有限次元半単純リー環の表現論

山口航平 *

2020 年 10 月 15 日

目次

* 名古屋大学大学院多元数理科学研究科, d20003j@math.nagoya-u.ac.jp

0　はじめに

このノートは Humphreys の著書「Introduction to Lie Algebras and Representation Theory」[Hum] を自己流にまとめたものである.

記号・用語

本稿全般にわたって用いる記号と用語を紹介する.

- $\mathbb{Z}$ で整数環を, $\mathbb{N} = \mathbb{Z}_{\geq 0} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ で非負整数の集合を表す. また $\mathbb{Q}$ で有理数体を表す.
- 基礎体は $\mathbb{F}$ で表す. 但し, 各節によって $\mathbb{F}$ の条件が異なるので注意せよ.
- 非退化対称双線形型式のことを内積と呼ぶ.
- 代数 A の集合 S への作用を, $g \in A$ と $s \in S$ に対して $g.s$ で表す. s の A 軌道は $A.s$ ないし As で表す.
- 零集合 $\{0\}$ を単に 0 とかくこともある.
- 集合 A, B に対して, $A \subset B$ と書けば A は B の真の部分集合を意味する.

1　可解リー環と冪零リー環

標数 0 の体 $\mathbb{F}$ を基礎体として考える.

1.1　可解性

L をリー環とする. このとき列

$$L = \mathcal{D}^0 L \supseteq \mathcal{D}^1 L = [\mathcal{D}^1 L, \mathcal{D}^1 L] \supseteq \cdots \supseteq \mathcal{D}^k L = [\mathcal{D}^{k-1} L, \mathcal{D}^{k-1} L] \supseteq \cdots$$

を L の**導来列**と呼ぶ. リー環 L の導来列の長さが有限, すなわち自然数 n に対して $\mathcal{D}^n L = 0$ となるとき, L を**可解リー環**と呼ぶ.

例 1.1. 可換リー環 L は $\mathcal{D}^1 L = [L, L] = 0$ となることから, 明らかに可解リー環になる.

例 1.2 (最重要かつ基本的な例)**.** 上三角行列全体

$$\mathfrak{t}(n, \mathbb{F}) := \left\{ \begin{pmatrix} * & \cdots & * \\ & \ddots & \vdots \\ \text{\Large 0} & & * \end{pmatrix} \right\} \subset \mathfrak{gl}(n, \mathbb{F})$$

は可解リー環である. (考えてみよう!(とかいって書くのをサボっている.))

命題 1.3. L をリー環とする.

(a) L が可解であるとする. このとき任意の L の部分リー環 K と, L 上の準同型 ϕ に対して K, $\phi(L)$ 共に可解である.

(b) I を L の可解イデアルとし L/I も可解になるとする. このとき L 自身も可解になる.

(c) I, J ともに L の可解イデアルならばイデアルの和 $I + J$ も可解イデアルになる.

証明. (a) から示そう．$K \subseteq L$ ならば $\mathcal{D}^i K \subseteq \mathcal{D}^i L$ は明らか．このことから L の任意の部分リー環 K は可解になることがわかる．(リー環としての) 全射準同型 $\phi : L \longrightarrow M$ をとる．$\mathcal{D}^i L$ の i に関する帰納法を使う．$i = 0$ のとき $\phi(\mathcal{D}^0 L) = \phi(L) = M = \mathcal{D}^0 M$ だからよい．$i > 0$ とする．

$$\begin{aligned}\phi(\mathcal{D}^i L) &= \phi([\mathcal{D}^{i-1}L, \mathcal{D}^{i-1}L]) \\ &= [\phi(\mathcal{D}^{i-1}L), \phi(\mathcal{D}^{i-1}L)] \quad (\phi \text{ はリー環としての準同型.}) \\ &= [\mathcal{D}^{i-1}M, \mathcal{D}^{i-1}M] = \mathcal{D}^i M \quad (\text{帰納法の仮定.})\end{aligned}$$

以上から $\phi(L)$ は可解.

(b) を示そう．n を $\mathcal{D}^n L = 0$ を満たす自然数とする．自然な射影 (全射)$\pi : L \longrightarrow L/I$ を考える．このとき $\pi(\mathcal{D}^n L) = 0$ を得る．それすなわち $\mathcal{D}^n L \subseteq I = \mathrm{Ker}\,\pi$ ということである．今 $\mathcal{D}^m I = 0$ なる自然数 m をとれば $\mathcal{D}^{n+m} L = 0$ となり, L は可解であることがわかる．

最後に (c) を示そう．自然な全射 $\phi : I \longrightarrow (I + J)/J$ を考えれば, (a) により $\phi(I) = (I + J)/J$ も可解になる．仮定から J も可解だったので, (b) を使えば $I + J$ も可解になることがわかる． □

S をリー環 L の極大可解イデアルとする．実は, 極大可解イデアルはユニークである．どうしてかを説明する．I が S とは別の可解イデアルであるとする．このとき $S + I$ は (c) により可解である．ところが S の極大性から $I + S = S$ となり $I \subset S$ である．L の極大可解イデアルを $\mathrm{Rad}\ L$ とかき, L の**根基 (radical)** と呼ぶ. また $\mathrm{Rad}\ L = 0$ が成り立つような L を**半単純リー環**と呼ぶ.

1.2 冪零性

リー環 L に対して次の列 (名前あるのかな?) を考える．

$$L = \mathcal{C}^0 L \supseteq \mathcal{C}^1 L = [L, \mathcal{C}^0] \supseteq \mathcal{C}^2 L = [L, \mathcal{C}^1] \supseteq \cdots \supseteq \mathcal{C}^i L = [L, \mathcal{C}^{i-1} L] \supseteq \cdots$$

ある自然数 n が存在して $\mathcal{C}^n L = 0$ を満たすような L を**冪零リー環**と呼ぶ．任意の自然数 i に対して $\mathcal{D}^i L \subseteq \mathcal{C}^i L$ が成り立つことから冪零リー環は可解リー環である．

例 1.4. 対角成分 0 の上 (下) 三角行列全体

$$\mathfrak{n}(\mathbb{F}, n) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & * & \cdots & * \\ & 0 & \cdots & * \\ & & \ddots & \vdots \\ \text{\Large 0} & & & 0 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathfrak{gl}(n, \mathbb{F})$$

は冪零リー環.

命題 1.5. L をリー環とする．

(a) L が冪零であるとする．このとき任意の L の部分リー環 K と, L 上の準同型 ϕ に対して K, $\phi(L)$ ともに冪零.

(b) $L/Z(L)$ が冪零であるとき, L も冪零になる．

(c) L が冪零かつ $L \neq 0$ であるとする．このとき $Z(L) \neq 0$

証明. (a) の証明は命題 1.3 の (a) からすぐに従う．($\mathcal{D}^i L \subseteq \mathcal{C}^i L$ を想起せよ!)

(b) の証明をする．$L/Z(L)$ が冪零ということからある自然数 n に対して $\mathcal{C}^n L \subset Z(L)$ が成り立つ．このとき $\mathcal{C}^{n+1}L = [L, \mathcal{C}^n L] \subset [L, Z(L)] = 0$ だから L は冪零.

最後に (c) を証明する．$\mathcal{C}^{n-1}L \neq 0$ かつ $\mathcal{C}^n L = 0$ なる自然数 n をとる．このとき $0 \neq \mathcal{C}^{n-1}L = Z(L)$ である．($\mathcal{C}^n L = [L, \mathcal{C}^{n-1}(L)] = 0$ を $\mathcal{C}^{n-1}(L)$ は任意の L の要素とブラケットすると 0 になると読む．それすなわち $\mathcal{C}^{n-1}(L) = Z(L)$ である.) □

L が冪零であることをある自然数 n と任意の n 個の L の要素 $x_1, \ldots, x_n$ と $y \in L$ に対して $\mathrm{ad}(x_1) \cdots \mathrm{ad}(x_n)(y) = 0$ を満たすと言い換えてもよい．特に, 任意の $x \in L$ に対して $(\mathrm{ad}(x))^n = 0$ を満たす．$x \in L$ に対して $\mathrm{ad}(x)$ が冪零であるとき x を ad **冪零元**と呼ぶ．この言葉を使うと, L が冪零リー環ならば L の任意の要素は ad-冪零元になるという事実はすぐにわかるであろう．これの逆も成り立つが, それは非常に非自明であり, エンゲルの定理として知られている.

定理 1.6 (エンゲルの定理)**.** L の全ての要素が ad 冪零元ならば, L は冪零リー環である.

1.3 エンゲルの定理の証明

この節ではエンゲルの定理を証明することを目標とする.

補題 1.7. $x \in \mathfrak{gl}(V)$ を V 上の冪零な自己準同型とする．このとき $\mathrm{ad}(x)$ も冪零になる.

証明. $x \in \mathfrak{gl}(V)$ に対して $\lambda_x, \rho_x \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{gl}(V))$ をそれぞれ任意の $y \in \mathfrak{gl}(V)$ に対して $\lambda_x(y) = xy$ とし $\rho_x(y) = yx$ と定義する．x は冪零であることから λ_x, ρ_x ともに冪零な自己準同型である．しかも互いに可換であることも容易に確かめられる．したがって十分に大きい自然数 N をとれば

$$\mathrm{ad}(x)^N = (\lambda_x - \rho_x)^N = \sum_{k=0}^{N} (-1)^k \binom{N}{N-k} \lambda_x^{N-k} \rho_x^k = 0$$

である. □

定理 1.8 (KEY Lemma)**.** V を有限次元ベクトル空間とし L を $\mathfrak{gl}(V)$ の部分リー環とする．もし L が V 上の冪零な自己準同型ばかりで構成されているならば, 0 でない V の要素 v であって $L \cdot v = 0$ を満たすものが存在する.

証明. $\dim(L)$ に関する帰納法により示す．$\dim(L) = 0$ のときは $L = 0$ であるから明らかに主張は成り立つ．$\dim(L) > 0$ とする．K を真の L の部分リー環とする．K は随伴作用素 ad を通して L に作用する．その意味で K は L/K にも作用する.

$$\mathrm{ad} : K \longrightarrow \mathfrak{gl}(L), \quad \overline{\mathrm{ad}} : K \longrightarrow \mathfrak{gl}(L/K)$$

ここで注意すべきは補題 1.7 により $\overline{\mathrm{ad}}(K)$ は $\mathfrak{gl}(L/K)$ における冪零元ばかりで生成されていることである．$\dim(K) < \dim(L)$ で帰納法の仮定から 0 でない $s \in L/K$ であって, 任意の $k \in K$ に対して $\overline{\mathrm{ad}}(k)(s) = \overline{[k, s]} = 0$ を満たすものが存在する．すなわち $K \cdot s = 0$. ($\overline{\mathrm{ad}}$ の作用を今, ドット $(\cdot)$ を使って書いた) さて, $\overline{\mathrm{ad}}(k)(s) = \overline{[k, s]} = 0$ であるから $[k, s] \in K$ である．また $s \in L/K$ は零でないから $s \in L$ であって $s \notin K$ であることに注意すると $N_L(K) \neq K$ が言える.

以上から L の真の部分リー環 K に対して $N_L(K) \neq K$ が成り立つことを示した．この事実を使うことで余次元 1 の L のイデアルを帰納的に構成する．$N_L(K) \neq K$ であるから $k_1 \in N_L(K)$ かつ $k_1 \notin K$ なる要素 $k_1 \in L$ がとれる．k_1 と K によって張られる部分空間 $K_1 = \mathbb{F}k_1 + K$ を考える．このとき K_1 は $\dim(K_1) = \dim(K) + 1$ であり L のイデアルである.(簡単だから各自で考えよ.) もし $K_1 \neq L$ ならば $N_L(K_1) \neq K_1$ だから $k_2 \in N_L(K_1)$ かつ $k_2 \notin K_1$ なる要素 $k_2 \in L$ が再びとれて部分空間 $K_2 = \mathbb{F}k_2 + K_1$ を考えると $\dim(K_2) = \dim(K_1) + 1$ であり L のイデアルである．同様にして次のようなイデアルの系列 $\dim(K_1) < \dim(K_2) < \cdots < \dim(K_{l-1}) < \dim(K_l) = L$ を得る．特に K_{l-1} は L の余次元 1 のイデアルである．K_{l-1} を改めて K と置き直す．$z \in N_L(K)$ であって $z \notin K$ である元をとることで $L = K + \mathbb{F}z$ とかける．V の部分空間 $W = \{v \in V \mid K \cdot v = 0\}$ は帰納法の仮定により $\neq 0$ である (さっきそんな v をとったでしょ?). W は K がイデアルであることから L-不変部分空間である．実際 $y \in K,\ x \in L,\ w \in W$ に対して,

$$yx \cdot w = xy \cdot w - [x, y] \cdot w = 0$$

あとは L が V 上の冪零な自己準同型ばかりで構成されていたことを想起すれば z は冪零であり, しかも z は W の線型変換だから W の中に固有値 0 の固有ベクトル $v \in W$ が存在する．以上で $L \cdot v = 0$ が言えた． □

エンゲルの定理の証明をする．

証明. $\dim(L)$ に関する帰納法を用いる．$\dim(L) = 0$ はあきらか．$\dim(L) > 0$ を仮定する．部分リー環 $\mathrm{ad}(L)(\subset \mathfrak{gl}(L))$ は L の全ての要素が ad-冪零元であるという仮定から L 上の冪零な自己準同型ばかりからなる．定理 1.8 から 0 でない $x \in L$ であって $L \cdot x = 0 \quad ([L, x] = 0)$ を満たすものが存在する．これすなわち $Z(L) \neq 0$ を主張している．$\dim(L/Z(L)) < \dim(L)$ であるから帰納法の仮定より, $L/Z(L)$ は冪零になる．あとは命題 1.5 の (b) を使えば L が冪零リー環になることが従う． □

補題 1.9. L を冪零リー環とし, K をそのイデアルとする．このとき, もし $K \neq 0$ ならば $K \cap Z(L) \neq 0$.

証明. L は随伴表現を通して K に作用する．定理 1.8 により, 非零な元 $x \in K$ で $[L, x] = 0$ を満たすものがとれる．これは $x \in K \cap Z(L) =\neq 0$ を意味する． □

2　リーの定理とカルタンの定理

2.1　リーの定理

$\mathbb{F}$ は代数閉体で標数 0 とする．以後, 登場するリー環やベクトル空間は全て $\mathbb{F}$ 上のものとする．

定理 2.1. L を可解な $\mathfrak{gl}(V)$ の部分代数とする．但し V は有限次元ベクトル空間としている．もし $V \neq 0$ ならば V は L の全ての要素に対する共通固有ベクトルを含む．

証明. $\dim(L)$ に関する帰納法により示す．もし $\dim(L) = 0$ ならば $\mathfrak{gl}(L) = 0$ であり明らか．

(第一段階) $\dim(L) \geq 1$ とする．L は可解であるから, L は $[L, L]$ を真に含む．ここで $L/[L, L]$ を考えるとこれは明らかに可換リー環である．また $L/[L, L]$ の部分代数は自動的にイデアルになる (可換だから!). $L/[L, L]$ の余次元 1 の部分空間 $K/[L, L], (K \subset L)$ の自然な射影 $\varphi : L \longrightarrow L/[L, L]$ の逆像 $K = \varphi^{-1}(K/[L, L])$ は L の余次元 1 のイデアルになる．

(第二段階) 帰納法の仮定により K の共通固有ベクトル $v \in V$ が見つかる．それはすなわち, 任意の $x \in K$ に対して v は $x \cdot v = \lambda(x)v$ を満たすということである．ここに K 上の一次形式 (函数)$\lambda : K \longrightarrow \mathbb{F}$ を 1 つ固定している．次に V の部分空間 W;

$$W = \{w \in V \mid x \cdot w = \lambda(x)w \ (x \in K)\}$$

W には v がいるので $W \neq 0$ である．

(第三段階) ここでは W が L-不変部分空間であることを示す．$L = K + \mathbb{F}z$ とかける.(K は余次元 1 だから!) 今, W が L-不変部分空間であることを仮定する．このとき z は W の線型変換であり $\mathbb{F}$ は代数閉体であることを使うと z の固有ベクトル $v_0 \in W$ がみつかる．このとき v_0 は L の共通固有ベクトルである．(λ を L 上に拡張 ($\lambda(z)$ の行先を z の v_0 における固有値と決める!) しておく.) だから W が L-不変部分空間であることを示せれば定理の証明は終わる．

$w \in W,\ x \in L$ をとる．このとき $x \cdot w \in W$ か否かをチェックする．

$$yx \cdot w = xy \cdot w - [x, y] \cdot w = \lambda(y)x \cdot w - \lambda([x, y])w \quad (y \in K)$$

$\lambda([x, y]) = 0$ を示せば $x \cdot w \in W$ が言える．ここで

$$w, x \cdot w, x^2 \cdot w, \ldots, x^{n-1} \cdot w$$

が線型独立になるような最小の $n > 0$ をとる．W_i を V の部分空間であって $w, x \cdot w, \ldots, x^{i-1} \cdot w$ で張られるものとする．(但し, $W_0 = 0$ と定義する.) このとき $\dim(W_n) = n,\ W_{n+i} = W_n\ (i > 0)$ 任意の $y \in K$ は W_i-不変であることは明らか．$y \in K$ を対角成分 $\lambda(y)$ の上三角行列に取り替えたい．それすなわち

$$yx^i \cdot w = \lambda(y)x^i \cdot w \pmod{W_i}$$

が成り立つということである．

$$y \cdot (w, x \cdot w, \ldots, x^{i-1} \cdot w) = (w, x \cdot w, \ldots, x^{i-1} \cdot w) \begin{pmatrix} \lambda(y) & * & \cdots & * \\ 0 & \lambda(y) & \cdots & * \\ 0 & 0 & \ddots & * \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda(y) \end{pmatrix}$$

実はそれは可能で i に関する帰納法で証明できる．$i = 0$ のときは明らか．$i > 0$ とする．

$$yx^i \cdot w = yxx^{i-1} \cdot w = xyx^{i-1} \cdot w - [x, y]x^{i-1} \cdot w$$

帰納法の仮定から $yx^{i-1} \cdot w = \lambda(y)x^{i-1} \cdot w + w' \quad (w' \in W_{i-1})$ となり

$$yx^i \cdot w = xyx^{i-1} \cdot w - [x, y]x^{i-1} \cdot w = \lambda(y)x^i \cdot w + x \cdot w' - [x, y]x^{i-1} \cdot w = \lambda(y)x^i \cdot w \pmod{W_i}$$

$y \in K$ は W_n に作用し $\mathrm{Tr}_{W_n}(y) = n\lambda(y)$ である．特に $[x, y] \in K$ の場合を考える．x, y ともに W_n を保つことに注意する．$[x, y]$ は交換子として W_n に作用する．それゆえ $\mathrm{Tr}_{W_n}([x, y]) = n\lambda([x, y]) = 0$(トレースの性質を思い出せ!). $\mathbb{F}$ の標数は 0 だから $\lambda([x, y]) = 0$. □

系 2.2 (リーの定理)**.** L を $\mathfrak{gl}(V)$ の可解部分リー環とする．但し $\dim(V) < \infty$. このとき L はある V における旗を保つ．言い換えると, V の基底をうまくとることで L の要素 (の表現行列) は上三角行列にすることができる．

証明. $\dim(V)$ に関する帰納法を用いる．$\dim(V)=1$ のときは明らか (1×1 行列は上三角でしょ？笑)．$\dim(V)>1$ とする．定理 2.1 により，L 上の一次函数 $\lambda : L \longrightarrow \mathbb{F}$ があって，任意の $x\in L$ に対して

$$x\cdot v=\lambda(x)v$$

を満たすような $v_1\in V\setminus\{0\}$ が存在する．ここで $V_1=\mathbb{F}v_1$ とすると V_1 は明らかに L-不変空間である．それゆえ L の V/V_1 上への作用が定まる．$\dim(V/V_1)<\dim(V)$ なので帰納法の仮定から，L の (任意の) 要素 x を V/V_1 上の線型変換と見做したときの表現行列を上三角型行列になるように V/V_1 上の基底 $\{\overline{v_2},\dots,\overline{v_n}\}$ をとることができる．ここで $\overline{v_i}$ の代表 v_i をとり，$(v_1,v_2,\dots,v_n)$ を考えればこれは V の基底であって，それに関する x の V 上の線型変換としての表現行列は上三角型行列である． □

補題 2.3. L を可解リー環とする．このとき L のイデアルの列

$$0=L_0\subset L_1\subset\cdots\subset L_n=L,\quad \dim(L_i)=i\ (i=0,1,\dots,n)$$

が存在する．

証明. $\mathrm{ad}(L)\subset\mathfrak{gl}(L)$ は可解である (命題 1.5)．あとはリーの定理をこの場合に適用せよ． □

補題 2.4. L を可解リー環とする．このとき $x\in[L,L]$ であることは $\mathrm{ad}_L(x)$ が冪零であることを意味する．特に $[L,L]$ は冪零部分リー環である．

証明. 補題 2.3 のような L の列 $0=L_0\subset L_1\subset\cdots\subset L_n=L$ を考える．また L の基底 $\{x_1,\dots,x_n\}$ を $\{x_1,\dots,x_i\}$ が L_i の基底になるようにとる．このとき $\mathrm{ad}(L)$ の表現行列は上三角だから $\mathrm{ad}(L)\subset\mathfrak{t}(n,\mathbb{F})$．したがって $[\mathrm{ad}(L),\mathrm{ad}(L)]=\mathrm{ad}_L([L,L])\subset\mathfrak{n}(n,\mathbb{F})$ である ($\mathfrak{n}(n,\mathbb{F})$ は $\mathfrak{t}(n,\mathbb{F})$ の導来代数)．それから $x\in[L,L]$ に対して $\mathrm{ad}_L(x)$ は冪零であることが従う．さらに強く $\mathrm{ad}_{[L,L]}(x)$ が冪零ならばエンゲルの定理より $[L,L]$ は冪零になる． □

2.2 ジョルダン・シュバレー分解

この節に限り基礎体 $\mathbb{F}$ の標数に条件を課さない．Humphreys の本には書いてない基本的な線型代数のことを少し復習しておく．必要に応じて [佐武] を参照せよ．V を $\mathbb{F}$ 上の有限次元ベクトル空間とし，その上の線型変換 (行列)A を考える．また E を単位行列とする．A の**特性多項式**とは $\phi_A(T)=\det(A-TE)\in\mathbb{F}[T]$ のことであり，固有多項式の根のことを A の**固有値**と呼ぶのであった．今，A の相異なる固有値を $a_1,\dots,a_k$ とすれば固有多項式 $\phi_A(T)$ は

$$\phi_A(T)=\prod_{i=1}^{k}(T-a_i)^{m_i}$$

とかける．また固有値 a_i に対する**固有空間**とは $V_{a_i}=\mathrm{Ker}(A-a_i\cdot E)=\{v\in V\mid (A-a_iE)v=0\}$ のことであった．これの拡張として

$$\widetilde{V}_{a_i}=\{v\in V\mid (A-a_iE)^m v=0 \text{ を満たす } m\geq 1 \text{ が存在する }\}$$

を定義する．$\widetilde{V}_{a_i}$ を固有値 a_i に対する**広義固有空間**と呼ぶ．定義から $V_{a_i}\subseteq\widetilde{V}_{a_i}$ はすぐにわかるであろう．

命題 2.5. 上の状況のもとで

$$V = \widetilde{V}_{a_1} \oplus \cdots \oplus \widetilde{V}_{a_k}$$

が成り立つ.

証明. $i = 1, \ldots, k$ に対して $\phi_i(T) = \prod_{j \neq i}(T - a_j)^{m_j}$ とおく. このとき $\phi_i(T)$ の決め方から $\phi_i(T)$ たちは互いに共通因子を持たない. したがって

$$f_1(T)\phi_1(T) + \cdots + f_k(T)\phi_k(T) = 1$$

を満たす $f_i \in \mathbb{F}[T]$ が存在する. (このことは証明しないが一言コメントしておくと有理整数環 $\mathbb{Z}$ におけるベズーの定理の類似である.) $T = A$ とすると

$$f_1(A)\phi_1(A) + \cdots + f_k(A)\phi_k(A) = 1_V$$

であり, $A_i = f_i(A)\phi_i(A)$ とおけば $i \neq j$ のとき $A_iA_j = 0$ となる. 実際, $i \neq j$ であるとき $\phi_i(T)\phi_j(T)$ は $\phi_A(T)$ で割り切れる. すなわち, ある多項式 $g(T) \in \mathbb{F}[T]$ があって $\phi_i(T)\phi_j(T) = \phi_A(T)g(T)$ とかける. ケーリー・ハミルトンの定理 ($\phi_A(A) = 0$) ゆえ $\phi_i(A)\phi_j(A) = \phi_A(A)g(A) = 0$. また以上から

$$A_i = A_i 1_v = A_i(A_1 + \cdots + A_k) = A_i^2$$

が成り立つ. 実は $\mathrm{Im}(A_i) = A_i(V) = \widetilde{V}_{a_i}$ が成り立つ. $(T - a_i)^{m_i}\phi_i(T) = \phi_A(T)$ だから $(A - a_iE)^{m_i}\phi_i(A) = 0$ が成り立つ (ケーリー・ハミルトンの定理). よって, $v = A_iw \in \mathrm{Im}(A_i)$ に対して $(A - a_iE)^{m_i}v = (A - a_iE)^{m_i}A_iw = 0$ が従う. よって $\mathrm{Im}(A_i) \subset \widetilde{V}_{a_i}$ が示せた. 一方 $v \in \widetilde{V}_{a_i}$ とすると, $(A - a_iE)v = 0$ を満たす $m \geq 1$ が存在する. このとき $(T - a_i)^m$, $A_i = f_i(T)\phi_i(T)$ は共通因子を持たない. なぜなら, もし $f_i(T)$ が $(T - a_i)$ で割れたとすると $f_1(T)\phi_1(T) + \cdots + f_k(T)\phi_k(T) = 1$ の左辺が $T - a_i$ で割れることになり矛盾するからである. ということで $M(T)(T - a_i)^m + N(T)A_i = 1$ を満たす $M(T), N(T) \in \mathbb{F}[T]$ が存在する. ゆえに

$$M(A)(A - a_i)^m + N(A)A_i = 1_V$$

を v に施すことで $v = N(A)A_iv = A_i(N(A)v) \in \mathrm{Im}(A_i)$ が従い, $\widetilde{V}_{a_i} \subset \mathrm{Im}(A_i)$ が言えた.

$v \in V$ を任意にとる. このとき $v = A_1v + \cdots + A_kv$ が成り立つ. このとき $v = u_1 + \cdots + u_k \quad (u_i \in \widetilde{V}_{a_i})$ としたときに $u_i = A_iv$ を証明すればよい. $u_i = A_iw_i$ とかいたとき

$$A_iv = A_i(A_1w_1 + \cdots + A_kw_k) = A_i^2w_i = A_iw_i = u_i$$

これで証明が完了した. □

線型変換 $x \in \mathrm{End}(V)$ に対して $\varphi(x) = 0$ を満たすような多項式 $\varphi(T) \in \mathbb{F}[T]$ の中で最小次数かつモニック (最大次数の項の係数が 1) であるものを x の**最小多項式**と呼ぶ. $x \in \mathrm{End}(V)$ の最小多項式の $\mathbb{F}$ 上の根がすべて相異なるとき, x を**半単純 (semisimple)** という. x が半単純であるということと x が対角化可能であることは同値である. 大切な性質として, 二つの半単純な線型変換 $x, y \in \mathrm{End}(V)$ であって, それらが互いに可換であるとき, x, y は同時対角化可能である. それゆえに $x + y, x - y$ も半単純になることが分かる. また半単純な線型変換 $x \in \mathrm{End}(V)$ が V の部分空間 W を保つとき (すなわち x は W の線型変換とも見做せるとき), x は W 上でも半単純である.

命題 2.6. V を $\mathbb{F}$ 上の有限次元ベクトル空間とし, $x \in \mathrm{End}(V)$ とする.

- **(a)** x に対してただ一つ半単純な要素 $x_s \in \mathrm{End}(V)$ と冪零な要素 $x_n \in \mathrm{End}(V)$ が存在して $x = x_s + x_n$ とかける.
- **(b)** 定数項をもたない二つの一変数多項式 $p(T)$, $q(T)$ であって, $x_s = p(x)$, $x_n = q(x)$ を満たすものが存在する. 特に, x_s, x_n は他の線型変換 $x \in \mathrm{End}(V)$ と可換である.
- **(c)** 部分空間 $A \subset B \subset V$ であって, $x : B \longrightarrow A$ であるとき, x_s, x_n も B から A の写像である.

命題中のような分解 $x = x_s + x_n$ を x の**ジョルダン・シュバレー分解 (Jordan-Chevalley decomposition)** と呼ぶ. また x_s, x_n をそれぞれ x の**半単純部分 (semisimple part)**, **冪零部分 (nilpotent part)** と呼ぶ.

証明. $a_1, \ldots, a_k$ を x の相異なる固有値とし, その重複度をそれぞれ $m_1, \ldots, m_k$ とする. このとき x の特性多項式は $\prod_{i=1}^{k}(T - a_i)^{m_i}$ とかける (T は変数). $V_i = \mathrm{Ker}(x - a_i \cdot 1)^{m_i}$ とすると, V は部分空間 $V_1, \ldots, V_k$ の直和としてかけて (広義固有空間分解), x は各 V_i を保つ. 明らかに x は $(T - a_i)^{m_i}$ を特性多項式としてもっている. ここで $\mathbb{F}[T]$ の互いに素なイデアル $((T - a_i)^{m_i})$ $(i = 1, \ldots, k)$, (T) を考える. 中国式剰余定理により $\mathbb{F}[T]$ 次を満たす多項式 $p(T) \in \mathbb{F}[T]$ が存在することが分かる.

$$p(T) \equiv \begin{cases} a_i & (\mathrm{mod}\ (T - a_i)^{m_i}) \\ 0 & (\mathrm{mod}\ T) \end{cases}$$

$q(T) = T - p(T)$ とおく. $p(T) \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ T)$ だから $p(T)$, $q(T)$ 共に定数項を持たない. $x_s = p(x)$, $x_n = q(x)$ とおくと, x, x_s, x_n は互いに可換であり, それらは V を保つ. (x は V の線型変換だから!) 特に V_i も保つことに注意しておく. さて, $p(T) \equiv a_i \quad (\mathrm{mod}\ (T - a_i)^{m_i})$ は $(x_s - a_i \cdot 1)|_{V_i} = 0$ を示している. $(p(T) - a_i = f(t)(x - a_i)^{m_i}$ とかける. $v \in V_i$ に対して $(x_s - a_i)v = f(x)(x - a_i)^{m_i}v = 0)$ したがって x_s は V_i に対角に作用する (表現行列は対角成分 a_i の対角行列). 定義から $x_n = x - x_s$ であり, これは冪零になる. ($v \in V_i$ に対して $x_n^{m_i}v = (x - a_i \cdot 1)^{m_i}v = 0$) 以上から (c) は示せた. (a) を示す. 存在性は以上の議論から分かる. x_s, x_n の一意性を示す. 別のジョルダン・シュバレー分解 $x = s + n$ があったとする. このとき $x_s - s = n - x_n$ である. $x_s s = s x_s$ を示す. $[s, x] = [s, s + n] = [s, n] = 0$ であるから $[s, x_s] = [s, p(x)] = 0$. x_s, s は半単純な線型変換かつ互いに可換であるから同時対角化でき $x_s - s$ も半単純になる. また同様の計算により $n x_n = x_n n$ も正しいことが分かる. ($[n, x] = [n, s + n] = [n, s] = 0$ により $[n, s_n] = [n, q(x)] = 0$) x_n, n は冪零で互いに可換であるから $n - x_n$ も冪零になる. 冪零かつ半単純な線型変換は 0 写像しかない. したがって $x_s - s = n - x_n = 0$, $x_s = s$, $x_n = n$ で一意性が示せた. □

補題 2.7. 有限次元ベクトル空間 V 上の線型変換 $x \in \mathrm{End}(V)$ と x のジョルダン・シュバレー分解 $x = x_s + x_n$ を考える. このとき $\mathrm{ad}(x) = \mathrm{ad}(x_s) + \mathrm{ad}(x_n)$ は $\mathrm{ad}(x)$ のジョルダン・シュバレー分解になっている.

証明. x_s は半単純であるから, V の基底をうまくとることで表現行列を対角行列にとれる. 今, x_s の表現行列が対角行列 $\mathrm{diag}(a_1, \ldots, a_n)$ になるように V の基底 $\{e_1, \ldots, e_n\}$ をとり, $\mathrm{End}(V)$ の基底を $e_{ij}(e_k) = \delta_{jk} e_i$ となるようにとる. このとき $\mathrm{ad}(x_s)(e_{ij}) = [x_s, e_{ij}] = (a_i - a_j)e_{ij}$ となるから, この基底に関する $\mathrm{ad}(x_s)$ の表現行列は $\mathrm{diag}(\ldots, a_i - a_j, \ldots)$ となり $\mathrm{ad}(x_s)$ は半単純であることがわかった. また x_n は冪零であるから $\mathrm{ad}(x_n)$ も冪零である (命題 1.7). あとは命題 2.6 の (a) の一意性を使えば証明完了である. □

補題 2.8. $\mathfrak{A}$ を有限次元 $\mathbb{F}$-代数とする．このとき $\mathrm{Der}(\mathfrak{A})$ は $\mathfrak{A}$ の全ての要素の ($\mathrm{End}(\mathfrak{A})$ における) 半単純部分と冪零部分を含んでいる．(つまり, $\delta \in \mathrm{End}(\mathfrak{A})$ が $\mathfrak{A}$ の微分ならば δ の半単純部分, 冪零部分も微分であるという主張.)

証明. 任意の元 $\delta \in \mathrm{Der}(\mathfrak{A})$ に対して, $\sigma, \nu \in \mathrm{End}(\mathfrak{A})$ をそれぞれ δ の半単純部分, 冪零部分とする．δ の半単純部分 σ が $\mathrm{Der}(\mathfrak{A})$ に属することを示せば十分である．ここで任意の元 $a \in \mathbb{F}$ に対して,

$$\mathfrak{A}_a = \left\{x \in \mathfrak{A} \mid (\delta - a \cdot 1_{\mathfrak{A}})^k x = 0 \text{ を満たす自然数 } k \text{ が存在する.}\right\}$$

を定義する．このとき $\mathfrak{A}$ は δ の固有値たちにより

$$\mathfrak{A} = \bigoplus_{\alpha:\delta \text{ の固有値}} \mathfrak{A}_\alpha$$

と直和分解できる (広義固有空間分解)．さらに σ は $\mathfrak{A}_\alpha$ に α 倍で作用する (σ は半単純!)．また $a,\ b \in \mathbb{F}$ に対して, $\mathfrak{A}_a\mathfrak{A}_b \subseteq \mathfrak{A}_{a+b}$ が成り立つ．それは一般に次の公式

$$(\delta - (a+b)\cdot 1)^n(xy) = \sum_{i=0}^{n}((\delta - a\cdot 1)^{n-i}x)\cdot((\delta - b\cdot 1)^i y) \qquad (x, y \in \mathfrak{A})$$

が成り立つことから分かる (n に関する帰納法により上の公式は示せる)．今, $x \in \mathfrak{A}_a,\ y \in \mathfrak{A}_b$ とすると $xy \in \mathfrak{A}_{a+b}$ であるから $\sigma(xy) = (a+b)(xy)$ が成り立つ．一方, $\sigma(x)y + x\sigma(y) = (a+b)(xy)$ であるから

$$\sigma(xy) = \sigma(x)y + x\sigma(y)$$

である．以上で $\sigma \in \mathrm{Der}(\mathfrak{A})$ が示せた． □

2.3 カルタンの判定条件

ここではリー環 L がいつ可解になるかを調べるときに非常に有用な**カルタンの判定条件 (Cartan's Criterion)** を説明する．

補題 2.9. V を有限次元ベクトル空間とし, $A \subset B$ を $\mathfrak{gl}(V)$ の部分空間とする． $M = \{x \in \mathfrak{gl}(V) \mid [x, B] \subset A\}$ とおく．もし $x \in M$ が任意の $y \in M$ に対して $\mathrm{Tr}(xy) = 0$ を満たすならば, x は冪零元である．

証明. $x = s + n$ を x のジョルダン・シュバレー分解とする ($s = x_s,\ n = x_n$)．s の表現行列が対角行列 $\mathrm{diag}(a_1, \ldots, a_m)$ になるように V の基底 $\{v_1, \ldots, v_m\}$ をとる．E を固有値 $a_1, \ldots, a_m$ で張られる $\mathbb{F}$ の (有理数体 Q 上の) 部分ベクトル空間とする．証明すべきは $s = 0$ であることである．それを示すことは $E = 0$ であることを示すことと同値である．以下, $E = 0$ であることを示す．E の作り方から E は Q 上有限次元ベクトル空間である．$E = 0$ を示すために E の双対空間 E^* が 0, すなわち任意の線型写像 $f : E \longrightarrow Q$ が 0 を示す．今, 線型写像 $f : E \longrightarrow Q$ が与えられているとする．また, 基底 $\{v_1, \ldots, v_m\}$ に関する表現行列が対角行列 $\mathrm{diag}(f(a_1), \ldots, f(a_m))$ となるような元 $y \in \mathfrak{gl}(V)$ を考える．またそれらに応じて,

$$\mathrm{ad}(s)(e_{ij}) = (a_i - a_j)e_{ij}, \qquad \mathrm{ad}(y)(e_{ij}) = (f(a_i) - f(a_j))e_{ij}$$

となるように $\mathfrak{gl}(V)$ の基底 $\{e_{ij}\}_{1\le i,j\le m}$ をとる．ここで定数項のない多項式 $r(T)\in\mathbb{F}[T]$ であって，任意の $1\le i,j\le m$ に対して $r(a_i-a_j)=f(a_i)-f(a_j)$ を満たすものとする．そのような多項式があるのか?と思うであろう．実は $r(T)$ を

$$r(T)=\sum_{i,j=1}^{m}(f(a_i)-f(a_j))\prod_{(k,l)\neq(i,j)}\frac{\varphi(T)}{T-(a_k-a_l)},\quad \varphi(T)=\prod_{1\le i,j\le m}T-(a_i-a_j)$$

と定義すれば $r(a_i-a_j)=f(a_i)-f(a_j)$ を満たす[*1]．f は線型だから $a_i-a_j=a_k-a_l$ ならば $f(a_i)-f(a_j)=f(a_k)-f(a_l)$ が成り立つということに注意する．以上から明らかに $\mathrm{ad}(y)=r(\mathrm{ad}(s))$ が成り立つ．

$\mathrm{ad}(s)$ は $\mathrm{ad}(x)$ の半単純部分である (補題 2.7)．さらに $\mathrm{ad}(s)$ は定数項を含まない $\mathrm{ad}(x)$ の多項式によってかける (命題 2.6)．したがって，$\mathrm{ad}(y)$ も $\mathrm{ad}(x)$ の定数項を含まない多項式でかける ($\mathrm{ad}(s)=g(\mathrm{ad}(x))$ と定数項を含まない多項式 g でかけたなら，それを $\mathrm{ad}(y)=r(g(\mathrm{ad}(x)))$ とせよ)．仮定から $\mathrm{ad}(x)$ は B から A への線型写像である．$r(\mathrm{ad}(s))=\mathrm{ad}(y)(B)\subset A$ であることが分かる．それはすなわち $y\in M$ を意味する．補題の仮定を使うと $\mathrm{Tr}(xy)=0$ である．このことから $\sum_{i=1}^{m}a_if(a_i)=0$ を得る．この左辺は E の元の Q-線型結合である．ここで f を施すと $\sum_{i=1}^{m}f(a_i)^2=0$ となる．Q が有理数体であることを想起すれば $i=1,\dots,m$ に対して $f(a_i)^2=0$ となることが分かる．E は a_i たちで張られていたので，$f=0$ である． □

定理 2.10 (カルタンの判定条件)**.** V を有限次元ベクトル空間とし L を $\mathfrak{gl}(V)$ の部分リー環とする．もし任意の $x\in[L,L]$, $y\in L$ に対して $\mathrm{Tr}(xy)=0$ ならば，L は可解リー環である．

証明. 任意の $x\in[L,L]$ が冪零であることを示せばエンゲルの定理 (定理 1.6) により $[L,L]$ が冪零であることが示せる．$[L,L]$ が冪零リー環ならば L は可解リー環であることは明らかであるから，この定理は任意の $x\in[L,L]$ が冪零であることを示せばよい．$A=[L,L]$, $B=L$, $M=\{x\in\mathfrak{gl}(V)\mid [x,L]\subset[L,L]\}$ として補題 2.9 を適用する．明らかに $L\subset M$ であるから仮定より任意の $x\in[L,L]$, $y\in L$ に対して $\mathrm{Tr}(xy)=0$ である．あと示すべきは $[x,y]\in[L,L], z\in M$ に対して $\mathrm{Tr}([x,y]z)=0$ となることであるが，これは一般に有限次元ベクトル空間 V の自己準同型 $x,y,z\in\mathrm{End}(V)$ に対して

$$\mathrm{Tr}([x,y]z)=\mathrm{Tr}(x[y,z])$$

が成り立つことを認めれば，$\mathrm{Tr}([x,y]z)=\mathrm{Tr}(x[y,z])=\mathrm{Tr}([y,z]x)$ で M の定義から $[y,z]\in M$ である．よって $\mathrm{Tr}([x,y]z)=0$ である．以上から補題 2.9 により z は冪零である． □

3　キリング形式

3.1　半単純性の判定条件

L をリー環とする．$x,y\in L$ に対して $\kappa(\ ,\ )$ を

$$\kappa(x,y)=\mathrm{Tr}(\mathrm{ad}(x)\,\mathrm{ad}(y))$$

と定義しこれを**キリング形式**と呼ぶ．$\kappa(\ ,\ )$ は L 上の対称双線型形式である．また一般に，有限次元ベクトル空間 V 上の任意の線型変換 $x,y,z\in\mathrm{End}(V)$ に対して

$$\mathrm{Tr}([x,y]z)=\mathrm{Tr}(x[z,y])$$

[*1] このような構成法で得られるものを**ラグランジュ型補完函数**という．

が成り立つことから $x, y \in L$ に対して

$$\kappa([z,x],y) + \kappa(x,[z,y]) = 0 \quad (z \in L)$$

となることがわかる. この性質を L-不変性 (結合律) と呼んだりする.

補題 3.1. I を L のイデアルとし, κ, κ_I をそれぞれ L と I のキリング形式とする. このとき $\kappa_I = \kappa\,|_{I\times I}$ が成り立つ.

証明. もし, ベクトル空間 V の部分空間 W で, V の線形変換 ϕ が $\phi(V) \subset W$ を満たしているとする. このとき $\mathrm{Tr}(\phi) = \mathrm{Tr}(\phi\,|_W)$ が成り立つ. 実際, V の基底を最初の $\dim(W)$ 個を W の基底でとり, その基底に関する ϕ の表現行列を考えると, すぐにわかる. さて, もし $x, y \in I$ とすると, $\mathrm{ad}(x)\,\mathrm{ad}(y)$ は L の線型変換である. しかも I がイデアルであることを想起すれば, $\mathrm{ad}(x)\,\mathrm{ad}(y)(L) \subset I$ もわかる. したがって,

$$\begin{aligned}
\kappa(x,y)\,|_{I\times I} &= \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}(x)\,\mathrm{ad}(y))\,|_{I\times I} \\
&= \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}(x)\,\mathrm{ad}(y)\,|_I)\,|_{I\times I} \\
&= \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}_I(x)\,\mathrm{ad}_I(y)) \\
&= \kappa_I(x,y).
\end{aligned}$$

□

一般にリー環 L の対称内積 β に対して, $S_\beta := \{x \in L \mid \beta(x,y) = 0,\ \forall y \in L\}$ としこれを対称内積 β の**根基**という. 対称内積 β の根基 S が $S = \{0\}$ のとき β を **非退化**な内積と呼ぶ. キリング形式 κ は結合的なので, その根基 S は部分空間になる. 実際, $x, y \in S$ と $z \in L$ に対して

$$\begin{aligned}
\kappa([x,y],z) &= \mathrm{Tr}([x,y],z) \\
&= \mathrm{Tr}(x,[y,z]) \\
&= 0
\end{aligned}$$

つまり $[x,y] \in S$. さらに S は L のイデアルである. 今, L の基底 $x_1, \ldots, x_n$ を固定すると, κ が非退化であることと行列 $(\kappa(x_i, x_j))_{1\leq i,j\leq n}$ の行列式が 0 でないことは必要十分条件である.

さて, リー環 L の根基 $\mathrm{Rad}(L)$ が $\{0\}$ であるとき, L を半単純と呼んだことを思い出そう. L が半単純であることは, L が $\{0\}$ でない可換イデアルを持たないということと同値である. 実際, $\{0\}$ でない可換イデアルがあれば, それは $\mathrm{Rad}(L)$ に含まれる. 逆に, $\mathrm{Rad}(L)$ が $\{0\}$ でなければ, 非自明な可解イデアル $I \subseteq \mathrm{Rad}(L)$ が取れて, その導来列において $\{0\}$ でない最後の項 $\mathcal{D}^k(I) \subseteq \mathrm{Rad}(L)$, $k \in \mathbb{N}$ は非自明な可換なイデアルである.

定理 3.2. L をリー環とする. このとき L が半単純であることと, そのキリング形式 κ が非退化であるは同値である.

証明. まず最初に半単純リー環のキリング形式は非退化であることを示す. リー環 L であり, $\mathrm{Rad}(L) = 0$ と仮定する. S_κ をキリング形式 κ の根基とする. 定義から任意の $x \in S_\kappa$ と $y \in L$ に対して, $\mathrm{Tr}(\mathrm{ad}(x)\,\mathrm{ad}(y)) = 0$ である. カルタンの判定条件により, $\mathrm{ad}_L S_\kappa$ は可解である. $\mathrm{Rad}(L) = \{0\}$ だから $Z(L) = \{0\}$. したがって $S_\kappa (\xrightarrow{\sim} \mathrm{ad}_L S_\kappa)$ は可解. ところが仮定から $S_\kappa \subseteq \mathrm{Rad}(L) = \{0\}$ で, $S_\kappa = 0$ が言える. ゆえに κ は非退化.

逆を示す. $S_\kappa = \{0\}$ と仮定する. このとき L が半単純であることを示す. そのために L のイデアル I であって可換なものは皆 S_κ に属すことをいう. 任意に $x \in I$, $y \in L$ をとる. このとき, 写像

$\mathrm{ad}(x)\,\mathrm{ad}(y) : L \to L \to I$ は, $(\mathrm{ad}(x)\,\mathrm{ad}(y))^2 = 0$ である ($[I, I] = \{0\}$ に注意). それゆえ $\mathrm{ad}(x)\,\mathrm{ad}(y)$ は冪零である. ゆえに $\mathrm{Tr}(\mathrm{ad}(x)\,\mathrm{ad}(y)) = 0$ である. これから $I \subseteq S_\kappa = \{0\}$ が言えて, L は $\{0\}$ でない可換イデアルを持たないことがわかった. ゆえに L は半単純.

□

3.2 L の単純イデアル

リー環 L がそのイデアル $I_1, \ldots, I_t$ に対して, 線型部分空間としての直和

$$L = I_1 + \cdots + I_t$$

とかけるとき, L は**イデアルの直和**でかけるという. リー環として $I_1, \ldots, I_t$ としてみるとき, $1 \leq i \neq j \leq t$ に対して条件 $[I_i, I_j] \subset I_i \cap I_j = \{0\}$ を満たすことが分かる. L がイデアルの直和としてかけることを強調するとき

$$L = I_1 \oplus \cdots \oplus I_t$$

とかく.

定理 3.3. L を半単純リー環とする. このとき, L の単純イデアル $L_1, \ldots, L_t$ が存在して, $L = L_1 \oplus \cdots \oplus L_t$ とかけたとする. このとき任意の L の単純イデアルは, ある $i \in \{1, \ldots, t\}$ であって $L = L_i$ となる. さらに, L_i のキリング形式は L のキリング形式 κ を $L_i \times L_i$ に制限したものと一致する.

証明. I を L の任意のイデアルとする. このとき $I^\perp = \{x \in L \mid \kappa(x, y) = 0 \text{ for all } y \in I\}$ もイデアルにある. それは κ の結合律を使えばすぐに確かめられる. これから, $L = I \oplus I^\perp$ となることを示す. 今,$I \cap I^\perp$ も L のイデアルであることに注意する. ここで, カルタンの判定条件をリー環 $I \cap I^\perp$ に適用することで, $I \cap I^\perp$ は可解イデアルである. つまり $I \cap I^\perp \subseteq \mathrm{Rad}(L)$. ところが L は半単純であるから $\mathrm{Rad}(L) = \{0\}$ であり, $I \cap I^\perp = \{0\}$. したがって, $\dim I + \dim I^\perp = L$ であるから, $L = I \oplus I^\perp$.

次に, 半単純リー環 L は単純リー環の直和でかけることを示す. L は非自明なイデアルを持たないと仮定すると, L 自身が単純になり, 定理を満たすことは明らか. さて, L_1 を $\{0\}$ でない L の真のイデアルであって, 包含関係に関して最小のものとする. 前段落によって $L = L_1 \oplus L_1^\perp$ である. また, L_1 のイデアルもまた L のイデアルである. 実際, L_1 のイデアル $\mathfrak{A}$ として, 任意の $x \in L$ と $y \in \mathfrak{A}$ に対して, $[x, y] \in \mathfrak{A}$ であるかを確かめれば良いが, $x = x_1 + x_2$, $x_1 \in L_1$, $x_2 \in L_1^\perp$ と書けば,

$$[x, y] = [x_1 + x_2, y] = [x_1, y] + [x_2, y]$$

で $[x_1, y] \in \mathfrak{A}$ はすぐにわかり, $[x_2, y]$ は $y \in \mathfrak{A} \subseteq L_1$ だから $[x_2, y] \in L_1 \cap L_1^\perp = \{0\}$ により $[x_2, y] = 0 \in \mathfrak{A}$. したがって $[x, y] \in \mathfrak{A}$. その事実から, L_1 の根基 $\mathrm{Rad}(L_1)$ は L の可解イデアルである. ゆえに $\mathrm{Rad}(L_1) \subseteq \mathrm{Rad}(L) = \{0\}$ だから, L_1 は半単純. 同様の理由で $L_1^\perp$ も半単純. とくに, L_1 は単純である (L_1 の最小性より). あとは帰納的に上記の要領で分解を繰り返せばよい.

最後に単純イデアルの一意性を示す. I を L の単純イデアルとする. このとき $[I, L]$ もまた L のイデアルになる. $Z(L) = \{0\}$ であるから $[I, L]$ は零でない. I は単純イデアルだから $I = [I, L]$ が言える. 一方で,

$$[I, L] = [I, L_1] \oplus \cdots \oplus [I, L_t]$$

は一つの項を除いて皆 0 である. それはすなわち $[I, L_i] = I$ を意味する. このとき $L_i \subseteq I$ だが, L_i の単純性から $I = L_i$. □

系 3.4. L を半単純リー環とする．このとき $L=[L,L]$ である．また L の任意のイデアル，リー環の準同型 ϕ に対する $\phi(L)$ ともに半単純である．さらに，L のイデアルは L の単純イデアルの和である．

証明. $L=[L,L]$ を示す．L は半単純だから定理 3.3 により，単純イデアル $L_1,\ldots,L_t$ の直和 $L=L_1\oplus\cdots\oplus L_t$ でかける．これに L をブラケットする．$[L,L]=[L,L_1]\oplus\cdots\oplus[L,L_t]$．ここで $Z(L)=\{0\}$ に注意すれば，各 $i=1,\ldots,t$ に対して L_i の単純性から $[L,L_i]=L_i$ が言えて，$[L,L]=L$ が言えた．

L のイデアル I も半単純であることは，一般に，I のイデアルも L のイデアルであるという事実を使えば，$\mathrm{Rad}(I)$ も L の可解イデアルとわかる．ゆえに $\mathrm{Rad}(I)\subseteq\mathrm{Rad}(L)=0$ から分かる．他の主張は明らか． □

3.3 内部微分

リー環 L の**内部微分**とは $\mathrm{Der}(L)$ の元 δ であって $\delta=\mathrm{ad}(x)$, $x\in L$ でかけるもののことであった．一般には $\mathrm{ad}(L)\subseteq\mathrm{Der}(L)$ である．また任意の $\delta\in\mathrm{Der}(L)$, $x\in L$ に対して $[\delta,\mathrm{ad}(x)]=\mathrm{ad}(\delta x)$ が成り立つ．実際，$z\in L$ に対して，

$$\begin{aligned}[\delta,\mathrm{ad}(x)](z)&=(\delta\,\mathrm{ad}(x)-\mathrm{ad}(x)\delta)(z)\\&=\delta([x,z])-[x,\delta z]\\&=[\delta x,z]+[x,\delta z]-[x,\delta z]\\&=\mathrm{ad}(\delta x)(z)\end{aligned}$$

したがって $[\mathrm{Der}(L),\mathrm{ad}(L)]\subset\mathrm{ad}(L)$ がいえた．

定理 3.5. リー環 L が半単純ならば，$\mathrm{ad}(L)=\mathrm{Der}(L)$ が成り立つ．

証明. L は半単純であるから $Z(L)=\{0\}$．したがってリー環として同型 $L\xrightarrow{\sim}\mathrm{ad}(L)$ が言える．特に $M:=\mathrm{ad}(L)$ のキリング形式は非退化である (定理 3.2)．$D:=\mathrm{Der}(L)$ とすると，$[D,M]\subset M$ が成り立つ．したがって，補題 3.1 より，κ_M は κ_D を $M\times M$ に制限したものである．特に $I=M^\perp=\{x\in D\mid\kappa_D(x,y)=0,\forall y\in M\}$ とすると，κ_M の非退化性から $I\cap M=0$．I,M はともに D のイデアルである．$[I,M]\subseteq I\cap M=0$ だから $[I,M]=0$．もし $\delta\in I$ ならば任意の $x\in L$ に対して $\mathrm{ad}(\delta x)=0$ である．$L\xrightarrow{\sim}\mathrm{ad}(L)$ だから $\delta x=0$，つまり $\delta=0$．これは $I=0$ を意味する．ゆえに $D=M$． □

3.4 抽象ジョルダン分解

この副節では定理 3.5 を使って，一般の半単純リー環 L における ($\mathfrak{gl}$ の部分リー環とは限らない!!) 抽象ジョルダン分解を導入する．補題 2.8 を思い出そう．$\mathfrak{A}$ を有限次元 $\mathbb{F}$-代数としたとき，$\mathrm{Der}(\mathfrak{A})$ は $\mathfrak{A}$ の全ての要素の ($\mathrm{End}(\mathfrak{A})$ における) 半単純部分と冪零部分を含んでいる．(つまり，$\delta\in\mathrm{End}(\mathfrak{A})$ が $\mathfrak{A}$ の微分ならば δ の半単純部分，冪零部分も微分であるという主張.) とくに，定理 3.5 により $\mathrm{ad}(L)=\mathrm{Der}(L)$ である．$L\to\mathrm{ad}(L)$ は一対一写像だから，$x\in L$ に対して $s,n\in L$ であって，$\mathrm{ad}(x)=\mathrm{ad}(s)+\mathrm{ad}(n)$ がジョルダン分解になっているようなものが存在する．これは $x=s+n$ であって $[s,n]=0$ を満たすことを意味する．このような s を ad **半単純元**と呼ぶ．s,n を $x_s:=s$, $x_n:=n$ とかき，それぞれを x の半単純部分，冪零部分と呼ぶ．

注意深い読者は，$\mathfrak{gl}(V)$ の部分リー環 (線型リー環) の場合のジョルダン分解の記号と同じで紛らわしいと思うであろう．しかし，抽象ジョルダン分解はふつうのジョルダン分解とおなじ概念としてみなせるということ

を次章で証明する．ここではそれが正しいということを特別な場合で納得してもらえれば十分である．V を有限次元ベクトル空間とし $L := \mathfrak{sl}(V) = \{x \in \mathfrak{gl}(V) \mid \mathrm{Tr}(x) = 0\}$ の場合を考える．$x = x_s + x_n \in \mathrm{End}(V)$ を $\mathrm{End}(V)$ におけるふつうのジョルダン分解とする．今 $x \in L$ とする．x_n は冪零だから, $\mathrm{Tr}(x_n) = 0$ で $x_n \in L$ であり, 特に x_s は $\mathrm{Tr}(x_s) = 0$ とわかり $x_s \in L$. さらに $\mathrm{ad}_{\mathfrak{gl}(V)}(x_s)$ は半単純である (補題 2.7). 特に $\mathrm{ad}_L(x_s)$ も半単純. 同様に $\mathrm{ad}_L(x_n)$ は冪零であり, $[\mathrm{ad}_L(x_s), \mathrm{ad}_L(x_n)] = \mathrm{ad}_L([x_s, x_n]) = 0$. L の抽象ジョルダン分解の一意性から x の L における抽象ジョルダン分解は $x = x_s + x_n$ となるしかない．

4　表現の完全可約性

この節では, 表現といえば有限次元表現を意味する．

4.1　加群

ここでは表現を加群の言葉で言い換えられることを説明する．L をリー環とし, V をベクトル空間とする．L は V に左から作用

$$L \times V \to V, \quad (x, v) \mapsto x.v$$

していて次の 4 条件をみたすとき, V を L 加群と呼ぶ.

(M1) $(ax + by).v = a(x.v) + b(y.v)$,

(M2) $x.(av + bw) = a(x.v) + b(x.w)$,

(M3) $[x, y].v = x.y.v - y.x.v. \qquad (x, y \in L;\ v, w \in V;\ a, b \in \mathbb{F})$

$\phi : L \to \mathfrak{gl}(V)$ は L の表現とする．このとき V は $x.v := \phi(x)v$, $x \in L$, $v \in V$ によって L 加群とみなせる. 逆に, L 加群 V が与えられたとすると, $\phi : L \to \mathfrak{gl}(V)$ を $\phi(x)v := x.v$ と定めればリー環としての準同型になることは明らか．また, L 加群としての準同型といえば, 線型写像 $V \to W$ であって, $\phi(x.v) = x.\phi(v)$ を満たすもののことを指す．つまり ϕ と L の作用が可換ということである．また $\mathrm{Ker}\,\phi$ は V の L 部分加群であることはすぐにわかるであろう．ϕ がベクトル空間として同型であるとき V と W は L 加群として同型という．またそのような 2 つの L 加群を L の同値な表現という．L 加群 V が自分自身と 0 を除いて, L 部分加群を持たないとき, V を既約という．V が既約な L 加群の直和でかけるとき, V を**完全可約**という．

V が完全可約であること (1) と V の任意の L 部分加群 W に対して別の L 部分加群 W' が存在して $V = W \oplus W'$ とかけるということ (2) は同値である．(1) から (2) を示す．V は完全可約であるとする．(2) を仮定し, V の L 加群 W に対して, $\mathrm{codim}\, W = \dim V - \dim W$ に関する帰納法により示す．$\mathrm{codim}\, W = 0$ のとき, すなわち $V = W$ のときは明らか．$\mathrm{codim}\, W > 0$ とする．すなわち $W \subset V$ である．今, $V = \bigoplus_{i \in I} V_i$ で V_i は既約 L 加群とする (V は有限次元だから I は有限集合)．このときある $i \in I$ があって, $V_i \subset W$ である．このとき $W \cap V_i = 0$ だから $W + V_i = W \oplus V_i$ である．$\mathrm{codim}(W + V_i) < \mathrm{codim}\, W$ だから帰納法の仮定から, ある L 部分加群 W' であって $V = (W \oplus V_1) \oplus W'$. 次に (2) から (1) を示す．これは $\dim V$ に関する帰納法により示す．$\dim V = 0$ のときは明らか．$\dim V > 0$ とする．ここで V の L 部分加群うち次元が最小なもの V_1 をとる．V_1 は取り方から既約 L 加群である．仮定から $V = V_1 \oplus W$ とかける L 加群 W がある. $\dim V_1 = 0$ は明らかなので, $\dim V_1 > 0$ とする．そしたら, 再び V_1 の 0 でない L 部分加群 V_2 をとれば, それも既約になる．この操作を繰り返すことで, V の既約 L 加群による直和分解が得られる．

L 加群 W, W' に対して直和 $W \oplus W'$ も $x.(w, w') := (x.w, x.w')$, ($x \in L$ $w \in W$ $w' \in W'$) によって L 加群になる．

補題 4.1 (Schur の補題)**.** $\phi : L \to \mathfrak{gl}(V)$ は既約表現であるとする．このとき, 任意の $x \in L$ に対して $\phi(x)$ と可換な $\mathrm{End}\, V$ の元はスカラーのみである．

証明. $f \in \mathrm{End}\, V$ であって任意の $x \in L$ に対して $\phi(x)$ と可換なものとする．f の固有値 $c \in \mathbb{F}$ における固有空間 $W = \{v \in V \mid (f - c1_V)(v) = 0\}$ は V の L 部分加群であり, $W \neq 0$ である．V の既約性から $W = V$ でなければならない．したがって $f = c1_V$． □

5 $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{F})$ の表現論

6 ルート空間分解

この節では L と書けば, 半単純リー環を意味する．これから L の構造をその随伴表現を通して研究する．

6.1 極大トーラス部分環とルート

リー環 L が ad 冪零元たちで構成されているとすると L は冪零リー環になる (1.6)．もしそうでない場合は, ある $x \in L$ であって, x の抽象ジョルダン分解における半単純部分 x_s が非零であるものがとれる．これは半単純元によって構成される非零な L の部分環の存在を示唆している．そのような部分環を**トーラス**という．

補題 6.1. L のトーラス部分環は可換リー環である．

証明. T を L のトーラスとする．任意の $x \in T$ に対して, $\mathrm{ad}_T(x) = 0$ を示す．$\mathrm{ad}(x)$ は 対角化可能であるから, $\mathrm{ad}_T(x)$ は零でない固有値をもつことを示せば十分である．ここで逆に, $x \in T$ はある非零な元 $y \in T$ に対して, $[x, y] = ay$ $(a \neq 0)$ を満たすと仮定する．このとき $\mathrm{ad}_T(y)(x) = -ay$ は固有値 0 の $\mathrm{ad}_T(y)$ の固有ベクトルである．一方で, x は $\mathrm{ad}_T(y)$ の固有ベクトルの一次結合でかける ($\mathrm{ad}_T(y)$ も半単純だから対角化可能)．それを $x = v_1 + \cdots + v_k$ とかいておく．これに, 左から $\mathrm{ad}_T(y)$ を左から施すと, $\mathrm{ad}_T(y)(x) = \mathrm{ad}_T(y)(v_1) + \cdots + \mathrm{ad}_T(y)(v_k) = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k$．これにもう一度 $\mathrm{ad}_T(y)$ を施すと, $0 = \lambda_1^2 v_1 + \cdots + \lambda_k^2 v_k$ となり, これは $\lambda_1 = \cdots = \lambda_k = 0$ を意味する．したがって $\mathrm{ad}_T(y)(x) = 0$ となり, 仮定に反する． □

今, L のトーラス部分環の中で極大なもの H を一つ固定する．H は補題 6.1 により, 可換リー環であるから, $\mathrm{ad}_L(H)$ は L の半単純な線形変換の可換族である．だから, $\mathrm{ad}_L(H)$ は L 上で同時対角化できる．言い換えると, L は部分空間 $L_\alpha = \{x \in L \mid [h, x] = \alpha(h)x, \forall h \in H\}$ たちの直和でかける．ここに $\alpha \in H^*$．L_0 は H の中心化環 $C_L(H)$ である．補題 6.1 により, $H \subseteq C_L(H)$ である．集合 $\Phi \subset H^*$ を $\Phi := \{\alpha \in H^* \mid L_\alpha \neq 0\}$ と定義し, Φ の元を H に関する L の**ルート**と呼ぶ．次の分解を L の**ルート空間分解**と呼ぶ．

$$L = C_L(H) \oplus \bigsqcup_{\alpha \in \Phi} L_\alpha$$

命題 6.2. 任意の $\alpha, \beta \in H^*$ に対して, $[L_\alpha, L_\beta] \subset L_{\alpha+\beta}$．$x \in L_\alpha$, $\alpha \neq 0$ ならば $\mathrm{ad}(x)$ は冪零である．もし, $\alpha, \beta \in H^*$ かつ $\alpha + \beta \neq 0$ ならば L_α と L_β は L のキリング形式 κ に関して直交している．

証明. 最初の主張はヤコビの恒等式からすぐわかる. 実際, $x \in L_\alpha$, $y \in L_\beta$ に対して

$$\mathrm{ad}(h)([x,y]) = [[h,x],y] + [x,[h,y]] = \alpha(h)[x,y] + \beta(h)[x,y] = (\alpha+\beta)(h)[x,y] \in L_{\alpha+\beta}, \quad (\forall h \in H)$$

となる. 2 つ目の主張は, Φ が有限集合であることに注意すれば, 一つ目の主張からすぐにわかる.

$$L_\alpha \supset [L_\alpha, L_\alpha] = L_{2\alpha} \supset \cdots \supset L_{k\alpha} = 0$$

最後の主張を示す. $(\alpha+\beta)(h) =\neq 0$ となる $h \in H$ をとる. このとき $x \in L_\alpha$, $y \in L_\beta$ ならば, κ の結合性から

$$\kappa([h,x],y) = -\kappa([x,h],y) = -\kappa(x,[h,y])$$

となり $(\alpha+\beta)(h)\kappa(x,y) = 0$ でこれは $\kappa(x,y) = 0$ を意味する. □

系 6.3. L のキリング形式 κ を $L_0 = C_L(H)$ に制限したものも非退化である.

証明. L は半単純だから定理??より κ は非退化である. 一方, L_0 は任意の L_α $(\alpha \in \Phi)$ と直交している (命題 6.2). もし, $z \in L_0$ は L_0 と直交しているとする. このとき $\kappa(z,L) = 0$ であり, これは $z = 0$ を意味する (κ の非退化性を使った). □

6.2 H の中心化部分環

補題 6.4. x, y をある有限次元ベクトル空間の線型変換で, 互いに可換かつ y は冪零とする. このとき xy も冪零であり, 特に $\mathrm{Tr}(xy) = 0$.

証明. y は冪零だから, ある正の整数 n があって $y^n = 0$ を満たす. x, y の可換性を使えば $(xy)^n = xy^n x^{n-1} = 0$ で xy も冪零であることが分かった. xy は冪零であるからその表現行列を対角成分が 0 の上 (下) 三角行列にとれるから, $\mathrm{Tr}(xy) = 0$. □

命題 6.5. H を L の極大トーラスとする. このとき $H = C_L(H)$.

証明. 7 つのステップにより示す. 以下, $C := C_L(H)$ とかく.

(1) C は C の元の半単純部分と冪零部分を含む. $x \in C$ をいうには, $\mathrm{ad}(x) : H \to 0$ を言えば良い. $x \in C$ に対して $\mathrm{ad}(x)_s$, $\mathrm{ad}(x)_n$ は命題 2.6 の (c) より, $ad(x)_s, \mathrm{ad}(x)_n : H \to 0$. また $ad(x)_s = \mathrm{ad}(x_s)$, $\mathrm{ad}(x)_n = \mathrm{ad}(x_n)$ であるから $x_s, x_n \in C$.

(2) C の任意の半単純元は H に属す. もし $x \in C$ は半単純元かつ中心元だったら $H + \mathbb{F}x$ はトーラスになる. 可換な半単純元たちの和は再び半単純元になる (同時対角化可能!). H の極大性から $H = H + \mathbb{F}x$ つまり $x \in H$.

(3) L のキリング形式 κ を H に制限したものは非退化である. $\kappa(h,H) = 0$ となる $h \in H$ を考える. このとき $h = 0$ とならざるを得ないことを示す. $x \in C$ が冪零元ならば, $[x,H] = 0$ ということと, $\mathrm{ad}(x)$ も冪零になることから, 任意の $h \in H$ に対して $\mathrm{Tr}(\mathrm{ad}(x)\,\mathrm{ad}(h)) = 0$, すなわち $\kappa(x,H) = 0$ が従う (補題 6.4). しかし, (1),(2) により $\kappa(h,C) = 0$ がいえた. あとは $\kappa\,|_C$ の非退化性から $h = 0$.

(4) C は冪零である．もし $x \in C$ が半単純ならば H に属し (2), $\mathrm{ad}_C(x)(=0)$ は冪零．一方で，もし $x \in C$ は冪零ならば，なおさら $\mathrm{ad}_C(x)$ は冪零である．任意の $x = x_s + x_n \in C$ とする．(1) から $x_s, x_n \in C$ である．このとき $\mathrm{ad}_C(x)$ は 2 つの可換な冪零元の和でかける．したがって $\mathrm{ad}_C(x)$ は冪零．エンゲルの定理から C は冪零．

(5) $H \cap [C, C] = 0$．これは κ の結合性と $[H, C] = 0$ から $\kappa(H, [C, C]) = 0$．

(6) C は可換リー環．$[C, C] \neq 0$ とする．(4) により C は冪零であった．補題 1.9 により，$Z(C) \cap [C, C] \neq 0$．z を $Z(C) \cap [C, C]$ の非零な元とする．(2) と (5) によって，z は半単純でないことがわかる．したがって z の冪零部分 z_n は非零で C に属す (1)．また任意の $c \in C$ に対して $0 = [z, c] = [z_s + z_n, c] = [z_s, c] + [z_n, c]$．ここで $z_s \in H$ だから $[z_s, c] = 0$ で $[z_n, c] = 0$ とならざるを得ない．ゆえに $z_n \in Z(C)$．これにより $\kappa(z_n, C) = 0$ となる．しかし κ の非退化性から $z = 0$ となりこれは z が非零であることに矛盾．よって $[C, C] = 0$．

(7) $C = H$．さもなくば (1),(2) によって C は非零な冪零元 x からなる (C は冪零！)．ここで補題 6.4 と (6) により任意の $y \in C$ に対して $\kappa(x, y) = 0$ が成り立つ．しかしこれは κ の非退化性に反する．ゆえに $C = H$． □

系 6.6. L のキリング形式 κ を H に制限したものは非退化．

系 6.6 は H と H^* を同一視してもよいことを示唆している．$\phi \in H^*$ に対して，$\phi(h) = \kappa(t_\phi, h), \forall h \in H$ を満たす $t_\phi \in H$ がただ一つある．とくに，Φ と H の部分集合 $\{t_\phi \in H \mid \phi \in \Phi\}$ は対応する．

6.3 直交性

命題 6.7. (a) Φ は H^* を張る．

(b) $\alpha \in \Phi$ ならば $-\alpha \in \Phi$．

(c) $\alpha \in \Phi$, $x \in L_\alpha$, $y \in L_{-\alpha}$ とする．このとき，$[x, y] = \kappa(x, y)t_\alpha$ が成り立つ．

(d) もし $\alpha \in \Phi$ ならば，このとき $[L_\alpha, L_{-\alpha}]$ は L の 1 次元部分空間であり，t_α はその基底になっている．

(e) 任意の $\alpha \in \Phi$ に対して，$\alpha(t_\alpha) = \kappa(t_\alpha, t_\alpha) \neq 0$．

(f) $\alpha \in \Phi$ で x_α を L_α の非零な元とする．このとき元 $y_\alpha \in L_{-\alpha}$ であって次を満たすようなものが存在する．$x_\alpha, y_\alpha, h_\alpha = [x_\alpha, y_\alpha]$ は $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{F})$ と同型な L の 3 次元部分環を張る.($x_\alpha \mapsto x$, $x_{-\alpha} \mapsto y$, $h_\alpha \mapsto h$)

(g) $h_\alpha = \frac{2t_\alpha}{\kappa(t_\alpha, t_\alpha)}$; $h_\alpha = -h_{-\alpha}$．

証明. (a) Φ は H^* を張らないと仮定する．このとき H の非零な元 h が存在して，任意の $\alpha \in \Phi$ に対して $\alpha(h) = 0$ を満たすものが存在する．しかし，これは任意の $\alpha \in \Phi$ に対して，$[h, L_\alpha] = 0$ となることを意味する．$[h, H] = 0$ だから $[h, L] = 0$, つまり $h \in Z(L) = 0$ でこれは h が非零であることに矛盾．

(b) $\alpha \in \Phi$ とする．もし $-\alpha \notin \Phi$ ならば，任意の $\beta \in H^*$ に対して，$\kappa(L_\alpha, L_\beta) = 0$ が成り立つ ($\alpha + (-\alpha) = 0$ のときは $L_{-\alpha} = 0$ により，$\kappa(L_\alpha, L_{-\alpha}) = 0$ であることと 命題 6.2 によりわかる)．これは κ の非退化性に反する．

(c) $\alpha \in \Phi$, $x \in L_\alpha$, $y \in L_{-\alpha}$ とする．$h \in H$ を任意にとる．κ の結合性により

$$\kappa(h, [x, y]) = \kappa([h, x], y) = \alpha(h)\kappa(x, y) = \kappa(t_\alpha, h)\kappa(x, y) = \kappa(\kappa(x, y)t_\alpha, h) = \kappa(h, \kappa(x, y)t_\alpha)$$

である．これは $\kappa(h, [x, y] - \kappa(x, y)t_\alpha) = 0$ を意味する．したがって，κ の非退化性から $[x, y] = \kappa(x, y)t_\alpha$．

(d) (c) によって, t_α は $[L_\alpha, L_{-\alpha}]$ を張ることは示されている．あとは $[L_\alpha, L_{-\alpha}] \neq 0$ を示ばよい．x を L_α の非零な元とする．もし $\kappa(x, L_{-\alpha}) = 0$ ならば, このとき $\kappa(x, L) = 0$. κ の非退化性より $x = 0$ だがこれは, x が非零であることに矛盾．したがって $\kappa(x, y) \neq 0$ となる $L_{-\alpha}$ の非零な元 y がみつかる．(c) によって, $[x, y] \neq 0$ が従う．

(e) $\alpha(t_\alpha) = 0$ と仮定する．このとき $x \in L_\alpha$, $y \in L_{-\alpha}$ に対して, $[t_\alpha, x] = 0 = [t_\alpha, y]$ が成り立つ．(d) により, $\kappa(x, y) \neq 0$ となる x, y が取れる．ここで $\kappa(x, y) = 1$ となるように適当にスカラー倍して変形しておく．このとき $[x, y] = t_\alpha$. これれにより x, y, t_α が生成する L の 3 次元部分空間 S は可解であることがわかる ($S \xrightarrow{\sim} \mathrm{ad}_L(S) \subset \mathfrak{gl}(L)$). 特に, 任意の $s \in [S, S]$ に対して $\mathrm{ad}_L(s)$ は冪零 (系 2.4). また $\mathrm{ad}_L(t_\alpha)$ は半単純かつ冪零であるから $\mathrm{ad}_L(t_\alpha) = 0$ である．これは $t_\alpha \in Z(L) = 0$ を意味するが, $t_\alpha \neq 0$ に矛盾.

(f) 元 $0 \neq x_\alpha \in L_\alpha$ が与えられているとき, 元 $y_\alpha \in L_{-\alpha}$ がとれて, $\kappa(x_\alpha, y_\alpha) = \frac{2}{\kappa(t_\alpha, t_\beta)}$ とできる．それは, (e) と $\kappa(x_\alpha, L_{-\alpha}) \neq 0$ からわかる． $\square$

索引

参考文献

[Hum] James. E. Humphreys, *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory*, Springer-Verlag, 1972.

[佐武] 佐武 一郎, 線型代数学 (新装版), 裳華房, 1958.