

「トロピカル幾何入門」

梶原 健氏 (東北大学大学院理学研究科)¹

2006年2月16日

木村 杏子 (名大・多元数理) 記

「代数幾何学勉強会」 2006年2月16日～2月17日
於 名古屋大学大学院多元数理科学研究科

平成 17 年度独立行政法人学術振興会科学研究費若手研究 (B)
(課題研究番号 15740019, 代表 伊藤 由佳理)

¹2006 年 4 月現在の所属は横浜国立大学大学院工学研究院

概要

トロピカル幾何学の初歩を解説します。トロピカル幾何とは、代数幾何と凸体の幾何を付値論でつないだ幾何学です。講義の後半では射影平面曲線の古典的な定理のトロピカル幾何学的な類似を紹介します。

Introduction

トロピカル幾何という名前は印象的である。[6]によると、トロピカル幾何のアイデアを出したのが I. Simon (ブラジル人) で、トロピカルと呼んだのは J.-E. Pin を含む同僚のフランス人たちらしい。

トロピカル幾何には

- min-plus 代数の幾何 … 計算しやすい見方 (計算代数に近い見方)
- 付値代数の幾何 … 代数幾何に関係が深い

の2通り見方がある。このような2つの側面があるので、トロピカル幾何は、計算はしやすいが代数幾何においてもうまいところは調べることができる、というものである。

1 min-plus 代数の幾何

例 1.1 (min-plus 代数の例). $a, b \in \mathbb{R}$ に対して、トロピカル和 \oplus 、トロピカル積 \odot を

$$\begin{cases} a \oplus b := \min(a, b), \\ a \odot b := a + b. \end{cases}$$

と定める。このとき $(\mathbb{R}, \oplus, \odot)$ は半環 (環の公理のうち、和に関する単位元の存在の公理以外を公理とする代数系) になっている。(これは min-plus 代数だから min を使ったが、max で考える場合もある)。

このような代数上の幾何とはどういうものかについて、説明する。

以下、 $N_{\mathbb{R}} := \mathbb{R}^r$ 、 $M_{\mathbb{R}} := \text{Hom}_{\mathbb{R}}(N_{\mathbb{R}}, \mathbb{R})$ とする。

定義 1.2. $N_{\mathbb{R}}$ 上区分的線型凸関数とは、 $\varphi: N_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}$ で

$$\varphi = \min(m_1 + c_1, \dots, m_s + c_s)$$

なる $m_1, \dots, m_s \in M_{\mathbb{R}}$ と定数関数 $c_1, \dots, c_s \in \mathbb{R}$ が存在するものをいう。

定義 1.3. トロピカル前多様体 $V (\subset N_{\mathbb{R}})$ とは、ある区分的線型凸関数

$$\varphi_1, \dots, \varphi_s: N_{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbb{R}$$

があって

$$V = \{p \in N_{\mathbb{R}} : \text{各 } \varphi_i \text{ は } p \text{ のどんな近傍でも 1 つの affine 関数で書けない}\}$$

となるものをいう。

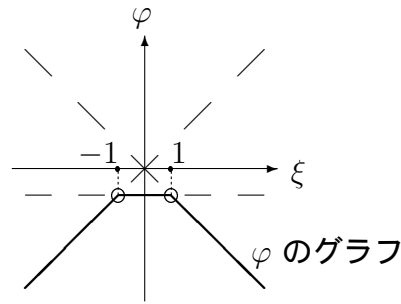


図 1.1: φ のグラフ (例 1.4)

トロピカル前多様体を理解するために、いくつか例を見よう。

例 1.4. $r = 1$ すなわち $N_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$ とする. $\xi: N_{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を, $p \in \mathbb{R}$ に対し $\xi(p) = p$ (恒等写像) と定める. $\varphi := \min(-\xi, -1, \xi)$ を考えよう.

\min を見たいのでグラフを書いて調べると, 図 1.1 のようになる. 図から, φ が定義するトロピカル(前)多様体は, グラフの折れた部分の $\{-1, 1\} \subset \mathbb{R}$ であることが分かる.

また極端な例として $\varphi := \xi$ を考える. このとき φ の定義するトロピカル多様体は \emptyset である.

例 1.5. $r = 2$ とする. $\xi, \eta: N_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$\xi: \mathbb{R}^2 \ni (a, b) \mapsto a \in \mathbb{R}$$

$$\eta: \mathbb{R}^2 \ni (a, b) \mapsto b \in \mathbb{R}$$

と定め, $\varphi := \min(\xi, \eta, 0)$ を考える.

この場合, 例 1.4 のようにグラフを書くのは難しい. そこで, $\xi, \eta, 0$ のそれぞれが最小となる領域を見る. それは図 1.2 のようになる.

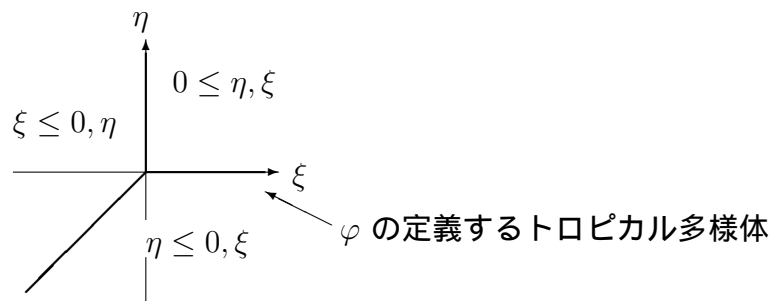


図 1.2: 各関数の最小となる領域 (例 1.5 の前半)

このように, φ の定義するトロピカル多様体を知るには, 図 1.2 のような領域の境界部分を見ればよい.

もう少し複雑な例を考えよう. 上の ξ, η に対し,

$$\varphi = \min(2\xi + 1, \xi + \eta, 2\eta + 1, \xi, \eta, 1)$$

とする. すると, 最小になる領域は図 1.3 のように分けられる. これにより, φ の定義するトロピカル多様体分かる.

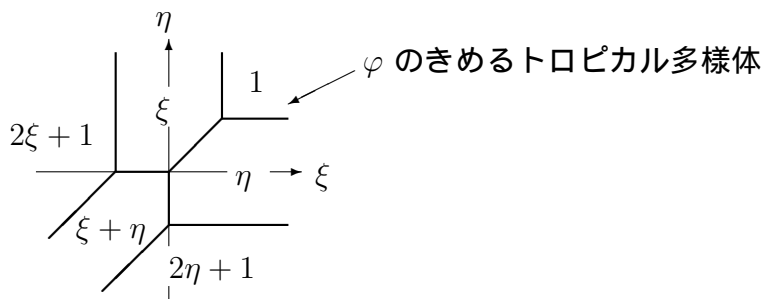


図 1.3: 各関数の最小となる領域 (例 1.5 の後半)

例 1.6. より一般に, ξ, η が例 1.5 で与えられるもののとき, $\varphi := \min(a\xi, b\eta)$ ($a, b \geq 0$) を考える. このとき, 各関数の最小となる領域及び φ の定義するトロピカル多様体は, 図 1.4 のようになる.

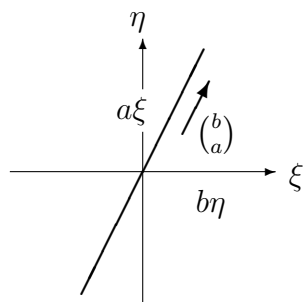


図 1.4: φ の定義するトロピカル多様体 (例 1.6)

2 トロピカル幾何の応用

トロピカル幾何の応用には次のようなものがある. 詳細は文献を参照せよ ((1) は [1], その他は [3] など).

- (1) (上のような折れ線の見方として) 扇 (fan) の退化
- (2) 曲線の数え上げ

(3) 複素構造の極限

(4) 実代数曲線, アメーバの研究

例 2.1 (アメーバの例).

$$\begin{aligned}
(\mathbb{C}^\times)^2 \supset (x + y + 1 = 0) &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\
(x, y) &\longmapsto (-\log |x|, -\log |y|)
\end{aligned}$$

により, 図 2.1 のような対応が得られる (アメーバは穴があくこともある). このア

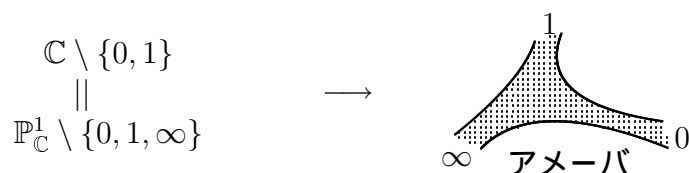


図 2.1: アメーバの例

アメーバを細めていくと, 図 1.2 のようになる.

3 トロピカル幾何 (付値論的)

K を $\mathbb{C}((t))$ の代数閉包 $\overline{\mathbb{C}((t))} = \bigcup_n \mathbb{C}((t^{1/n}))$ とする. (\mathbb{C} の代わりに代数閉体でも良い). これは, 形式的 Puiseux 級数と呼ばれる.

加法付値 $v_K: K^\times \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$v_K: K^\times \ni \sum_{i \in \mathbb{Q}} a_i t^i \longmapsto \min\{i : a_i \neq 0\} \in \mathbb{R}$$

で定める. あとの都合上 $v_K(0) := \infty$ と定め, v_K を K から $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ への写像とみなす.

写像

$$\begin{aligned}
\mathbb{R}_{\geq 0} &\longrightarrow \overline{\mathbb{R}} \\
x &\longmapsto -\log x
\end{aligned}$$

は全単射であるが, これが同相になるように, $\overline{\mathbb{R}}$ に位相を入れる.

$T := (K^\times)^r$ (r 次元代数的トーラス) とし, $v_T: T \rightarrow \mathbb{R}^r$ を

$$\begin{aligned}
v_T: T = (K^\times)^r &\xrightarrow{v_K^r} \mathbb{R}^r \\
(x_1, \dots, x_r) &\longmapsto (v_K(x_1), \dots, v_K(x_r))
\end{aligned}$$

と定める.

定義 3.1. $V \subset T$ を閉部分多様体とする.

すなわち, ある $f_1, \dots, f_s \in K[X_1^\pm, \dots, X_r^\pm]$ があって

$$V = \{(x_1, \dots, x_r) : f_i(x_1, \dots, x_r) = 0, \forall i\}$$

とする. このとき, V に付随したトロピカル多様体 V^{trop} を

$$V^{\text{trop}} := v_T(V) \text{ の } \mathbb{R}^r \text{ における閉包}$$

と定める.

V^{trop} は何か, 得体の知れないようなものに思えるかも知れないが, 次の例を見てみよう.

例 3.2. $V := \{(x, y) \in (K^\times)^2 : x + y + 1 = 0\} \subset (K^\times)^2$ のとき, V^{trop} は何か?

$x + y + 1 = 0$ というように, 3つのものをたして0なので, $(x, y) \in V$ のとき付値を見ると, $v_K(x)(=: \xi), v_K(y)(=: \eta), v_K(1) = 0$ のうち2つ以上が最小となる. よって

$$V^{\text{trop}} \subset \min(\xi, \eta, 0) \text{ のきめるトロピカル多様体}$$

がいえる. V^{trop} は閉包を取っているので, 実は “=” が成り立つ (次の命題). 従って, 答えは図 1.2 と同じであり, 図 3.1 のようになる.

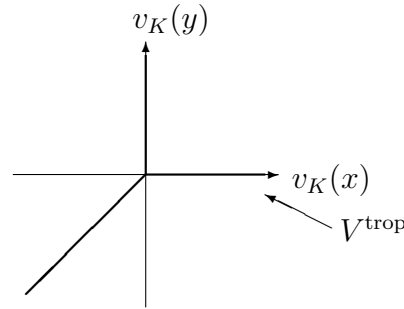


図 3.1: 例 3.2 の答え

命題 3.3. $I \subset K[X_1^\pm, \dots, X_r^\pm]$ をイデアルとする. このとき $\mathbb{V}(I)$ は閉部分多様体であるが, 次が成り立つ:

$$\mathbb{V}(I)^{\text{trop}} = \left\{ (\xi_1, \dots, \xi_r) \in \mathbb{R}^r : \begin{array}{l} \text{任意の } \sum_{m \in M} a_m x^m \in I \setminus \{0\} \text{ に対して} \\ \exists m^{(1)}, m^{(2)} \in M \ (m^{(1)} \neq m^{(2)}) \text{ s.t.} \\ v_K(a_{m^{(i)}}) + (\xi, m^{(i)}) \leq v_K(a_m) + (\xi, m) \\ (\forall m \in M, \forall i = 1, 2) \end{array} \right\}$$

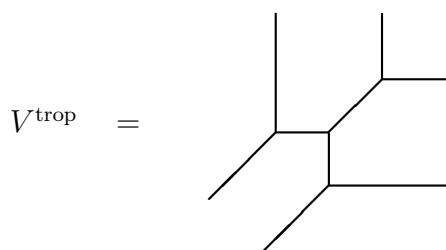
($=: \mathbb{V}^{\text{trop}}(I)$).

ただし $M = \mathbb{Z}^r$ であり, $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_r) \in \mathbb{R}^r, m = (m_1, \dots, m_r) \in M$ に対して $(\xi, m) := \sum_i \xi_i m_i$ である.

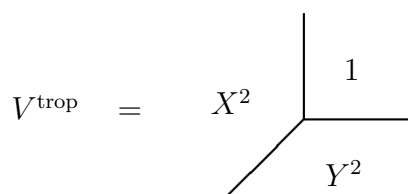
例 3.2 で説明したことは、各 monomial の大きさを比較すると、0 でない monomial があって、その中の 2 つ以上が最小値を取る、ということである。ここで、monomial $a_m x^m$ に対してその大きさというのは $v_K(a_m) + (\xi, m)$ になる。

例 3.2 で見たように、 V の定義式が 1 つのとき、 V^{trop} は $\min(\dots)$ のきめるトロピカル多様体となる。一般に、 $V(I)$ を計算するのは大変だが、トロピカルまでいくと線型不等式になって、計算できる対象となる。

例 3.4. $V := \mathbb{V}(tX^2 + XY + tY^2 + X + Y + t) \subset (K^\times)^r$ を考えると



となる。(雑にいうと、6 個の monomial があるので 6 個の領域に分かれる)。また、 $V = \mathbb{V}(X^2 + Y^2 + 1)$ のときは



となる。この場合、例 3.2 と同じであるので、 V^{trop} は情報をおとしすぎていることが分かる。

注意 3.5. [5] では \mathbb{R}^r をトロピカル affine 空間と呼んでいる。(\mathbb{R} がトロピカルな実数環だったので、 \mathbb{R}^r が affine だとナイーブには思える)。例えば $\mathbb{R}^{r+1}/\mathbb{R}(1, \dots, 1)$ が r 次元トロピカル射影空間と書いてある。実は以下で説明するように、 \mathbb{R}^r はトロピカルトーラス ($T \xrightarrow{v_K} \mathbb{R}^r$) であって $\overline{\mathbb{R}^r}$ がトロピカル affine 空間と考える方が自然であるように思われる。(トロピカルトーリック多様体もある)。

以後、 $\mathbb{P}^{2, \text{trop}}$ を考えてみよう。

まず、このような枠組みの中で、どのようにして $\mathbb{P}^{2, \text{trop}}$ を定義するかについて説明する。

T^{trop} について見ておく。 $M = \mathbb{Z}^r$ とする。

$$\begin{aligned} T &= (K^\times)^r = \text{Hom}_{K \text{ alg}}(K[M], K) \\ &= \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, K^\times) \xrightarrow{v_T} \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{R}) = N_{\mathbb{R}}. \end{aligned}$$

この $N_{\mathbb{R}}$ をトロピカルトーラスと呼びたい。

例えば,

$$\mathbb{A}_K^r := K^r = \text{Hom}_{\text{半群}}(\mathbb{N}^r, K) \xrightarrow{v_K} \text{Hom}(\mathbb{N}^r, \overline{\mathbb{R}}).$$

ただし, $\mathbb{N} = \{0, 1, \dots\}$ であり, K は積の半群とみる. このような解釈のもとで,

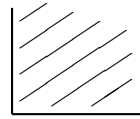
$$\mathbb{A}^{r, \text{trop}} := \text{Hom}_{\text{半群}}(\mathbb{N}^r, \overline{\mathbb{R}}) \cong \overline{\mathbb{R}}^r.$$

これは昔からあったもので ([4, Proposition 1.8]), これをトロピカルトーリック多様体とする見方ができる.

例 3.6. $\mathbb{A}^{1, \text{trop}}, \mathbb{A}^{2, \text{trop}}$ はそれぞれ次のようになる.

$$\mathbb{A}^{1, \text{trop}} = \overline{\mathbb{R}} \ (\cong \mathbb{R}_{\geq 0}) \quad \text{—————} \bullet \quad \text{半直線}$$

$$\mathbb{A}^{2, \text{trop}} = \overline{\mathbb{R}}^2$$



さて, $\mathbb{P}^{1, \text{trop}} = \mathbb{A}^{1, \text{trop}} \cup \mathbb{A}^{1, \text{trop}}$ なので

$$\mathbb{P}^{1, \text{trop}} = \bullet \longrightarrow \cup \bullet \longleftarrow = \bullet \text{—————} \bullet$$

となり, これはコンパクトである. また $\mathbb{P}^{2, \text{trop}} = \bigcup \mathbb{A}^{2, \text{trop}}$ は

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^{2, \text{trop}} &= \begin{array}{c} \begin{array}{|c|} \hline \text{shaded square} \\ \hline \end{array} \cup \begin{array}{|c|} \hline \text{shaded square} \\ \hline \end{array} \cup \begin{array}{|c|} \hline \text{shaded square} \\ \hline \end{array} \\ \text{A} \quad \text{B} \quad \text{C} \end{array} \\ &= \begin{array}{c} \text{C} \\ \diagup \quad \diagdown \\ \text{A} \quad \text{B} \end{array} \end{aligned}$$

となる. これが $\mathbb{P}^{2, \text{trop}}$ の定義である. (貼り合わせの条件は座標変換である). 同様にして, $\mathbb{P}^{3, \text{trop}}$ は四面体である.

注意 3.7. 一般に, トロピカルトーリック多様体は, 半群 \mathbb{N}^r をトーリックで使う半群に変えたものである.

$\mathbb{P}^{r, \text{trop}}$ の定義から, トーラスの中に入っていたトロピカル多様体の定義がそのまま一般化されて

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}^r & \xrightarrow{v_{\mathbb{P}^r}} & \mathbb{P}^{r, \text{trop}} \\ \cup & & \cup \\ V & \longrightarrow & V^{\text{trop}} \end{array}$$

というように, V^{trop} が自然に定義される.

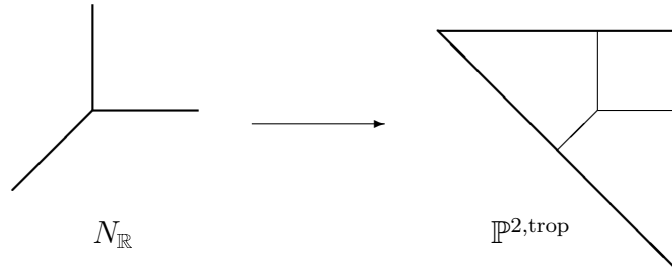


図 3.2: $x + y + 1 = 0$

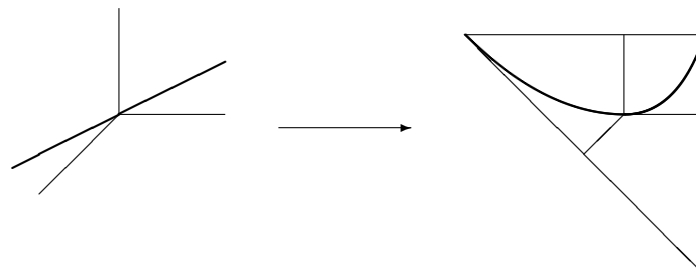


図 3.3: $X^a + Y^b$

例 3.8. $\mathbb{P}^{2,\text{trop}} \supset N_{\mathbb{R}}$ なので, $x + y + 1 = 0$ のとき, 図 3.2 のようになる. また $X^a + Y^b$ のときは, 図 3.3 のようになる.

$N_{\mathbb{R}}$ において図 3.2 の各半直線に平行なものは $\mathbb{P}^{2,\text{trop}}$ においてもそのまま, boundary に直角に交わるが, 図 3.3 のように領域の内部にはいると, $\mathbb{P}^{2,\text{trop}}$ においては boundary の角にいつてしまう.

4 Tropical Bezout Theorem on $\mathbb{P}^{2,\text{trop}}$

2 つの射影平面曲線の交点には

$$(d \text{ 次曲線}) \cdot (e \text{ 次曲線}) = \sum \text{各交点の重複度} = de$$

という関係がある (Bezout Theorem). 同じようなことを tropical でもやりたい.

図 4.1 のように $N_{\mathbb{R}}$ に含まれる 1 次元の線を 辺, 2 本以上の辺の交点を node と定義する.

定理 4.1 (Tropical Bezout Theorem [2, Corollary 4.4]). f を d 次斉次式, g を e 次斉次式とする. $\mathbb{V}^{\text{trop}}(f)$ と $\mathbb{V}^{\text{trop}}(g)$ が node でない有限個の点で交わる時,

$$\mathbb{V}^{\text{trop}}(f) \cdot \mathbb{V}^{\text{trop}}(g) = de$$

が成り立つ.

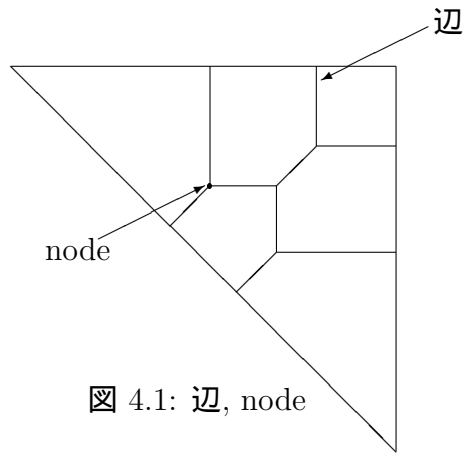


図 4.1: 辺, node

注意 4.2. [5] にもこの定理はあるが, ここでは generic な tropical curves について述べている. generic というのは, 例えば f に次数 d の全ての単項式がでてくるようなもので, この場合 boundary 上に交点は現れない. [5] では tropical \mathbb{P}^2 を boundary なしでそう呼んでいたため, 交点が boundary に現れるものは除外されていた. しかし, 例えば2つの binomial curve $X^a + X^b$, $X^c + X^d$ を考えると, 図 4.2 のようになり, 交点が boundary 上にも現れる. このような boundary 上の交

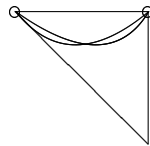


図 4.2: boundary 上の交点

点も加えて定式化したい.

なお, 茂野氏 (修士論文) は, 一般にトロピカル d 次曲線と e 次曲線との交点数が高々 de であることを示した. さらに等号成立の必要十分条件は, f や g について (変数を x, y, z として), x のみのべき, y のみのべき, z のみのべきが f, g の少なくとも一方に現れるときであることも示した. この条件は boundary に交点が現れない条件となっている.

なにはともあれ, ここでは全部できる.

定理 4.1 の証明は代数幾何に帰着させる. トロピカルな交点数と代数幾何の方の交点数とを比べて, 代数幾何の方の公式があるのでトロピカルの方も等しくなる, という流れである ([2, Section 5]). ここではこれ以上証明にはふみこまず, 定理に現れた 交点数 を定義して終わりにする.

まず, 辺に重みをつける. これは, 例 3.2 の $V = \mathbb{V}(X + Y + 1)$ と例 3.4 の $V = \mathbb{V}(X^2 + Y^2 + 1)$ のトロピカルカーブが一致していたのを, Bezout の定理では区別したいからである.

定義 4.3. 辺のとなりの領域に対応する単項式 $x^m, x^{m'}$ をとり,

$$m - m' = w \times (\text{primitive vector})$$

とかいた w をその辺の 重み とする.

例 4.4. $X^2 + Y^2 + 1, X + Y + 1$ に対して, 辺の重みは図 4.3 のようになる. 例え

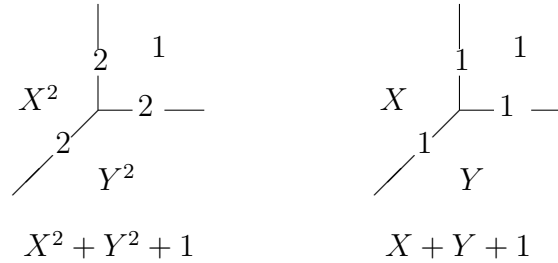


図 4.3: 辺の重み

ば, $X^2 + Y^2 + 1$ の方の X^2 と 1 がとなりあった辺については

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

なので, その重みは 2 である.

次に, 交点での 重複度 を定義する. まず, 図 4.4 のような内部での交点を考える.

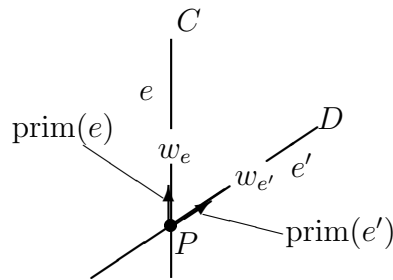


図 4.4: 交点での重複度

図 4.4 のように記号を決めたとき, C と D の交点 P での重複度 $i(C.D; P)$ を

$$\begin{aligned} i(C.D; P) &:= w_e w_{e'} |M / (\mathbb{Z} \text{prim}(e) + \mathbb{Z} \text{prim}(e'))| \\ &= w_e w_{e'} |\det(\text{prim}(e), \text{prim}(e'))| \end{aligned}$$

と定める. ここで, M は monomial の空間である. $\text{prim}(e) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, $\text{prim}(e') = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ とおけば, $i(C.D; P) = w_e w_{e'} |ad - bc|$ である.

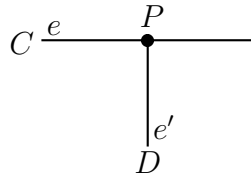


図 4.5: 边上の交点

次に, boundary 上の交点の重複度を定義する. boundary 上の交点は 2 種類ある. $\mathbb{P}^{2,\text{trop}}$ の边上の交点 (ただし頂点を除く) では, 図 4.5 のように直交するときのみである. このときは $i(C.D; P) = w_e w_{e'}$ と定める. また $\mathbb{P}^{2,\text{trop}}$ の頂点で交わる場合 (図 4.6) は, その交点の場所によって, 図 4.6 の左下の base をとりかえて (この場合は, 矢印のついた 2 つ)

$$\text{prim}(e) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \quad \text{prim}(e') = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$

と表示したとき, $i(C.D; P) = w_e w_{e'} \min(ad, bc)$ と定める.

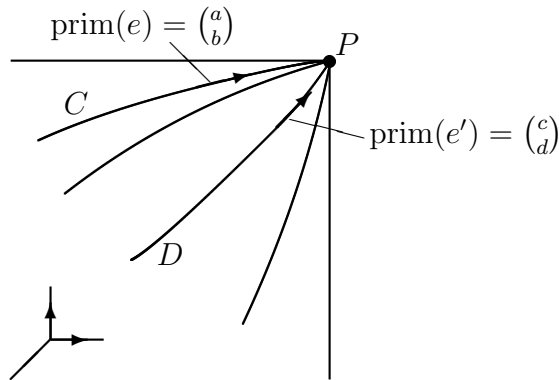


図 4.6: $\mathbb{P}^{2,\text{trop}}$ の頂点で交わる場合

定義 4.5. C と D の交点数 $C.D$ を

$$C.D = \sum_{P: \text{交点}} i(C.D; P)$$

と定める.

あとは, いくつか例を計算して定理が成り立っていることを見よう.

例 4.6. 直線と直線が交わる例を見よう. 図 4.7 の左の図では, 交点は P のみであり, そこでの重複度は

$$\left| \det \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \right| = 1.$$

よって、交点数は $1 = 1 \cdot 1$ である。また図 4.7 の右の図では、交点は boundary 上の点 Q のみである。辺の primitive vector はともに $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ であるから、 Q での重複度は 1 である。よって、交点数は 1 である。

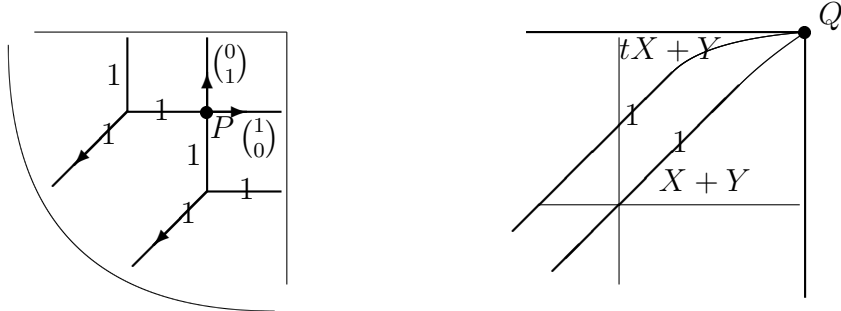


図 4.7: 直線と直線の交点

例 4.7. 次に、直線と 2 次曲線が交わる例 (図 4.8) を見てみよう。この場合交点数はともに $2 = 1 \cdot 2$ になっている。

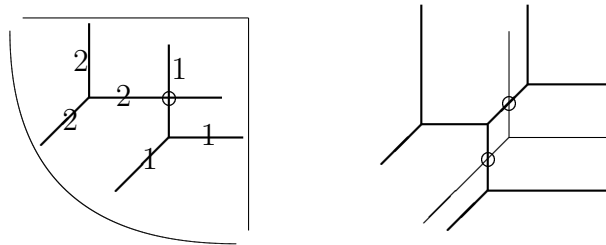


図 4.8: 直線と 2 次曲線の交点

例 4.8. もっと複雑な例を見てみよう。 $X^8 + X^4 + X^2Y + XY^2 + Y^5 + Y^8$ と $tX^2 + Y$ との交点を考えると、図 4.9 のようになり、これらは 3 点で交わる。この場合の交

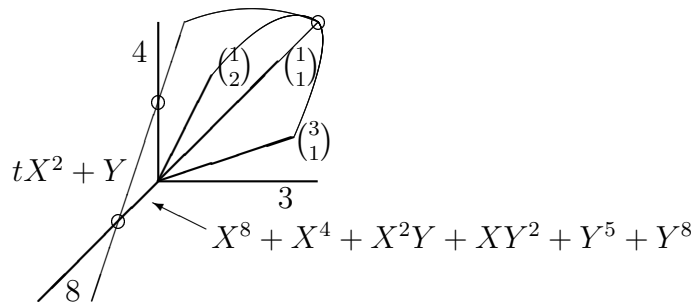


図 4.9: 複雑な例

点数を自分で計算してみよう。

例 4.9. 今度は, 図 4.10 のような $X^a + Y^b$ と $X^c + Y^d$ ($a, b, c, d \geq 0, a \geq b, c \geq b$) の交点を考えてみよう. 交点は図 4.10 の 3 点 P, Q, R であり, P での重複度は

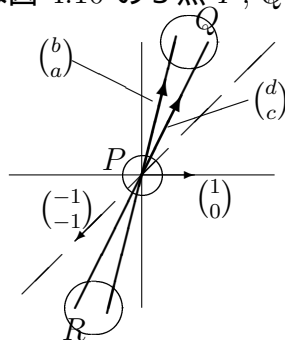


図 4.10: $X^a + Y^b$ と $X^c + Y^d$ の交点

$$\left| \det \begin{pmatrix} d & b \\ c & a \end{pmatrix} \right|,$$

Q での重複度は $\min(bc, ad)$ である. 最後に R での重複度であるが, この場合, base の取り方が

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

に変わることには注意しなければならない. この base で書き直すと,

$$\begin{pmatrix} -b \\ -a \end{pmatrix} = (a-b) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

等となるので, R での重複度が $\min((a-b)c, a(c-d))$ であることが分かる. よって, 交点数は

$$\left| \det \begin{pmatrix} d & b \\ c & a \end{pmatrix} \right| + \min(bc, ad) + \min((a-b)c, a(c-d)) = ac$$

であり, 確かに Tropical Bezout Theorem が成立している.

参考文献

- [1] T. Kajiwar, Tropical hypersurfaces and degeneration of projective toric varieties, 城崎代数幾何学シンポジウム報告集 2005
- [2] T. Kajiwar, Tropical toric varieties, preprint
- [3] G. Mikhalkin, Enumerative tropical algebraic geometry in \mathbb{R}^2 , math.AG/0312530

- [4] T. Oda, Convex bodies and algebraic geometry, *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete 3. Folge · Band 15*, Springer-Verlag, Berlin, 1988
- [5] J. Richter-Gebert, B. Sturmfels, and T. Theobald, First steps in tropical geometry, *Idempotent mathematics and mathematical physics*, 289–317, *Contemp. Math.*, 377, Amer. Math. Soc., Providences, RI, 2005
- [6] D. Speyer and B. Sturmfels, Tropical mathematics, [math.CO/0408099](https://arxiv.org/abs/math/0408099)