\alpha_i}) = T_i^{-1} + \psi_i^-(Y^{-\alpha_i}) \quad (i = 1, \ldots, n), \\ S_0^Y &= \phi(T_0) + \psi_0^+(qY_1^2) = \phi(T_0)^{-1} + \psi_0(qY_1^2). \end{aligned}$$

但し，$\varphi_i(x^\alpha)$ の ϕ による像をそれぞれ，

$$\begin{aligned} \psi_i^\pm(z) &:= \varphi_i^{\pm 1}(z) \quad (i = 1, \ldots, n-1), \\ \psi_0^\pm(z) &:= \frac{z^{\mp\frac{1}{2}}\langle u_n \rangle + \langle u_0 \rangle}{\langle z \rangle}, \\ \psi_n^\pm(z) &:= \frac{z^{\mp\frac{1}{2}}\langle t_n \rangle + \langle t_0 \rangle}{\langle z \rangle}. \end{aligned}$$

と表した．同様に，S_i^Y $i = 0, 1, \ldots, n$ も C_n 型の組紐関係式を満たすことから $w = s_{i_1} \cdots s_{i_p} \in W$ に対して，

$$S_w^Y = S_{i_1}^Y \cdots S_{i_p}^Y \in \mathcal{D}_{q,x}[W]$$

が well-defined に定まる．

§1.5 と同様に，S_i^Y $(i = 1, \ldots, n)$ は非対称 Koornwinder 多項式 $E_\lambda(x)$ に対し

$$S_i^Y E_\lambda(x) = \mathrm{Const.} E_{s_i\lambda}(x)$$

となる．次に Const. を計算する．

補題 2.3. S_i^Y $(i = 1, \ldots, n)$ と $\lambda \in P$ に対して

$$S_i^Y E_\lambda(x) = \begin{cases} t^{-\frac{3}{2}} \frac{(1 - t\eta_\lambda^{\alpha_i^\vee})(1 - t\eta_\lambda^{-\alpha_i^\vee})}{(1 - \eta_\lambda^{\alpha_i^\vee})(1 - \eta_\lambda^{-\alpha_i^\vee})} E_{s_i\lambda}(x) & (\ell > 0,\ i = 1, \ldots, n-1) \\ t_n^{-\frac{1}{2}} \frac{(\langle t_n \eta_\lambda^{-\alpha_n^\vee} \rangle + \langle t_0 \rangle)(\langle t_n \eta_\lambda^{\alpha_n^\vee} \rangle + \langle t_0 \rangle)}{(1 - \eta_\lambda^{-\alpha_n^\vee})(1 - \eta_\lambda^{\alpha_n^\vee})} E_{s_n\lambda}(x) & (\ell > 0,\ i = n) \\ t_i^{\frac{1}{2}} E_{s_i\lambda}(x) & (\ell < 0) \end{cases}$$

証明．

$$S_i^Y E_\lambda(x) = (T_i + \psi_i^+(Y^{-\alpha_i})) E_\lambda(x) = T_i E_\lambda(x) + \psi_i^+(\eta_\lambda^{-\alpha^\vee}) E_\lambda(x) = C.E_{s_i\lambda}(x)$$

であるから

$$\begin{aligned} T_i E_\lambda(x) &= -\psi_i^+(\eta_\lambda^{-\alpha_i^\vee}) E_\lambda(x) + C.E_{s_i\lambda}(x) \\ &= \alpha_\lambda E_\lambda + \beta_\lambda E_{s_i\lambda}(x) \end{aligned} \tag{2.8}$$

となって，β_λ を計算すればよいことがわかる．$\ell := \langle \alpha_i^\vee, \lambda \rangle$ とおき，$\ell > 0$, $\ell = 0$, $\ell < 0$ の 3 つの場合に分けて計算する．

- $\ell=0$ のときは $T_iE_\lambda(x)=t_i^{\frac{1}{2}}E_{s_i\lambda}(x)$ であることが容易に従う．
- $\ell<0$ とする．$\lambda-s_i\lambda=\lambda-(\lambda-\ell\alpha_i)=\ell\alpha_i<0$ より $E_\lambda(x)$ には $x^{s_i\lambda}$ の項は含まれないことから $T_i(x^\lambda)$ の $x^{s_i\lambda}$ の係数が β_λ になることがわかる．

$$T_i(x^\lambda)=R(\alpha_i)s_i(x^\lambda)=R(\alpha_i)(x^{s_i\lambda})=t_i^{\frac{1}{2}}x^{s_i\lambda}+(\succcurlyeq \text{に関して低位の項たち})$$

従って $\beta_\lambda=t_i^{\frac{1}{2}}$ となる．

- $\ell>0$ とする．(2.8) の両辺に T_i を作用させる．

$$\begin{aligned}
&T_i^2E_\lambda(x)=\alpha_\lambda T_iE_\lambda(x)+\beta_\lambda T_iE_{s_i\lambda}(x),\\
&((t_i^{\frac{1}{2}}-t_i^{-\frac{1}{2}})T_i+1)E_\lambda(x)=\alpha_\lambda(\alpha_\lambda E_\lambda(x)+\beta_\lambda E_{s_i\lambda}(x))+\beta_\lambda(\alpha_{s_i\lambda}E_{s_i\lambda}(x)+\beta_{s_i\lambda}E_\lambda(x)),\\
&(-\alpha_\lambda^2+(t_i^{\frac{1}{2}}-t_i^{-\frac{1}{2}})\alpha_\lambda+1-\beta_\lambda\beta_{s_i\lambda})E_\lambda(x)=(\alpha_\lambda\beta_\lambda+\alpha_{s_i\lambda}\beta_\lambda-(t_i^{\frac{1}{2}}-t_i^{-\frac{1}{2}})\beta_\lambda)E_{s_i\lambda}(x).
\end{aligned}$$

以上から関係式

$$\beta_\lambda\beta_{s_i\lambda}=(t_i^{\frac{1}{2}}-\alpha_\lambda)(t_i^{-\frac{1}{2}}+\alpha_\lambda) \tag{2.9}$$

が得られる．$\beta_{s_i\lambda}=t_i^{\frac{1}{2}}$, $\alpha_\lambda=-\psi_i^+(\eta_\lambda^{-\alpha_i^\vee})$ で, 特に $i=1,\dots,n-1$ のときは

$$\alpha_\lambda=-\varphi^+(\eta_\lambda^{-\alpha_i^\vee})=\frac{t^{\frac{1}{2}}-t^{-\frac{1}{2}}}{1-\eta_\lambda^{-\alpha_i^\vee}}$$

であるから, 補題 1.10 と同様の計算で

$$\beta_\lambda=t^{-\frac{3}{2}}\frac{(1-t\eta_\lambda^{\alpha_i^\vee})(1-t\eta_\lambda^{-\alpha_i^\vee})}{(1-\eta_\lambda^{\alpha_i^\vee})(1-\eta_\lambda^{-\alpha_i^\vee})}$$

となる．$i=n$ のときは

$$\alpha_\lambda=-\psi_n^+(\eta_\lambda^{-\alpha_n^\vee})=-\frac{\eta_\lambda^{\frac{\alpha_n^\vee}{2}}\langle t_n\rangle+\langle t_0\rangle}{\langle\eta_\lambda^{-\alpha_n^\vee}\rangle}=\frac{\langle t_n\rangle+\eta_\lambda^{-\frac{\alpha_n^\vee}{2}}\langle t_0\rangle}{1-\eta_\lambda^{-\alpha_n^\vee}}$$

である．関係式 (2.9) から

$$\begin{aligned}
\beta_\lambda\beta_{s_n\lambda}&=(t_n^{\frac{1}{2}}-\alpha_\lambda)(t_n^{-\frac{1}{2}}+\alpha_\lambda)\\
\beta_\lambda&=t_n^{-\frac{1}{2}}\left(t_n^{\frac{1}{2}}-\frac{\langle t_n\rangle+\eta_\lambda^{-\frac{\alpha_n^\vee}{2}}\langle t_0\rangle}{1-\eta_\lambda^{-\alpha_n^\vee}}\right)\left(t_n^{-\frac{1}{2}}+\frac{\langle t_n\rangle+\eta_\lambda^{-\frac{\alpha_n^\vee}{2}}\langle t_0\rangle}{1-\eta_\lambda^{-\alpha_n^\vee}}\right)\\
&=t_n^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{t_n^{-\frac{1}{2}}-t_n^{\frac{1}{2}}\eta_\lambda^{-\alpha_n^\vee}-\langle t_0\rangle\eta_\lambda^{\frac{-\alpha_n^\vee}{2}}}{1-\eta_\lambda^{-\alpha_n^\vee}}\right)\left(\frac{t_n^{\frac{1}{2}}-t_n^{-\frac{1}{2}}\eta_\lambda^{-\alpha_n^\vee}+\langle t_0\rangle\eta_\lambda^{\frac{-\alpha_n^\vee}{2}}}{1-\eta_\lambda^{-\alpha_n^\vee}}\right)\\
&=t_n^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{t_n^{-\frac{1}{2}}-t_n^{\frac{1}{2}}\eta_\lambda^{-\alpha_n^\vee}-\langle t_0\rangle\eta_\lambda^{\frac{-\alpha_n^\vee}{2}}}{1-\eta_\lambda^{-\alpha_n^\vee}}\right)\left(\frac{t_n^{-\frac{1}{2}}-t_n^{\frac{1}{2}}\eta_\lambda^{\alpha_n^\vee}-\langle t_0\rangle\eta_\lambda^{\frac{\alpha_n^\vee}{2}}}{1-\eta_\lambda^{\alpha_n^\vee}}\right)\\
&=t_n^{-\frac{1}{2}}\frac{(\eta_\lambda^{-\frac{\alpha_n^\vee}{2}}\langle t_n\eta_\lambda^{-\alpha_n^\vee}\rangle+\eta_\lambda^{-\frac{\alpha_n^\vee}{2}}\langle t_0\rangle)(\eta_\lambda^{\frac{\alpha_n^\vee}{2}}\langle t_n\eta_\lambda^{\alpha_n^\vee}\rangle+\eta_\lambda^{\frac{\alpha_n^\vee}{2}}\langle t_0\rangle)}{(1-\eta_\lambda^{-\alpha_n^\vee})(1-\eta_\lambda^{\alpha_n^\vee})}\\
&=t_n^{-\frac{1}{2}}\frac{(\langle t_n\eta_\lambda^{-\alpha_n^\vee}\rangle+\langle t_0\rangle)(\langle t_n\eta_\lambda^{\alpha_n^\vee}\rangle+\langle t_0\rangle)}{(1-\eta_\lambda^{-\alpha_n^\vee})(1-\eta_\lambda^{\alpha_n^\vee})}
\end{aligned}$$

となる．

□

2.4 Ram-Yip 型公式

ここでは §1.6 と同様の議論で $(C_n^\vee, C_n)$ 型の場合の Ram-Yip 型公式を導出できることを解説する．記号の再確認から始めよう．

$w = s_{i_1} \cdots s_{i_p}$ とその添字集合 $\{1, \ldots, p\}$ の部分集合 I に対して

- $\beta_k(w) := s_{i_1} \cdots s_{i_{k-1}}(\alpha_k) \quad (k = 1, \ldots, p)$
- $\beta'_k(w) := s_{i_p} \cdots s_{i_{k+1}}(\alpha_k) \quad (k = 1, \ldots, p)$
- $w_I := \overrightarrow{\prod}_{k \in I} s_{i_k} \quad (k \in \{1, \ldots, p\})$
- $w_{I,k} := \overleftarrow{\prod}_{\ell \in I,\ \ell < k} s_\ell \quad (k \in \{1, \ldots, p\})$

但し $\overrightarrow{\prod}$ は小さい順に, $\overleftarrow{\prod}$ は大きい順にかけるという意味で用いているのであった．また $\beta \in S$ に対して符号 $\epsilon(\beta) = \pm$ を

$$\epsilon(\beta) := \begin{cases} + & (\overline{\beta} \in R_+) \\ - & (\overline{\beta} \in R_-) \end{cases}$$

と定義していた．また $w = s_{i_1} \cdots s_{i_p} \in W$ に対して $S^x_{w^{-1}} \in \mathcal{D}_{q,x}[W]$ を次のように展開する．

- $S^x_{w^{-1}} = \sum_{I \subset \{1,\ldots,p\}} \prod_{k \notin I} \varphi^{\pm}_{i_k}(x^\beta) \prod_{k \in I} T^{\pm}_{i_k}$ という形になるように展開する．(T_i が右で $\varphi(x^\beta)$ が左に来るように展開する.)
- S^x_i の符号を命題 1.5 の左辺の T_i の符号の決め方と同じように展開する．

以下, 都合上 $T_i^{\pm 1}$ を $T_i^{\pm}$ と書くこともあるので断っておく．

$w = s_{i_1} \cdots s_{i_p} = \tau(\mu)v \in W$ に対して,

$$S^x_{i_p} \cdots S^x_{i_1} = \sum_{I \subseteq \{1,\ldots,p\}} \prod_{k \notin I} \varphi_{i_k}^{-\epsilon(w_{I,k}(\alpha_k))}(x^{\beta'_k(w)}) T^{-1}_{v_I^{-1}} Y^{-\mu_I} \tag{2.10}$$

と書ける．但し, $I \subseteq \{1, \ldots, p\}$ に対して

$$w_I = \tau(\mu_I)v_I \quad (v_I \in W_0,\ \mu_I \in P)$$

という記号を用いた．次に (2.10) を ϕ で反転させて S^Y_w を得よう．$k = 1, \ldots, p$ に対して

$$\beta'_k(w) = \gamma_k + m_k\delta\ (\gamma_k \in R, m_k \in \mathbb{Z})$$

という記号を使うと, 結果は

$$S^Y_w = \sum_{I \subseteq \{1,\ldots,p\}} x^{\mu_I} T^{-1}_{v_I} \prod_{k \notin I} \psi_{i_k}^{-\epsilon(w_{I,k}(\alpha_k))}(q^{m_k} Y^{-\gamma_k}). \tag{2.11}$$

となる．ここで上のように展開した S^Y_w を 1 に作用する．そのために次を先に計算しておく．

$$T_{v_I}.1 = \prod_{v \in \mathrm{inv}(v_I)} t_v$$
$$Y^{\gamma_k}.1 = (t_0 t_n)^{\langle \gamma_k, \rho_\ell \rangle} t^{\langle \gamma_k, \rho_s \rangle}$$

また, $w \in W_0$ に対して,

$$t_w := \prod_{v \in \mathrm{inv}(w)} t_v$$

という記号を用いると, 非対称 Koornwinder の Ram-Yip 型明示公式は次のように書ける．

定理 2.4 (非対称 Koornwinder 多項式の Ram-Yip 型明示公式)**.** $w = s_{i_1}\cdots s_{i_p} = \tau(\lambda)v$ ($v \in W_0,\ \lambda \in P$) としたとき次が成り立つ.

$$E_\lambda(x) = t_v^{\frac{1}{2}} \sum_{I\subseteq\{1,\dots,p\}} x^{\mu_I} t_{v_I}^{-\frac{1}{2}} \prod_{k\notin I} \psi_{i_k}^{-\epsilon(w_{I,k}(\alpha_k))}(q^{m_k}(t_0t_n)^{\langle-\gamma_k,\rho_\ell\rangle} t^{\langle-\gamma_k,\rho_s\rangle})$$

証明. 定理の右辺に $t_v^{-\frac{1}{2}}$ を乗じたものを

$$F_\lambda := \sum_{I\subseteq\{1,\dots,p\}} x^{\mu_I} t_{v_I}^{-\frac{1}{2}} \prod_{k\notin I} \psi_{i_k}^{-\epsilon(w_{I,k}(\alpha_k))}(q^{m_k}(t_0t_n)^{\langle-\gamma_k,\rho_\ell\rangle} t^{\langle-\gamma_k,\rho_s\rangle})$$

とおく. これは (2.11) に $E_0(x) = 1$ をさせたものである.

まずは任意の $\mu \in P$ に対して作用 $Y^\mu F_\lambda$ をみる.

$$\begin{aligned} Y^\mu F_\lambda &= Y^\mu S_{i_1}^Y \cdots S_{i_p}^Y.1 = S_{i_1}^Y \cdots S_{i_p}^Y Y^{w^{-1}(\mu)}.E_0(x) \\ &= \eta_{w(0)}^\mu S_{i_1}^Y \cdots S_{i_p}^Y.E_0(x) \qquad (\eta_0^{w^{-1}(\mu)} = \eta_{w(0)}^\mu) \\ &= \eta_\lambda^\mu F_\lambda \qquad (w(0) = \lambda) \end{aligned}$$

従って F_λ が Dunkl 作用素 Y^μ の固有函数であることがいえた. あとは F_λ の三角性を示せばよい. そのためには, 任意の $I \subseteq \{1,\dots,p\}$ に対して $\lambda \succcurlyeq \lambda_I$ が示せればよい. W は $C_n^{(1)}$ 型のアフィン Weyl 群であるから, 命題 1.3 と命題 1.4 が適用でき, w と任意の $I \subseteq \{1,\dots,p\}$ に対する w_I は Bruhat 順序 $\succcurlyeq_B$ に関して $w \succcurlyeq_B w_I$, すなわち $\tau(\lambda)v \succcurlyeq_B \tau(\lambda_I)v_I$ であり, $\lambda \succcurlyeq \lambda_I$ がわかる. これにより F_λ の三角性が示せた. あとは F_λ の最高次係数が 1 になるように $t_v^{\frac{1}{2}}$ を乗じることで定理の証明が完了する. □

2.5 $(C^\vee, C_n)$ 型の alcove walk

この副節では, 定理 2.4 も §1.7 の議論により, alcove walk で書き直せることを説明する. 復習も兼ねて, alcove の説明から始めよう. ここでの alcove の定義は Macdonald のもの [M03] を採用する.

アフィン・ルート $\beta \in S$ を次のようにして $\mathbf{V} = \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{K}\epsilon_i$ 上の一次函数とみなす.

$$\alpha(v) := \langle v,\alpha\rangle\ (\alpha \in R), \quad k\delta(v) := k\ (k \in \mathbb{Z})$$

このとき $\mathbf{V}$ の部分集合 $C_0 := \{v \in \mathbf{V} \mid \alpha_i(v) \geq 0\ (i = 0,1,\dots,n)\}$ を基本領域と呼ぶ. $\mathbf{V} = \bigcup_{w\in W} w.C_0$ と書けることに注意する. また $\alpha \in S$ に対して超平面

$$H_\alpha := \{v \in \mathbf{V} \mid \alpha(v) = 0\} \subset \mathbf{V}$$

を定義し, $\mathbf{V}\setminus\bigcup_{\alpha\in S} H_\alpha \subset \mathbf{V}$ の連結成分を alcove と呼ぶ. この設定の下, alcove walk を §1.7 と同様に定義する. $(C_2^\vee, C_2)$ 型の alcove walk の例を挙げておこう.

例 2.5 (c.f. [OS18, §3.4, Fig. 1,2])**.** $w = s_1s_2s_1s_0 = \tau(\epsilon_1) \in W(C_2^{(1)})$ の場合. $I \subset \{1,2,3,4\}$ に応じた alcove walk は表 2.1 のようになる.

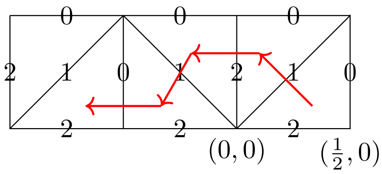
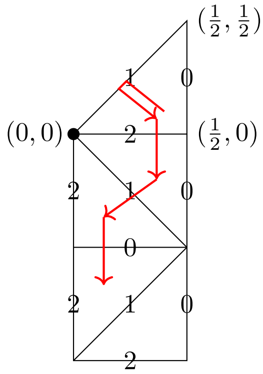
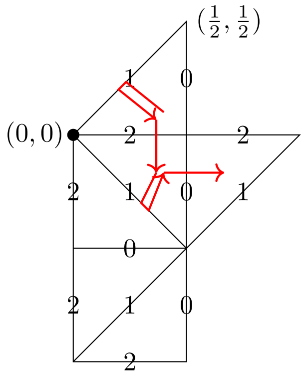
$I \subseteq \{1,2,3,4\}$	ビット	対応する alcove walk
$\emptyset$	$(1,1,1,1)$	
$\{2,3,4\}$	$(0,1,1,1)$	
$\{2,4\}$	(0,1,0,1)	

表 2.1　ビットと alcove path との対応の例

定理 2.6 (非対称 Koornwinder 多項式の Ram-Yip 公式 [OS18, Theorem 3.13])**.** $w = s_{i_1} \cdots s_{i_p} \in W$ を最短表示としたとき次が成り立つ.

$$E_\lambda(x) = t_v \sum_{b \in \mathcal{P}(\overrightarrow{w})} x^{\mathrm{end}(b)} t_{\mathrm{dir}(b)}^{-\frac{1}{2}} \prod_{b_i \in f_+(b)} \psi_{i_k}^{-}(\eta_{\lambda,k}) \prod_{b_i \in f_-(b)} \psi_{i_k}^{+}(\eta_{\lambda,k})$$

但し, $\eta_{\lambda,k} = q^{m_k}(t_0 t_n)^{\langle -\gamma_k, \rho_\ell \rangle} t^{\langle -\gamma_k, \rho_s \rangle}$

謝辞

本稿の内容は修士課程の指導教官である野海 正俊先生とのセミナーに基づくものであり, 先生からは多くの有益な助言を頂くとともに, 励ましながら丁寧にご指導いただきました. この場を借りて感謝の意を表します. また本稿執筆にあたり, 2020 年度現在の指導教官である柳田 伸太郎 先生には原稿に目を通して頂き, 誤りの指摘を含め詳細なコメントを頂きました. 改めて感謝の意を表します.

参考文献

[B] N. Bourbaki, *Lie groups and Lie algebras. Chapters 4–6*, translated from the 1968 French original by Andrew Pressley, Elements of Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 2002.

[C92] I. Cherednik, *Double Affine Hecke algebras, Knizhnik–Zamolodchikov equations, and Macdonald's operators*, Int. Math. Res. Not., **9** (1992), 171–179.

[L89] G. Lusztig, *Affine Hecke algebras and their graded version*, J. Amer. Math. Soc., **2** (1989), 599–635.

[IM65] N. Iwahori, H. Matsumoto, *On some Bruhat decomposition and the structure of the Hecke rings of p-adic Chevalley groups*, I.H.E.S. Publ. Math., **25** (1965), 5–48.

[M03] I. G. Macdonald, *Affine Hecke Algebras and Orthogonal Polynomials*, Cambridge Tracts in Mathematics **157**, Cambridge University Press, 2003.

[OS18] D. Orr, M. Shimozono, *Specializations of nonsymmetric Macdonald-Koornwinder polynomials*, J. Algebraic Combin., **47** (2018), no. 1, 91–127.

[RY11] A. Ram, M. Yip, *A combinatorial formula for Macdonald polynomials*, Adv. Math., **226** (2011), 309–331.

[Sa99] S. Sahi, *Nonsymmetric Koornwinder polynomials and duality*, Ann. Math., **150** (1999), 267–282.

[St00] J. V. Stokman, *Koornwinder Polynomials and Affine Hecke Algebras*, Int. Math. Res. Not., **19** (2000), 1005–1042.

[野 95] 野海 正俊, *Macdonald-Koornwinder* 多項式と *affine Hecke* 環, 数理解析研究所講究録, **919** (1995), 44–55.