複素鏡映群に付随した Green 関数について

庄 司 俊 明

§1. Green 関数とは何か

Green 関数は, 有限体 $\mathbf{F}_q$ 上の一般線形群 $GL_n(\mathbf{F}_q)$ の表現論に関連して 1955 年 J.A. Green [G] により導入された. Green は組合せ論的な手法で (Green 関数と現在呼ばれる) 多項式系を構成し, $GL_n(\mathbf{F}_q)$ の既約指標の値がそれらの関数によって記述されることを示した. Green 関数の発見により $GL_n(\mathbf{F}_q)$ の既約指標を計算する統一的なアルゴリズムが得られたわけで, その意味で $GL_n(\mathbf{F}_q)$ の指標理論の核心は Green 関数にあると言っても過言ではないだろう.

斜交群 $Sp_{2n}(\mathbf{F}_q)$ や, 直交群 $SO_n(\mathbf{F}_q)$ などの有限古典群は, $GL_n(\mathbf{F}_q)$ とよく似た構造を持つ. しかし, Green の結果を拡張してこれらの有限群の既約指標を記述する問題, 特に Green 関数をどのように定義するか, についてはその後 20 年にわたる暗中模索の時代があった. そして 1976 年 Deligne と Lusztig [DL] が一般の有限 Chevalley 群 $G(\mathbf{F}_q)$ に対し, l-進 cohomology 群を利用して非常に良い性質を持った表現のクラス $R_T^G(\theta)$ (Deligne-Lusztig の一般表現と呼ばれる) を構成することに成功した. さらに, 彼らは $R_T^G(\theta)$ の指標の巾単元への制限として Green 関数 Q_T^G を定義し, $R_T^G(\theta)$ の指標の計算が Green 関数の計算に帰着されることを示した. $G(\mathbf{F}_q)$ の既約指標の分類は 1980 年代に Lusztig によって完成されたが, その主要な道具となったのが 一般表現 $R_T^G(\theta)$ である. たとえば $GL_n(\mathbf{F}_q)$ の場合, その既約指標はすべて $R_T^G(\theta)$ の指標の簡単な一次結合で表される. 他の有限簡約群に関しては事情はもっと複雑になるが, やはり $R_T^G(\theta)$ の指標から多くの既約指標が得られる. これらのことから, 有限 Chevalley 群の表現論において Green 関数の決定が非常に重要な問題となるのである.

しかし, l-進 cohomology 群上で表現の跡を調べるのは一般に難しい問題である. Green 関数をその本来の定義から直接計算することも不可能に近い. ところが, Lusztig は Green 関数がある種の交差 cohomology 群の特性関数として幾何的な表示を持つことを示した. (表現の幾何的実現ではなく, 関数の幾何的実現であることに注意!!) これより Green 関数がある簡単な行列方程式の解として一意的に定まることが導かれるのである. 同時にそれは Green 関数を具体的に計算するアルゴリズムをも与える. このアルゴリズムにより, 例外群 $G(\mathbf{F}_q)$ の Green 関数は現在すべて計算されている. 本来 $GL_n(\mathbf{F}_q)$ の Green 関数は具体的で, 構成的なものであった. それが Deligne-Lusztig により一般化され, 抽象化された. そしてさらなる抽象化の後に, これ以上ない具体的な姿を持って戻って来たのである. そこに数学における抽象化と具象化の絶え間ない循環を見る思いがする.

さて, 例外群についてはとにかく計算してしまえば勝ちということもできるが (これもコンピュータの性能が E_8 の Green 関数の巨大さを上回ったおかげだが), 古典群についてはそうはいかない. 無限系列の群に対してアルゴリズムは無力である. 誰も $n = 1000$ に対して $Sp_{2n}(\mathbf{F}_q)$ の Green 関数を計算しようとは思わない. しかし $GL_n(\mathbf{F}_q)$ の場合 Green 関数の組合せ論的な記述は, アルゴリズム以上の情報を与えていることを思い出そう. 人はそこから様々な役に立つ性質を導き出してきた. 本来古典群は, GL_n の親類のようなものであり, 多くの性質が GL_n の組合せ論の枠組みの中で記述されている. 古典群の Green 関数についても, そのような組合せ論的な構成が望ましいであろう. 現在, Green 流の組合

せ論的な Green 関数の構成と, Lusztig 流の幾何的な構成との間には大きなギャップがあるように思われる. この小論では, そのギャップを埋めるための一歩として, 筆者による古典群の Green 関数に対する組合せ論的な構成の試みを紹介したい. そして、それは "n の分割 " という概念によって統制される A_n 型の組合せ論を他の型に拡張する試みでもある.

§2. 複素鏡映群がなぜ登場するのか

この小論のもう一つの目的は, Green 関数の理論をある種の複素鏡映群にまで拡張することにある. Green 関数は Chevalley 群に関係しているので Weyl 群が表れるのは当然として, なぜここで唐突に複素鏡映群が出て来なければならないのだろうか. 原田耕一郎氏が論説 [H] に書いておられるように, 有限 Chevalley 群 $G(\mathbf{F}_q)$ はその型 (と次元) を決めれば一科無限種, 骨格を決めているのは Weyl 群であり, $\mathbf{F}_q$ (種) の違いは肉付きの違い, やせているか太っているかの違いでしかない. この間の事情は指標表においてさらに際だって来る. 例えば, $GL_n(\mathbf{F}_q)$ の Weyl 群は対称群 S_n に一致し, その共役類, 既約指標は共に n の分割によって自然にパラメトライズされる. したがって S_n の指標表は n の分割によって完全に統制される. そして Green 関数は n の分割で定まる q の多項式になる. $GL_n(\mathbf{F}_q)$ の指標表が Green 関数によって記述されるという意味では, $GL_n(\mathbf{F}_q)$ の指標表は, n の分割 と q で決ってしまうのである (非常に大雑把な言い方だが).

ここで複素鏡映群 $W = G(e, 1, n)$ を考えよう. W は S_n と $(\mathbb{Z}/e\mathbb{Z})^n$ の半直積であり, $e = 1$ のとき S_n、$e = 2$ のときには, B_n 型の Weyl 群と同型になる. 従って, W は古典群 $Sp_{2n}(\mathbf{F}_q)$ や $SO_{2n+1}(\mathbf{F}_q)$ と非常に良く似た骨格を持っており, 近縁種 (科 ?) と考えられる. しかし残念ながら W を Weyl 群 (骨格) に持つような有限群 $G(\mathbf{F}_q)$ (個体) は存在しない. 複素鏡映群 W はかつて地球上に存在し, 現在は骨格の化石しか残っていない恐竜のようなものではないだろうか. 我々は, 琥珀に封じ込められた蚊の体液から恐竜を復元するように, わずかな兆候を集めて W の個体を復元 (?) しようとしているのである.

複素鏡映群が市民権を得たのは, Shephard-Todd [ST] による複素鏡映群の分類が完成した 1954 年であった. 1955 年 には先に述べた Green の記念碑的な論文 [G] が出版され, また同じ年に有限 Chevalley 群の統一的な構成を高らかに宣言した Chevalley の論文 [C] が出ている. この時期に役者がそろったわけである. しかし, 複素鏡映群が Weyl 群, あるいは実鏡映群と祖先を同じくする近縁種であること, 従って $G(\mathbf{F}_q)$ に由来する表現論的な特性を豊富に持っていることが認識され始めたのは 90 年代に入ってからに過ぎない. そのきっかけとなったのは, 有木-小池 [AK] による複素鏡映群 $G(e, 1, n)$ に付随する Hecke 代数 (Ariki-Koike 代数と呼ばれる) の構成であった. 本来の Hecke 代数は Weyl 群の群環をパラメータ q で拡張したものであり, 有限 Chevalley 群 $G(\mathbf{F}_q)$ の表現論において重要な働きをする. ($G(\mathbf{F}_q)$ と W の間の半肉付き状態と思えばいいだろうか.) 折しも $G(\mathbf{F}_q)$ の modular 表現論との関係で, 複素鏡映群に付随した Hecke 代数の存在を確信していた パリの Broué のグループがこれに呼応して精力的な研究を進め, 複素鏡映群 W に付随した形式的な "群" $G_W(q)$ (ここでは, q は不定元) の存在が浮かび上がって来たのだった. 現在では, $G(\mathbf{F}_q)$ の既約指標の性質で, Weyl 群のみによって記述されるものは、かなりの程度に $G_W(q)$ についても確かめられている. 例えば, $G(\mathbf{F}_q)$ の既約指標の中に巾単指標といわれる重要なクラスがある. 巾単指標の分類は完全に Weyl 群 (より正確には Hecke 代数) の指標の性質で定まり, その次数 (q の多項式として表される, 生成次数といわれる) も Hecke 代数の解析から得られる. Broué のグループは巾単指標の分類理論が, 多くの複素鏡映群のクラスに対しても形式的

に拡張され, $G_W(q)$ の “巾単指標” が定義されることを示し, その生成次数を決定した. 実際, それは Lusztig が $G(\mathbf{F}_q)$ の既約表現の分類の際に, 非結晶型実鏡映群 H_3, H_4 (これらの群を Weyl 群に持つ $G(\mathbf{F}_q)$ は存在しない) に対して既に実行していたことであった. Lusztig はその結果を 10 年近く未発表のままににしていたのだが, Broué 等の本 [BMM] の付録として公表した ([L1]). 次の文章はその冒頭の一節である.

It should be noted that the “results” below (which were obtained in 1980-1982, except for those in 4.2) are not theorems in the accepted sense; rather, they are an indication of a not yet discovered theory. A rigorous treatment of these matters and an explanation of their meaning remain to be found.

それから 10 年近くが経ち, Lusztig の感じたためらいは過去のものとなったようだ. 今や, 人々は複素鏡映群について声高に語り, 膨大なデータが蓄積されつつある. しかし, その証明は個別の議論が多く, まだまだ Weyl 群の場合のような 完成された理論の域には達していない.

さて我々の夢は $G_W(q)$ の指標表を作りあげることにある. $G_W(q)$ は形式的な対象であり, もちろん群構造を持たない. それを W の個体 (= 肉体) というのは無理がある. しかし $G_W(q)$ の指標表は W の個体としての資格を十分に持っているだろう. 表現論研究者にとっては, “群よりも表現が大事” なのだから. $G_W(q)$ の巾単指標の分類ができ次数が定まったとすると, 次のステップとしてその指標の巾単類での値を考えるのが自然だろう. しかし, 一般の $G_W(q)$ に対して巾単類を合理的に定義する方法は知られていない. 有限 Chevalley 群の場合でも巾単類は Weyl 群だけでは定まらず, その振舞いは複雑である. たとえば, $Sp_{2n}(\mathbf{F}_q)$ と $SO_{2n+1}(\mathbf{F}_q)$ は同じ Weyl 群を持つが, 巾単類は異なる. よく知られているように, $GL_n(\mathbf{F}_q)$ の巾単類は S_n の既約指標と同じく n の分割 λ によって記述される. 一方, B_n 型 Weyl 群の既約指標は, $|\lambda^{(0)}| + |\lambda^{(1)}| = n$ を満たす分割の組, $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda^{(0)}, \lambda^{(1)})$ と 1 対 1 に対応するが, 巾単類はそうはならない. Lusztig [L2] は 有限古典群の巾単類を記述するために, 分割の概念の拡張として巾単 symbol を導入し た. 巾単 symbol は群に (その標数にも) 依存する. $Sp_{2n}(\mathbf{F}_q)$ と $SO_{2n+1}(\mathbf{F}_q)$ では異なる巾単 symbol が使われるのである.

ここでふたたび Green 関数に戻る. 注目すべきことは, 古典群の Green 関数を決定する行列方程式は, Weyl 群の指標と巾単 symbol の組合せ論的な性質により完全に記述できることである. A_n 型の場合の分割の概念がここでは巾単 symbol の概念に置き換わる. さて, 複素鏡映群 $W = G(e, 1, n)$ の既約指標は e 個の分割の組 $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda^{(0)}, \ldots, \lambda^{(e-1)})$ で, $\sum_i |\lambda^{(i)}| = n$ となるものと 1 対 1 に対応する. そして巾単 symbol の変形として e-symbol が定義される. e-symbol は $G_W(q)$ の巾単類を表していると思ってもよい. このような e-symbol に対しても, 古典群の場合と同様に行列方程式が定式化できる. その解を複素鏡映群 $G(e, 1, n)$ に付随する Green 関数と呼ぶことにしよう. 以下では, このようにして得られる $G_W(q)$ の Green 関数に対する組合せ論的な構成を試みる. 組合せ論的な議論では群 $G(\mathbf{F}_q)$ は表に現れず q のみがパラメータとして入ってくる. このような状況では, $e = 2$ (B_n-型 Weyl 群の場合) に制限する必然性はなく, 一般の e で議論した方が見通しがよくなるのである.

§3. $GL_n(\mathbf{F}_q)$ の Green 関数

ここから本論に入る. 最初に Macdonald の教科書 [M] にしたがって, $GL_n(\mathbf{F}_q)$ の Green 関数の構成を復習しておこう. 変数 $x_1, \ldots, x_m$ に関する $\mathbb{Z}$ 上の多項式環 $\mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_m]$ に対称群 S_m が変

数の置換として作用する．S_m 不変な多項式 ($=$ 対称式) の全体 $\Lambda_m = \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_m]^{S_m}$ は次数付き環 $\Lambda_m = \bigoplus_{n\geq 0} \Lambda_m^n$ になる．ここに Λ_m^n は n 次の斉次対称式で張られる $\mathbb{Z}$ 加群を表す．$\mathcal{P}_n(m)$ を n の分割 λ の全体の集合とする．ただし，$\lambda \in \mathcal{P}_n(m)$ が n の分割とは，$\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in \mathbb{Z}^m$ で $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_m \geq 0$, $\sum_{i=1}^m \lambda_i = n$ をみたすものとし，$|\lambda| = n$ を分割 λ のサイズという．(通常の分割の定義では，$\lambda_i > 0$ とすることが多いが，ここでは列 $\{\lambda_i\}$ の後ろに 0 を補って，$\lambda \in \mathbb{Z}^m$ となるようにしておく.) Λ_m^n は階数 $|\mathcal{P}_n(m)|$ の自由 $\mathbb{Z}$ 加群になることが知られている．Λ_m^n にはいくつかのよい基底が存在する．まず Schur 関数を定義しよう．$\alpha = (\alpha_1, \ldots \alpha_m) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^m$ に対し，

$$a_\alpha(x) = a_\alpha(x_1, \ldots, x_m) = \sum_{w \in W} \varepsilon(w) w(x^\alpha)$$

とおく．ただし，$\varepsilon(w)$ は $w \in S_n$ の符号を表し，$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \ldots x_m^{\alpha_m}$ である．$a_\alpha(x)$ は x の交代式になり，特に $\alpha = \delta = (m-1, m-2, \ldots, 1, 0)$ の場合，$a_\delta(x) = \prod_{i<j}(x_i - x_j)$ は Vandermonde の行列式に一致する．交代式の性質から，$a_\alpha(x)$ は常に $a_\delta(x)$ で割り切れる．$\lambda \in \mathcal{P}_n(m)$ に対し **Schur** 関数 $s_\lambda(x)$ を $s_\lambda(x) = a_{\lambda+\delta}(x)/a_\delta(x)$ によって定義する．定義から $s_\lambda(x) \in \Lambda_m^n$ であり，$\{s_\lambda(x) \mid \lambda \in \mathcal{P}_n(m)\}$ が Λ_m^n の基底になることが確かめられる．

次に巾和対称関数を定義する．整数 $r \geq 1$ に対し，$p_r(x) = \sum_{i=1}^m x_i^r$, $p_0(x) = 1$ とおく．$\lambda \in \mathcal{P}_n(m)$ に対し，$p_\lambda(x) = \prod_{i=1}^m p_{\lambda_i}(x)$ を巾和対称関数 という．$\{p_\lambda(x) \mid \lambda \in \mathcal{P}_n(m)\}$ は $\mathbb{Q}$ ベクトル空間 $\mathbb{Q} \otimes \Lambda_m^n$ の基底になる．

多くの局面で，変数の個数 m を制限せず十分大きく取っておいた方が議論がしやすい．Schur 関数は $s_\lambda(x_1, \ldots, x_m, 0) = s_\lambda(x_1, \ldots, x_m)$ なる性質を持っているので，個数を変えても $s_\lambda(x)$ が意味を持つ．ただし，等式の前半は $m+1$ 個の変数に関する Schur 関数に $x_{m+1} = 0$ を代入したもの，後半は m 個の変数に関する Schur 関数を表す．同様のことは $p_\lambda(x)$ についても成立する．この辺の事情をはっきりさせるために，対称関数の概念を導入する．整数 $m \geq m'$ に対し準同型 $\mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_m] \to \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_{m'}]$ を $x_i \mapsto 0$ $(i > m')$, $x_i \mapsto x_i$ $(i \leq m')$ により定義する．それを対称式の環に制限することにより，全射準同型 $\rho_{m,m'}^n : \Lambda_m^n \to \Lambda_{m'}^n$ が得られる．$\rho_{m,m'}^n$ に関する射影極限 $\varprojlim \Lambda_m^n$ を Λ^n と表わす．$\Lambda = \bigoplus_{n\geq 0} \Lambda^n$ には自然に環構造が入る．これを対称関数の環という．前の議論から，$s_\lambda(x), p_\lambda(x)$ は Λ^n の元と見ることができる．n を固定したとき，$m \geq n$ ならば $\mathcal{P}_n(m)$ は m に関係しない．これを $\mathcal{P}_n$ とおくとき，$\{s_\lambda \mid \lambda \in \mathcal{P}_n\}, \{p_\lambda \mid \lambda \in \mathcal{P}_n\}$ がそれぞれ，$\mathbb{Z}$ 加群 Λ^n, $\mathbb{Q}$ 空間 $\mathbb{Q} \otimes \Lambda^n$ の基底を与える．

対称関数 $s_\lambda(x), p_\mu(x)$ は次の意味で S_n の表現論と密接に関係する．S_n の共役類は各元の巡回置換分解を通じて n の分割と 1 対 1 に対応する．$\mu \in \mathcal{P}_n$ に対応する S_n の共役類の代表元 を w_μ と表す．また，$\lambda \in \mathcal{P}_n$ に対応する S_n の既約指標を χ^λ と表す．分割 (n) に対応するのが単位指標，分割 (1^n) に対応するのが符号指標である．このとき，次の Frobenius の公式が成り立つ．

(Forbenius の公式) $\lambda, \mu \in \mathcal{P}_n$ に対し，

$$p_\mu(x) = \sum_{\lambda \in \mathcal{P}_n} \chi^\lambda(w_\mu) s_\lambda(x). \tag{3.1}$$

特に，S_n の指標表は，$\mathbb{Q} \otimes \Lambda^n$ の基底，$\{s_\lambda(x)\}, \{p_\mu(x)\}$ の間の遷移行列として表される．

次に Hall-Littlewood 関数を定義しよう. $t, x_1, \dots, x_m$ を変数として $\lambda \in \mathcal{P}_n(m)$ に対し,

$$P_\lambda(x;t) = v_\lambda(t)^{-1} \sum_{w \in S_m} w\left(x_1^{\lambda_1} \cdots x_m^{\lambda_m} \prod_{i<j} \frac{x_i - t x_j}{x_i - x_j} \right) \tag{3.2}$$

とおく. ここに, $v_{\lambda(t)}$ は $r \geq 1$ に対し, $v_r(t) = \prod_{j=1}^r (1-t^j)/(1-t)$, $v_0(t) = 1$ とするとき, $v_\lambda(t) = \prod_{i=1}^m v_{\lambda_i}(t)$ で与えられる多項式である. $P_\lambda \in \mathbb{Z}[t] \otimes_{\mathbb{Z}} \Lambda_m^n$ であることが分かる. $P_\lambda(x;t)$ を λ に付随する **Hall-Littlewood 関数** という. Schur 関数の場合と同様に, $P_\lambda(x;t)$ を $\mathbb{Z}[t]$ 係数の無限変数 $x_1, x_2, \dots$ に関する関数とみなすことができる. このとき, $\{P_\lambda \mid \lambda \in \mathcal{P}_n\}$ が $\mathbb{Z}[t] \otimes_{\mathbb{Z}} \Lambda^n$ の基底になる. また, $P_\lambda(x;0) = s_\lambda(x)$ が成り立つ. したがって, Hall-Littlewood 関数を Schur 関数の t 変形とみることもできる.

ここで, $\mathcal{P}_n$ に半順序 $\lambda \leq \mu$ を入れる. 十分大きい m に対して, $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m), \mu = (\mu_1, \dots, \mu_m)$ とおき, $\sum_{i=1}^r \lambda_i \leq \sum_{i=1}^r \mu_i$ が $r = 1, \dots, m$ に対して成立するとき, $\lambda \leq \mu$ と定義する. $GL_n(\overline{\mathbf{F}}_q)$ ($\overline{\mathbf{F}}_q$ は $\mathbf{F}_q$ の代数的閉包) の巾単類は Jordan 標準形を通じて $\mathcal{P}_n$ と 1 対 1 に対応する. C_λ を λ に対応する巾単類とすると, 上に定義した半順序は巾単類の閉包の包含関係 $\overline{C}_\lambda \subseteq \overline{C}_\mu$ から得られる半順序に一致する.

$\{s_\lambda\}, \{P_\mu\}$ は共に $\mathbb{Z}[t] \otimes \Lambda^n$ の基底をなす. そこで $s_\lambda(x)$ は $P_\mu(x;t)$ の線形結合として

$$s_\lambda(x) = \sum_{\mu \in \mathcal{P}_n} K_{\lambda,\mu}(t) P_\mu(x;t) \tag{3.3}$$

と表される. $K_{\lambda,\mu}(t) \in \mathbb{Z}[t]$ であり, $K_{\lambda,\lambda}(t) = 1$, $\lambda \geq \mu$ でなければ $K_{\lambda,\mu}(t) = 0$ となることが知られている. $K_{\lambda,\mu}(t)$ を **Kostka 多項式** という.

ここで $\lambda \in \mathcal{P}_n$ を $\lambda = (\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_r > 0)$ と表し ($\lambda_i > 0$ となる λ_i のみを考える), $n(\lambda) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ を

$$n(\lambda) = \sum_{i=1}^r (i-1)\lambda_i \tag{3.4}$$

により定義する. $\lambda \leq \mu$ ならば $n(\mu) \leq n(\lambda)$ となることに注意する. $\widetilde{K}_{\lambda,\mu}(t) = t^{n(\mu)} K_{\lambda,\mu}(t^{-1})$ とおく. $\deg K_{\lambda,\mu}(t) = n(\mu) - n(\lambda)$ が成り立つので, $\widetilde{K}_{\lambda,\mu}(t) \in \mathbb{Z}[t]$ となる. $\widetilde{K}_{\lambda,\mu}(t)$ を **modified Kostka 多項式** という. (3.3) で, $s_\lambda(x)$ を $p_\rho(x)$ で置き換えて,

$$p_\rho(x) = \sum_{\mu \in \mathcal{P}_n} X_{\rho,\mu}(t) P_\mu(x;t) \tag{3.5}$$

とおけば, Frobenius の公式 (3.1) と (3.3) より $X_{\rho,\mu}(t) = \sum_{\lambda \in \mathcal{P}_n} \chi^\lambda(w_\rho) K_{\lambda,\mu}(t)$ を得る. $Q_\rho^\mu(t) = t^{n(\mu)} X_{\rho,\mu}(t^{-1})$ とおくと, $Q_\rho^\mu(t) \in \mathbb{Z}[t]$ となる. この $Q_\rho^\mu(t)$ が Green の導入した **Green 多項式** (=Green 関数) である. Green 関数の主要な性質である直交関係式を導いてみよう. 無限個の変数 $x_1, x_2, \dots, y_1, y_2, \dots$ に対して無限積

$$\Omega(x, y; t) = \prod_{i,j} (1 - t x_i y_j)/(1 - x_i y_j) \tag{3.6}$$

を考える. $\Omega(x,y;t)$ を **Cauchy** の再生核という. Cauchy の再生核の重要性は次の展開式にある.

$$\Omega(x,y;t)=\sum_{\lambda} z_\lambda(t)^{-1}p_\lambda(x)p_\lambda(y)=\sum_{\lambda} b_\lambda(t)P_\lambda(x;t)P_\lambda(y;t). \tag{3.7}$$

ここで λ は全てのサイズの分割を動く. また, $z_\lambda=|Z_W(w_\lambda)|$ とおくとき,

$$z_\lambda(t)=z_\lambda\prod_{i\geq 1}(1-t^{\lambda_i})^{-1} \tag{3.8}$$

である. $b_\lambda(t)\in\mathbb{Z}[t]$ も具体的に表せるがここでは省略する.

さて (3.7) 式で, x に関して次数 n^2 の項を比較して,

$$\sum_{|\rho|=n} z_\rho(t)^{-1}p_\rho(x)p_\rho(y)=\sum_{|\lambda|=n} b_\lambda(t)P_\lambda(x;t)P_\lambda(y;t).$$

(3.5) 式を p_ρ に代入して, $P_\lambda(x;t)P_\lambda(y;t)$ の項を比較すると,

$${}^tX(t)Z(t)^{-1}X(t)=B(t) \tag{3.9}$$

を得る. ただし, $X(t)=(X_{\rho,\mu}(t))$ は $X_{\rho,\mu}(t)$ を成分とする $|\mathcal{P}_n|$ 次の行列, ${}^tX(t)$ はその転置行列, $Z(t),B(t)$ はそれぞれ, $z_\lambda(t),b_\lambda(t)$ を $\lambda\lambda$ 成分とする対角行列を表す. $X(t),Z(t),B(t)$ は正則だから, 両辺の逆行列を取ることにより,

$$X(t)B(t)^{-1\,t}X(t)=Z(t). \tag{3.10}$$

(3.9), (3.10) を成分ごとに書き下し, $Q_{\lambda,\mu}(t)$ に置き換えたものが Green 関数の直交関係に他ならない. たとえば, (3.10) より,

$$\sum_{|\lambda|=n} a_\lambda(t)^{-1}Q^\lambda_\rho(t)Q^\lambda_\mu(t)=\delta_{\rho,\mu}y_\rho(t) \tag{3.11}$$

が得られる. ただし, $a_\lambda(t)=t^{|\lambda|+2n(\lambda)}b_\lambda(t^{-1})$, $y_\rho(t)=t^{-|\rho|}z_\rho(t^{-1})$ である. また, (3.9) において $X(t)$ を S_n の指標表を使って, $\widetilde{K}(t)=(\widetilde{K}_{\lambda,\mu}(t))$ の式に変換すれば,

$$\widetilde{K}(t)B'(t)^t\widetilde{K}(t)=Z'(t) \tag{3.12}$$

の形に変形されることにも注意しておく. 半順序 $\lambda\leq\mu$ と両立するように $\mathcal{P}_n$ の全順序を選んでおけば, 対応する行列は, $\widetilde{K}(t)$ が下三角行列で $\lambda\lambda$ 成分は $t^{n(\lambda)}$, $B'(t)$ は対角行列, また, $Z'(t)$ は $Z(t)$ を S_n の指標表で変形した行列になる.

本節の最後に $GL_n(\mathbf{F}_q)$ の表現論との関係を述べておこう. $B(\mathbf{F}_q)$ を上半三角行列全体のなす $GL_n(\mathbf{F}_q)$ の部分群とする. $B(\mathbf{F}_q)$ の単位表現からの誘導表現 $\mathrm{Ind}_{B(\mathbf{F}_q)}^{G(\mathbf{F}_q)}1$ の分解に表れる既約表現は S_n の既約指標と 1 対 1 に対応する. χ^λ に対応する $GL_n(\mathbf{F}_q)$ の既約指標を ρ_λ と表す. また $GL_n(\mathbf{F}_q)$ の巾単類も $\mathcal{P}_n$ と 1 対 1 に対応し, $\mu\in\mathcal{P}_n$ に対応する巾単類の代表元を u_μ とする. このとき,

$$\rho_\lambda(u_\mu)=\widetilde{K}_{\lambda,\mu}(q) \tag{3.13}$$

が成り立つ. すなわち, modified Kostka 関数が既約指標の巾単類での値を記述するのである.

注意 **3.1.** Schur 関数, 巾和対称関数, Hall-Littlewood 関数は全て n の分割の集合 $\mathcal{P}_n$ によってパラメトライズされている. しかし, 集合 $\mathcal{P}_n$ はそれぞれの場合に異なる意味を持ち, それに伴って関連する対称関数の持つ意味も異なる. Frobenius の公式が示すように, Schur 関数は S_n の既約指標の性質を反映し, 巾和対称関数は S_n の共役類の性質を反映する. また, (3.3) と (3.13) が示唆するように, Hall-Littlewood 関数は $GL_n(\mathbf{F}_q)$ の巾単類を反映していると見るべきだろう. この特徴付けは後に他の古典群に対して対称関数を考えるとき重要になる.

§4. 有限 Chevalley 群の Green 関数

この節では, 有限 Chevalley 群の Green 関数とそれを計算するためのアルゴリズムについて説明する. なお, 同様のテーマについての解説記事を以前 [S1] に書いた. この節では細部は省略してあるが, より詳しい話に興味のある方は [S1] を参照して頂きたい.

G を有限体 $\mathbf{F}_q$ 上定義された連結な簡約代数群, $F : G \to G$ を対応する Frobeniusu 写像とする. G の $\mathbf{F}_q$-有利点のなす有限群 $G(\mathbf{F}_q)$ は G の F-不動点のなす部分群 G^F に一致する. $B_0 \supset T_0$ を G の F-不変な Borel 部分群と F-不変な極大トーラスの組とする. このような組は G^F-共役を除いて一意的に定まる. $W = N_G(T_0)/T_0$ を G の Weyl 群とすると, F は自然に W に作用する. 以下 G^F が有限 Chevalley 群の場合, すなわち F が W に自明に作用する場合を考える. l 進 cohomology を利用するために, 表現は全て $\bar{\mathbf{Q}}_l$ 上で考える. T を G の F 不変な極大トーラス, $\theta : T^F \to \bar{\mathbf{Q}}_l^*$ を準同型とするとき, 組 (T, θ) に対して, Deligne-Lusztig の一般表現 $R_T^G(\theta)$ が定義される. G^F の巾単元 u に対して $\mathrm{Tr}\,(u, R_T^G(\theta)) = Q_T^G(u)$ とおく. G^F の巾単元の集合 G^F_{uni} 上の G^F-不変な関数 Q_T^G を G^F の **Green** 関数という. Q_T^G は θ の選び方によらない. また, T と T' が G^F-共役ならば, $Q_T^G = Q_{T'}^G$ である. 次の指標公式により, $R_T^G(\theta)$ の指標の計算は G の簡約部分群 $Z_G^0(s)$ に関する Green 関数の計算に帰着される.

(指標公式) $g = su = us \in G^F$, $s, u \in G^F$ はそれぞれ半単純元, 巾単元とする. このとき,

$$\mathrm{Tr}\,(g, R_T^G(\theta)) = |Z_G^0(s)^F|^{-1} \sum_{\substack{x \in G^F \\ x^{-1}sx \in T^F}} Q_{xTx^{-1}}^{Z_G^0(s)}(u)\theta(x^{-1}sx). \tag{4.1}$$

$R_T^G(\theta)$ 達の内積は簡単な式 (直交関係式) によって表すことができる. それを利用して, 数多くの θ に対して $\pm R_T^G(\theta)$ が既約になることが分かる. また, G^F の既約指標は必ずどれかの $R_t^G(\theta)$ の分解に表れる. このことから, $R_T^G(\theta)$ を利用して G^F の既約指標のおおまかな類別をすることができる. $R_T^G(1)$ ($\theta = 1$ の場合) の既約成分として表れる既約指標を巾単指標という. 巾単指標の全体は一つの類をなし, ある意味で共役類の中における巾単類の役割を果たす.

さて, $R_T^G(\theta)$ の直交関係式と指標公式を組み合わせて次の Green 関数の直交関係式を得る.

(Green 関数の直交関係)

$$|G^F|^{-1} \sum_{u \in G^F_{\mathrm{uni}}} Q_T^G(u) Q_{T'}^G(u) = \begin{cases} |W(T)^F|/|T^F| & T = T' \text{ の場合,} \\ 0 & T \text{ と } T' \text{ が } G^F\text{-共役でない場合.} \end{cases} \tag{4.2}$$

ただし, $W(T) = N_G(T)/T$ である.

G^F が有限 Chevalley 群の場合, G の F-不変な極大トーラスの G^F-共役類は W の共役類と 1 対 1 に対応する. 各 $w \in W$ に対して対応する F 不変な極大トーラス (G^F-共役を除いて定まる) を T_w と表

わす. $w=1$ のとき, $T_w=T_0$ である. $W^\wedge$ を W の既約指標の集合とする. 各 $\chi\in W^\wedge$ に対して,

$$Q_\chi=|W|^{-1}\sum_{w\in W}\chi(w)Q^G_{T_w}$$

により, G^F_{uni} 上の関数 Q_χ を定義する. すべての $w\in W$ に対して, $Q^G_{T_w}$ を決定することと, すべての $\chi\in W^\wedge$ に対して、Q_χ を決定することは同値である.

注意 **4.1.** $G^F=GL_n(\mathbf{F}_q)$ の場合, ここで定義した Green 関数, etc. は 3 節で与えた Green 多項式, modified Kostka 多項式に $t=q$ を代入したものに一致する. すなわち,

$$Q^G_{T_{w_\rho}}(u_\mu)=Q^\mu_\rho(q),\qquad Q_{\chi^\lambda}(u_\mu)=\widetilde{K}_{\lambda,\mu}(q)$$

が成り立つ. また, Green 多項式の直交関係 (3.11) が (4.2) に他ならない.

1 節で述べたように, Green 関数を計算するためには, 交差 cohomology を用いた幾何的な表示が必要であった. 今, I を G の巾単類 C とその上の G-同変単純局所系 $\mathcal{E}$ の組全体の集合とする. $(C,\mathcal{E})\in I$ に対して, 交差 cohomology 群 (の次数シフト) $K=\mathrm{IC}(\bar{C},\mathcal{E})[\dim C-2d]$ が定義される. ただし, $d=\dim G/B$ である. K は $\bar{C}$ (C の G での閉包) 上の l 進層からなる複体であり, $F^*K\simeq K$ をみたす. 同型 $\varphi: F^*K\to K$ を一つ固定することにより, K の特性関数 $\chi_{K,\varphi}:\bar{C}^F\to\bar{\mathbf{Q}}_l$ が定まる. $\bar{C}^F$ の外側で値 0 を取るとして, $\chi_{K,\varphi}$ を G^F_{uni} 上の関数とみなす. Lusztig [L3] と Borho-MacPherson [BM] の結果を合わせて次が成り立つ.

定理 **4.2.** (i) 関数 Q_χ はある $(C,\mathcal{E})\in I$ によって $Q_\chi=\chi_{K,\varphi}$ と表される (ただし同型 $\varphi: F^*K\to K$ はうまく選ぶ). 特に, Q_χ は $\bar{C}^F$ の外側で 0 となる関数である.

(ii) 写像 $f:\chi\mapsto(C,\mathcal{E})$ は $W^\wedge$ から I への単射写像を与える.

(ii) で定まる写像 f を Weyl 群の **Springer** 対応という. $G=GL_n$ の場合, C 上の局所系は常に定数層 $\bar{\mathbf{Q}}_l$ であり, Springer 対応 f は全単射 $\chi^\lambda\mapsto(C_\lambda,\bar{\mathbf{Q}}_l)$ で与えられ) る. 他の群の場合 f は全射にはならず対応はより複雑になる. しかし, 現在すべての群に対して Springer 対応は具体的に記述されている.

巾単類 C の代表元 $u\in C^F$ を固定すると, C 上の G 同変単純局所系は $A_G(u)=Z_G(u)/Z^0_G(u)$ の既約指標と 1 対 1 に対応する. また, C^F の G^F-共役類は $A_G(u)$ の共役類と 1 対 1 に対応する. $a\in A_G(u)$ に対応する C^F の G^F-共役類の代表元を u_a と表す. $\mathcal{U}$ を G^F_{uni} 上の G^F-不変な関数全体のなす線形空間とする. $i=(C,\mathcal{E})\in I$ に対して $Y_i\in\mathcal{U}$ を次のように定める. ρ を $\mathcal{E}$ に対応する $A_G(u)$ の既約指標として,

$$Y_i(g)=\begin{cases}\rho(a) & g=u_a \text{ の場合,}\\ 0 & g\notin C^F \text{ の場合.}\end{cases}\tag{4.3}$$

このとき, $\{Y_i\mid i\in I\}$ は $\mathcal{U}$ の基底になる. $I_0=f(W^\wedge)$ とおく. $f(\chi)=i\in I_0$ とすると, Q_χ は

$$Q_\chi=\sum_{j\in I_0}p_{ij}Y_j\tag{4.4}$$

と表されることが知られている. (実際 $Q_\chi\in\mathcal{U}$ であり, $\{Y_j\}$ が $\mathcal{U}$ の基底であることから Q_χ が Y_j $(j\in I)$ の線形結合で書けるのは当然だが, $j\in I_0$ を示すためには指標層の分類に関する深い結果を必要とする.) さて, $P=(p_{ij})$ を I_0 を添字集合に持つ $\bar{\mathbf{Q}}_l$ 係数の行列とする. Green 関数を決定するた

めには, 行列 P を決めれば十分である. 以下, P を決めるアルゴリズムを説明しよう. まず $\mathcal{U}$ に次のようなスカラー積$\langle\ ,\ \rangle$を導入する. $f, h \in \mathcal{U}$ に対し,

$$\langle f, h\rangle = \sum_{u \in G^F_{\mathrm{uni}}} f(u)h(u).$$

すると (4.2) の Green 関数の直交関係は "$\langle Q^G_{T_w}, Q^G_{T_{w'}}\rangle =$ 既知の式 " の形で表される. Q_{T_w} を Q_χ に置き換えればこの式は

$$\langle Q_\chi, Q_{\chi'}\rangle = \omega_{\chi,\chi'} \tag{4.5}$$

の形に変換される. ここで, $\omega_{\chi,\chi'}$ も, もちろん既知の式である. $i = f(\chi), j = f(\chi')$ とおいて, $W^\wedge$ と I_0 を f により同一視すれば, $\Omega = (\omega_{\chi,\chi'}) = (\omega_{ij})$ を I_0 上の行列とみることができる. (4.4) により Q_χ を Y_j を使って書き直すと, (4.5) 式より

$$P\Lambda\,{}^tP = \Omega \tag{*}$$

の形の行列の関係式が導かれる. ただし, Λ は ij 成分が$\langle Y_i, Y_j\rangle$で与えられる I_0 上の行列である. ここで, I_0 に次のような同値関係を入れる. $i = (C, \mathcal{E}), j = (C', \mathcal{E}')$ に対し, $i \sim j \Leftrightarrow C = C'$. さらに, I_0 の全順序を, 各同値類が区間をなし, 誘導された同値類上の順序が対応する巾単類の閉包の包含関係から得られる半順序と両立するように選ぶ, すなわち $\bar{C} \subseteq \bar{C}'$ ならば, $i \le j$. この順序に関して行列 P, Λ, Ω を作り, それらを上の同値類に関する区分けの行列と考える. すると, 定理 4.2 (i) と (4.4) より, P は区分け行列として下三角になる. また, 交差 cohomoogy の性質から 巾単類 C に対応する P の対角成分 (小行列) は, スカラー行列 $q^{d_u} I_C$ となる. ただし, $u \in C$ に対して $\mathcal{B}_u = \{gB \in G/B \mid g^{-1}ug \in B\}$ とおくとき, $d_u = \dim \mathcal{B}_u$ である. また, その定義から容易に分かるように Λ は区分け行列として対角行列になる.

今 (*) 式を, Ω を既知の行列, P, Λ を未知行列とする行列方程式と考える. 簡単な線形代数により, 上に述べた P, Λ に関する条件から P, Λ が一意的に定まることが分かる. また同時にそれは, P, Λ 決定のアルゴリズムをも与える. したがって Green 関数が計算できるのである.

§5. $G(e, 1, n)$ に付随した Green 関数

古典群の場合の Springer 対応 $f : W^\wedge \to I_0$ を記述するために Lusztig [L2] は巾単 symbol の概念を導入した. 行列方程式 (*) を書き下すためのデータ, 巾単類に対応する I_0 の同値類や全順序, P の対角成分 $q^{d_u} I_C$ 等は巾単 symbol の組合せ論的な性質によってすべて記述できる. 本節では B_n 型 Weyl 群の拡張としてを複素鏡映群 $G(e, 1, n)$ を考える. 2 節に述べたように, 巾単 symbol の拡張として e-symbol を導入し, その組合せ的な性質を利用して (*) と類似の関係式を構成する. 以後 $W = G(e, 1, n)$ とおく. $W \simeq S_n \ltimes (\mathbb{Z}/e\mathbb{Z})^n$ である. $\mathcal{P}_{n,e}$ を分割の e 個の組 $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha^{(0)}, \ldots, \alpha^{(e-1)})$ で, $\sum_{k=0}^{e-1} |\alpha^{(k)}| = n$ となるもの全体の集合とする. $\boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{P}_{n,e}$ をサイズ n の e 分割という. W の既約指標は $\mathcal{P}_{n,e}$ によってパラメトライズされる ことが知られている. $\boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{P}_{n,e}$ に対応する W の既約指標を $\chi^{\boldsymbol{\alpha}}$ と表す. 以下では, 正の整数の組 $\boldsymbol{m} = (m_0, \ldots, m_{e-1})$ を固定し, 分割 $\alpha^{(k)}$ を $\alpha^{(k)}_1 \ge \cdots \ge \alpha^{(k)}_{m_k} \ge 0$ と m_k 個の数により表し, e 分割 $\boldsymbol{\alpha}$ を $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha^{(k)}_j)$ と行列の形に表記する. このように表された $\boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{P}_{n,e}$ の全体を

$Z_n^{0,0} = Z_n^{0,0}(\boldsymbol{m})$ とおく. 整数 $r \geq s \geq 0$ を固定し, $\boldsymbol{\Lambda}^0 = \boldsymbol{\Lambda}^0(\boldsymbol{m}) = (\Lambda^{(0)}, \ldots, \Lambda^{(e-1)})$ を

$$\Lambda^{(0)} : (m_0 - 1)r \geq \cdots \geq 2r \geq r \geq 0,$$
$$\Lambda^{(k)} : (m_k - 1)r + s \geq \cdots \geq 2r + s \geq r + s \geq s, \quad (k = 1, \ldots, e-1)$$

により定義する. $Z_n^{r,s} = Z_n^{0,0} + \boldsymbol{\Lambda}^0$ (成分ごとの和) とおく. $Z_n^{r,s} = Z_n^{r,s}(\boldsymbol{m})$ の元を (r,s) 型の e-symbol という. $\boldsymbol{\alpha} \mapsto \boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{\alpha}) = \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\Lambda}^0$ により, $Z_n^{0,0} \simeq Z_n^{r,s}$ である.

e-symbol の例をあげておこう. $W = G(2,1,2)$ すなわち, B_2 型の Weyl 群とする. $e = 2$ である. $m_0 = 3, m_1 = 2$ とすると,

$$Z_n^{0,0} = \{\begin{pmatrix}000\\11\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}110\\00\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}100\\10\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}000\\20\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}200\\00\end{pmatrix}\}. \tag{5.1}$$

$r = 2, s = 1$ とすると, $\boldsymbol{\Lambda}^0 = \begin{pmatrix}420\\31\end{pmatrix}$ であり,

$$Z_n^{r,s} = \{\begin{pmatrix}420\\42\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}530\\31\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}520\\41\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}420\\51\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}620\\31\end{pmatrix}\}. \tag{5.2}$$

$Z_n^{r,s}$ にいくつかの概念を導入する. $\boldsymbol{m}' = (m_0 + 1, \ldots, m_{e-1} + 1)$ とおけば, 全単射: $Z_n^{r,s}(\boldsymbol{m}) \to Z_n^{r,s}(\boldsymbol{m}'), \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\Lambda}^0(\boldsymbol{m}) \mapsto \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\Lambda}^0(\boldsymbol{m}')$ が得られる. これを e-symbol の shift operation という. 例えば, 上の例に関連して, $\begin{pmatrix}31\\1\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}530\\31\end{pmatrix}$ は shift operation である.

次に, $\boldsymbol{\Lambda}, \boldsymbol{\Lambda}' \in Z_n^{r,s}$ が重複度もこめて同じ成分を持つとき, $\boldsymbol{\Lambda} \sim \boldsymbol{\Lambda}'$ として $Z_n^{r,s}$ に同値関係 $\sim$ を定義する. $\sim$ に関する同値類を family という. また関数 $a : Z_n^{r,s} \to Z_{\geq 0}$ を

$$a(\boldsymbol{\Lambda}) = \sum_{\lambda, \lambda' \in \boldsymbol{\Lambda}} \min\{\lambda, \lambda'\} - \sum_{\mu, \mu' \in \boldsymbol{\Lambda}^0} \min\{\mu, \mu'\}$$

により定義する. 定義より, $a(\boldsymbol{\Lambda})$ は各 family の上で一定値を取る. また, family, $a(\boldsymbol{\Lambda})$ は shift operation によって変化しないことにも注意しておく. $\mathcal{P}_{n,e} \simeq Z_n^{0,0} \simeq Z_n^{r,s}$ の同一視のもとに $\mathcal{P}_{n,e}, Z_n^{0,0}$ に対しても, family, a 関数の用語を自由に使う.

先の例では, $\{\begin{pmatrix}520\\41\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}420\\51\end{pmatrix}\}$ が 2 元からなる family をなし, 他は全て 1 元からなる family である. $a(\boldsymbol{\Lambda})$ は (5.2) の左から順に, 4, 2, 1, 1, 0 で与えられる.

ここで, family を利用して集合 $\mathcal{P}_{n,e} \simeq Z_n^{r,s}$ に以下のように全順序 $\boldsymbol{\alpha} \leq \boldsymbol{\beta}$ を定義しておく. まず family の集合 $\{\mathcal{F}_i\}$ に, $a(\mathcal{F}_1) < a(\mathcal{F}_2)$ ならば $\mathcal{F}_1 > \mathcal{F}_2$ となるような全順序を入れ, それと両立するように (各 family が区間をなすように) $\mathcal{P}_{n,e}$ に全順序を定義する.

今まで, 行列 Ω の具体形については触れて来なかったが, ここで W に対して Ω を定義しよう. $V = \mathbb{C}^n$ 上に, W は鏡映表現として作用する. $S(V)$ を V の対称代数とし, $R = S(V)/I$ を W の余不変式環とする. ここで I は W 不変な (次数 > 0 の) 斉次ベクトルで生成される $S(V)$ のイデアルである. 余不変式環 R は, $R = \bigoplus_{i \geq 0} R_i$ と次数付き環の構造を持つ. また, R には W が作用し, 各 R_i は W 不変になる. W 加群 R は W の正則表現と同型である. 特に, $\dim R = |W|$. W の類関数 f に対して,

$$R(f) = \sum_{i \geq 0} \langle f, R_i \rangle_W \, t^i$$

として t の多項式 $R(f)$ を定義する. (ここで $\langle\ ,\ \rangle_W$ は W の類関数の内積を表す.) 特に, f が W の一般指標ならば $R(f) \in \mathbb{Z}[t]$ である. $R(f)$ は次のような表示を持つことが知られている.

$$R(f) = (t-1)^n P_W(t) \frac{1}{|W|} \sum_{w \in W} \frac{\det_V(w) f(w)}{\det_V(t \cdot \mathrm{id}_V - w)}. \tag{5.3}$$

ただし, $P_W(t) = \sum_{i \geq 0} \dim R_i t^i$ は W の Poincaré 多項式で, 今の場合 $P_W(t) = \prod_{i=1}^{n} (t^{ei}-1)/(t-1)$ である. また, $\det_V(x)$ は V 上の線形変換 x の行列式を表す.

$\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in \mathcal{P}_{n,e}$ に対し,

$$\omega_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}} = t^{N^*} R(\chi^{\boldsymbol{\alpha}} \otimes \overline{\chi^{\boldsymbol{\beta}}} \otimes \overline{\det}_V)$$

とおく. ただし, $\overline{\chi^{\boldsymbol{\beta}}}, \overline{\det}_V$ はそれぞれ指標 $\chi^{\boldsymbol{\beta}}, \det_V$ の複素共役を表わす. N^* は W の複素鏡映の個数である. $\Omega = (\omega_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}})$ が求める行列である.

これらの準備のもとに, 行列方程式 (*) は次のように一般化される. $\mathcal{P}_{n,e}$ を添数集合とする (先に定義した順序に関する) 行列を family に対応した区分けにより, ブロック行列とみることにする. ブロック行列 $P' = (p'_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}})$, $P'' = (p''_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}})$, $\Lambda = (\lambda_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}})$ が次の関係式と条件を満たすとする.

$$P' \Lambda\, {}^t P'' = \Omega. \tag{**}$$

ここに, P', P'' は ブロック行列の意味で下半三角行列, 各 family $\mathcal{F}$ に対応する対角ブロックは, $\boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{F}$ により, $t^{a(\boldsymbol{\alpha})} I_{\mathcal{F}}$ とスカラー行列として表される. また, Λ はブロック行列の意味で対角行列である.

Geck-Malle [GM] の議論を踏襲することにより, 方程式 (**) をみたす行列 P', P'', Λ が唯一つ存在し, 行列の各成分は $\mathbb{Q}(t)$ に含まれることが確かめられる. そこで行列 P', P'' を W に付随した **Green** 関数ということにする.

注意 5.1. (i) σ を複素共役 $\chi^{\boldsymbol{\alpha}} \leftrightarrow \overline{\chi^{\boldsymbol{\alpha}}}$ から得られる $\mathcal{P}_{n,e} \simeq W^\wedge$ の置換行列とする. このとき, $P'' = \sigma P' \sigma^{-1}$ が成り立つ. したがって, 本質的には P' だけ考えれば十分である. また $e = 2$ の場合, 既約指標は整数値を取るので, $\sigma = I$. これより, $P' = P''$ となる.

(ii) $e = 2$ の場合, e-symbol $Z_n^{r,s}$ は r, s を適当に選ぶことにより, 各古典群 G に応じた巾単 symbol を与える. 実際, $Z_n^{2,1}$ は Sp_{2n} $(p \neq 2)$, $Z_n^{2,0}$ は SO_{2n+1} $(p \neq 2)$, $Z_n^{4,2}$ は Sp_{2n} $(p = 2)$ の巾単 symbol に他ならない. この場合, 方程式 (**) は本来の Green 関数を定める方程式 (*) に一致する. 特に, $\boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{P}_{n,e}$ に対し u を対応する巾単類 C の代表元とすると $a(\boldsymbol{\alpha}) = d_u$ が成り立つ.

(iii) Geck-Malle [GM] は, 有限 Chevalley 群の 巾単指標とその family に対して, (*) と同様の関係式を定式化し, 行列 Λ の成分から巾単類の special piece $\widehat{C}$ の有理点 $\widehat{C}(\mathbf{F}_q)$ の個数を表す多項式が得られることを予想した. 彼らはコンピュータ計算により例外群に対して予想が成立することを確かめている. 同様の計算は非結晶型 Coxeter 群 H_3, H_4 や, ある種の複素鏡映群に対しても成立し, Λ の成分としてもっともらしい多項式が得られる (もちろん, この場合巾単類も special piece も意味を持たないが). これらの式は Lusztig [L5] によりその存在が予想されていた, H_3, H_4 の仮想的な $\widehat{C}(\mathbf{F}_q)$ の個数を表す多項式ではないかと期待される. ところで古典群の場合, 巾単指標を記述するために, Lusztig は symbol の概念を導入している. (歴史的にはこちらの方が巾単 symbol より早い). $Z_n^{1,0}$ は symbol の集合に他ならず, その場合の方程式 (**) が Geck-Malle で考察されたものに ($\mathcal{P}_{n,e}$ の順序を適当に取れば) 一致する. ここで $a(\boldsymbol{\alpha})$ は $\chi^{\boldsymbol{\alpha}} \in W^\wedge$ の本来の a 関数の値 $a(\chi^{\boldsymbol{\alpha}})$ である.

§6. Green 関数の組合せ論的構成

この節では, GL_n の場合にならって W に付随した Green 関数の組合せ論的な構成を試みる. $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_j^{(k)}) \in Z_n^{0,0}(\boldsymbol{m})$ に対応して変数 $x = (x_j^{(k)})$ を導入する. k を固定したとき, $x_1^{(k)}, \ldots, x_{m_k}^{(k)}$ を $x^{(k)}$ と表すことにする. 1 の原始 e 乗根 ζ を固定しておく. [M] にしたがって, $\boldsymbol{\alpha} \in Z_n^{0,0}$ に対応する Schur 関数 $s_{\boldsymbol{\alpha}}(x)$ と巾和対称関数 $p_{\boldsymbol{\alpha}}(x)$ を導入する. まず, Schur 関数については,

$$s_{\boldsymbol{\alpha}}(x) = \prod_{k=0}^{e-1} s_{\alpha^{(k)}}(x^{(k)}).$$

ただし, $s_{\alpha^{(k)}}$ は分割 $\alpha^{(k)}$ に関する本来の Schur 関数 (§1) である. 次に, 整数 $1 \leq r, 0 \leq k \leq e-1$ に対し,

$$p_r^{(k)}(x) = \sum_{j=0}^{e-1} \zeta^{-kj} p_r(x^{(j)})$$

とおき (p_r は §1 で定義したもの), また $p_0^{(k)}(x) = 1$ とおく. $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_j^{(k)})$ に対し, $p_{\boldsymbol{\alpha}}(x)$ を以下のように定義する.

$$p_{\boldsymbol{\alpha}}(x) = \prod_{j,k} p^{(k)}_{\alpha_j^{(k)}}(x)$$

$\Xi_{\boldsymbol{m}} = \bigotimes_{k=0}^{e-1} \mathbb{Z}[x_1^{(k)}, \ldots, x_{m_k}^{(k)}]^{S_{m_k}}$ を $S_{\boldsymbol{m}} = S_{m_0} \times \cdots \times S_{m_{e-1}}$ に関する対称多項式の環とする. $\Xi_{\boldsymbol{m}}$ は次数付き環であり, $\Xi_{\boldsymbol{m}} = \bigoplus_{n \geq 0} \Xi_{\boldsymbol{m}}^n$ と分解する. $\boldsymbol{m}' = (m_0 + 1, \ldots, m_{e-1} + 1)$ とすると, $x_{m_{k+1}}^{(k)} \mapsto 0, x_i^{(k)} \mapsto x_i^{(k)} (i \leq m_k)$ により, 準同型 $\Xi_{\boldsymbol{m}'}^n \to \Xi_{\boldsymbol{m}}^n$ が定義され, $\{\Xi_{\boldsymbol{m}}^n\}_{\boldsymbol{m}}$ は射影系になる. 射影極限 $\varprojlim \Xi_{\boldsymbol{m}}^n$ を Ξ^n とおき, 対称関数の環 $\Xi = \oplus_{n \geq 0} \Xi^n$ を定義する. $\{s_{\boldsymbol{\alpha}} \mid \boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{P}_{n,e}\}$ は Ξ^n の $\mathbb{Z}$ 基底になり, また $\{p_{\boldsymbol{\alpha}} \mid \boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{P}_{n,e}\}$ は $\mathbb{C} \otimes \Xi^n$ の基底になる.

このような状況で S_n の場合と同様に **Frobenius** の公式が成立する. $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in \mathcal{P}_{n,e}$ に対して,

$$p_{\boldsymbol{\beta}}(x) = \sum_{\boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{P}_{n,e}} \chi^{\boldsymbol{\alpha}}(w_{\boldsymbol{\beta}}) s_{\boldsymbol{\alpha}}(x). \tag{6.1}$$

ただし, $w_{\boldsymbol{\beta}}$ は $\boldsymbol{\beta}$ に対応する W の共役類の代表元を表す.

次に, $\boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{P}_{n,e}$ に対して,

$$z_{\boldsymbol{\alpha}}(t) = z_{\boldsymbol{\alpha}} \prod_{\substack{k,j \\ \alpha_j^{(k)} \neq 0}} (1 - \zeta^k t^{\alpha_j^{(k)}})^{-1} \tag{6.2}$$

とおく. ただし, $z_{\boldsymbol{\alpha}} = |Z_W(w_{\boldsymbol{\alpha}})|$ である. 式 (6.2) が対称関数と行列 Ω との接点を与えることに注意する. 実際, (5.3) 式の分母に表れる式は, 次の意味で (6.2) と関係している.

$$\det_V(t \cdot \mathrm{id}_V - w_{\boldsymbol{\alpha}}) = \prod_{\substack{j,k \\ \alpha_j^{(k)} \neq 0}} (t^{\alpha_j^{(k)}} - \zeta^k).$$

ここで W に対する **Cauchy** の再生核 $\Omega(x,y;t)$ を以下のように定義する. $k=0,\dots,e-1$ に対し, 無限変数 $x_1^{(k)},x_2^{(k)},\dots,y_1^{(k)},y_2^{(k)},\dots$ を用意する. $x=(x_j^{(k)}),y=(y_j^{(k)})$ に対し

$$\Omega(x,y;t)=\prod_{k=0}^{e-1}\prod_{i,j}(1-tx_i^{(k+1)}y_j^{(k)})/(1-x_i^{(k)}y_j^{(k)})$$

とおく. 右辺には $x^{(k+1)}$ と $y^{(k)}$ が混在していて, Schur 関数の場合のように積として分離できないことに注意する. GL_n の場合と同様に, $\Omega(x,y;t)$ を以下のように $p_{\boldsymbol{\alpha}}(x)$ で展開することができる.

$$\Omega(x,y;t)=\sum_{\boldsymbol{\alpha}} z_{\boldsymbol{\alpha}}(t)^{-1}p_{\boldsymbol{\alpha}}(x)\overline{p_{\boldsymbol{\alpha}}(y)}. \tag{6.3}$$

ここに, $\boldsymbol{\alpha}$ は任意のサイズの e 分割をすべて動く. $\overline{p_{\boldsymbol{\alpha}}(y)}$ は $p_{\boldsymbol{\alpha}}(y)$ の複素共役である.

次に Hall-Littlewood 関数を定義するために,

$$\langle p_{\boldsymbol{\alpha}},p_{\boldsymbol{\beta}}\rangle=z_{\boldsymbol{\alpha}}(t)\delta_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}$$

とおいて $\mathbb{C}(t)\otimes_{\mathbb{Z}}\Xi^n$ に半双線形形式 $\langle\ ,\ \rangle$ を導入する. 以下では, $\mathcal{P}_{n,e}\simeq Z_n^{r,s}$ 上に 5 節で定義した順序 $\boldsymbol{\alpha}\le\boldsymbol{\beta}$ が入っているものとする. 次が成立する.

命題 6.1. 各 $\boldsymbol{\alpha}\in Z_n^{0,0},\boldsymbol{\Lambda}=\boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{\alpha})\in Z_n^{r,s}$ に対し, 以下の性質を満たす関数 $P_{\boldsymbol{\Lambda}}^{\pm}(x;t)$ が (符号 $\pm$ に応じてそれぞれ) 唯一つ存在する.

(i) $P_{\boldsymbol{\Lambda}}^{\pm}$ は Schur 関数 $s_{\boldsymbol{\beta}}$ により,

$$P_{\boldsymbol{\Lambda}}^{\pm}=s_{\boldsymbol{\alpha}}+\sum_{\boldsymbol{\beta}\in Z_n^{0,0}}u_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}^{\pm}(t)s_{\boldsymbol{\beta}}$$

と表される. ここに, $u_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}^{\pm}(t)\in\mathbb{Q}(t)$ であり, $\boldsymbol{\beta}<\boldsymbol{\alpha}$ かつ $\boldsymbol{\beta}\not\sim\boldsymbol{\alpha}$ のときを除いて $u_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}^{\pm}=0$.

(ii) $\boldsymbol{\Lambda}\sim\boldsymbol{\Lambda}'$ の場合を除いて $\langle P_{\boldsymbol{\Lambda}}^{+},P_{\boldsymbol{\Lambda}'}^{-}\rangle=0$.

$P_{\boldsymbol{\Lambda}}^{\pm}(x;t)$ を e-symbol $\boldsymbol{\Lambda}$ に対する **Hall-Littlewood** 関数 という. $P_{\boldsymbol{\Lambda}}^{\pm}(x;t)$ は e-分割 $\mathcal{P}_{n,e}$ ではなく, e-symbol $Z_n^{r,s}$ により定まる. したがって, 同じ W から r,s の取り方によって種々の Hall-Littlewood 関数が構成される. また, 上の定義は $\mathcal{P}_{n,e}\simeq Z_n^{r,s}$ に入れた順序 $\boldsymbol{\alpha}\le\boldsymbol{\beta}$ にもよっている. しかし, 5 節のような順序を入れる限り, $P_{\boldsymbol{\Lambda}}^{\pm}$ はその順序の取り方には依存しないのではないかと思われる. また, その構成から $P_{\boldsymbol{\Lambda}}^{\pm}$ は $\mathbb{Q}(t)\otimes_{\mathbb{Z}}\Xi^n$ の元であるが, $P_{\boldsymbol{\Lambda}}^{\pm}\in\mathbb{Z}[t]\otimes_{\mathbb{Z}}\Xi^n$ となることが予想される.

3 節では説明しなかったが, GL_n の場合も $P_\lambda(x;t)$ を同様の方法で $\mathbb{Q}(t)\otimes_{\mathbb{Z}}\Lambda^n$ 上の内積により特徴付けることができる. しかし, $P_{\boldsymbol{\Lambda}}^{\pm}$ に対しては, (3.2) のような Hall-Littlewood 関数の具体的な表示は見つかっていない.

命題 6.1 の系として $\Omega(x,y;t)$ の Hall-Littlewood 関数による展開が得られる.

系 6.2.

$$\Omega(x,y;t)=\sum_{\boldsymbol{\Lambda},\boldsymbol{\Lambda}'}b_{\boldsymbol{\Lambda},\boldsymbol{\Lambda}'}(t)P_{\boldsymbol{\Lambda}}^{+}(x;t)P_{\boldsymbol{\Lambda}'}^{-}(y;t).$$

ただし, $\boldsymbol{\Lambda}\sim\boldsymbol{\Lambda}'$ の場合を除いて, $b_{\boldsymbol{\Lambda},\boldsymbol{\Lambda}'}(t)=0$. $\boldsymbol{\Lambda},\boldsymbol{\Lambda}'$ は $\bigcup_{n=0}^{\infty}Z_n^{r,s}$ をすべて動く.

命題 6.1 より, $\{P^{\pm}_{\boldsymbol{\Lambda}} \mid \boldsymbol{\Lambda} \in Z^{r,s}_n\}$ は $\mathbb{Q}(t) \otimes_{\mathbb{Z}} \Xi^n$ の $\mathbb{Q}(t)$-基底をなすことが分かる. そこで GL_n の場合と同様に, **Kostka** 関数 $K^{\pm}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}(t)$ が

$$s_{\boldsymbol{\alpha}}(x) = \sum_{\boldsymbol{\beta} \in \mathcal{P}_{n,e}} K^{\pm}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}(t) P^{\pm}_{\boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{\beta})}(x;t) \tag{6.4}$$

により定義される. さらに **modified Kostka** 関数を $\widetilde{K}^{\pm}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}(t) = t^{a(\boldsymbol{\beta})} K^{\pm}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}(t^{-1})$ により定義する. $\widetilde{K}_{\pm}(t) = (\widetilde{K}^{\pm}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}(t))$ を対応する $\mathcal{P}_{n,e}$ 上の行列とする. 一方 (6.4) 式で Schur 関数 $s_{\boldsymbol{\alpha}}(x)$ の代わりに巾和対称関数 $p_{\boldsymbol{\alpha}}(x)$ を考えれば, (3.5) 式のように, $P^{\pm}_{\boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{\beta})}(x;t)$ の係数として $X^{\pm}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}(t)$ が得られる. $\widetilde{X}_{\pm}(t) = (t^{a(\boldsymbol{\beta})} X^{\pm}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}(t^{-1}))$ とおくと, Frobenius の公式 (6.1) により, 行列 $\widetilde{X}_{\pm}(t)$ は $\widetilde{K}_{\pm}(t)$ に左から W の指標表の行列をかけることによって得られることが分かる. そこから 3 節と同様の議論によって Green 関数の直交関係に相当する関係式が導かれる. ここで少し記号を準備する. $\Lambda(t) = (b_{\boldsymbol{\Lambda},\boldsymbol{\Lambda}'}(t))$ $(\boldsymbol{\Lambda}, \boldsymbol{\Lambda}' \in Z^{r,s}_n)$ とおく. 系 6.2 より, $\Lambda(t)$ は正則であり, ブロック行列の意味で対角行列になる. $\Lambda(t)^{-1} = (b'_{\boldsymbol{\Lambda},\boldsymbol{\Lambda}'}(t))$ とおき, 行列 $\widetilde{\Lambda}(t)$ を

$$\widetilde{\Lambda}(t) = (d(t) t^{a(\boldsymbol{\Lambda}')-a(\boldsymbol{\Lambda})} b'_{\boldsymbol{\Lambda},\boldsymbol{\Lambda}'}(t^{-1}))$$

により定義する. ただし, $d(t) = t^{N^*-n}(t-1)^n P_W(t)$ である. $\widetilde{\Lambda}(t)$ もやはり, ブロック行列として対角行列になることに注意する. (3.10) から (3.11) が得られるのと同様に, 上述の Green 関数に関する関係式を $\widetilde{K}_{\pm}(t)$ を使って書き換えることにより次の定理が得られる.

定理 6.3. 行列 $\widetilde{K}^{\pm}(t), \widetilde{\Lambda}(t)$ は次の関係式をみたす.

$$\widetilde{K}_{-}(t) \widetilde{\Lambda}(t) \, {}^t\widetilde{K}_{+}(t) = \Omega$$

したがって, $P' = \widetilde{K}_{-}(t), P'' = \widetilde{K}_{+}(t), \Lambda = \widetilde{\Lambda}(t)$ は方程式 *(**)* の解を与える.

定理 6.3 が Green 関数の組合せ論的構成に他ならない. Kostka 関数については次の予想がある.

予想 6.4. $K^{\pm}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}(t)$ は次数 $\deg K^{\pm}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}} \leq a(\boldsymbol{\beta}) - a(\boldsymbol{\alpha})$ の多項式になる. またその係数はすべて非負整数である.

予想が正しければ, $\widetilde{K}^{\pm}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}} \in \mathbb{Z}[t], P^{\pm}_{\boldsymbol{\Lambda}}(x;t) \in \mathbb{Z}[x;t]$ が導かれる. またこのとき, 行列 $\Lambda = (\lambda_{ij})$ についても $\lambda_{ij}(t) \in \mathbb{Z}[t]$ が成り立つ. 通常の Green 関数の場合, 予想は正しい. 実際この場合, $K^{\pm}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}(t)$ の係数はある種の cohomology 群 ($\boldsymbol{\beta}$ に対応する巾単類によって定まる W の Springer 表現) における既約表現 $\chi^{\boldsymbol{\alpha}}$ の重複度として表され, したがって非負の整数になる. このような表示が可能な根拠は 4 節で説明した Green 関数の幾何的な実現 (定理 4.2) にある. (A 型の場合には Lascoux-Schützenberger による Kostka 関数の組合せ論的な表示 ([M, III, 6.5]) からも得られる.) 我々の Kostka 関数についても, 何らかの幾何的実現を見付けることが予想の証明への道筋を与えることになるだろう。

群 $G(e,1,n)$ の一般化として, 複素鏡映群 $G(e,p,n)$ のクラスが考えられる. ここに p は e の約数であり, $G(e,p,n)$ は $G(e,1,n)$ の指数 p の正規部分群になる. 特に $e = p = 2$ の場合, $G(2,2,n)$ は D_n-型の Weyl 群と同型になる. $G(e,1,n)$ が B_n-型 Weyl 群の拡張であるように, $G(e,e,n)$ は D_n-型 Weyl 群の拡張とみなされる. $G(e,e,n) \subset G(e,p,n) \subset G(e,1,n)$ となっている. さらに $G(e,e,2)$ は位数 $2e$ の 2 面体群と同型である. 今まで $G(e,1,n)$ について述べてきたことはすべて $G(e,p,n)$ の場合に拡張される. D_n-型巾単 symbol の拡張として (変形) e-symbol が定義され, (**) に類似の行列関係式を用いて Green 関数が定義される. 巾和対称関数, Schur 関数, Hall-Littlewood 関数もしかるべく定式化さ

れ, 定理 6.3 と同様の結果が成立する. 特に, D_n-型 Chevalley 群の Green 関数に対する組合せ論的なアプローチが得られる. また同時に, 2 面体群に付随する Green 関数も構成できることになる. しかし面白いことに (残念なことに ?) このようにして得られる Green 関数は, B_2-型, G_2-型の場合, 通常の Green 関数とは一致しない. 多分, Weyl 群の拡張として 2 面体群の Green 関数を扱うにはもっと別のタイプの Hall-Littlewood 関数が必要になるのだろう.

それにしても, 上記の結果は Green 関数にまつわる A-型の組合せ論が古典群の枠を越えて例外群に対しても適用できる可能性を示唆しているように筆者には思われる. n の分割をリー環 $\mathfrak{sl}_n$ の weight としてみる立場から Schur 関数や Hall-Littlewood 関数は任意のルート系に拡張される. しかし本稿で述べたこと (B_n-型, D_n-型への拡張) はそれとは方向が異なることに注意しておく. 今のところ糸口はつかめないが, E_8-型の Green 関数や, H_3, H_4-型の Green 関数を組合せ論的に構成することも, あながち夢物語とは言えないのではないか. 複素鏡映群の Green 関数というタイトルを掲げておいて $G(e,p,n)$ だけでは看板倒れだが, いつの日か複素鏡映群一般の Green 関数について議論したい, というのが題名に込めた筆者の願いである.

$G(e,1,n), G(e,p,n)$ の Green 関数についてはその詳細が, [S2], [S3] にある. また D_n-型の Green 関数については [S4] に解説がある. 興味のある方はあわせて参照して頂きたい.

References

[AK] S. Ariki and K. Koike; A Hecke algebra of $(\mathbb{Z}/r\mathbb{Z}) \wr \mathfrak{S}_n$ and construction of its irreducible representations, Adv. in Math. **106** (1994), 216–243.

[BM] W. Borho and R. MacPherson; Représentations des groupes de Weyl et homologie d'intersection pour les variétés nilpotentes, C.R. Acad. Sci. Paris t.**292** (1981), série A 707–710.

[BMM] M. Broué, G. Malle and J. Michel; Représentattions unipotentes génériques et blocs des groupes réductifs finis, Astérisque **212**, Société Mathématique de France, 1993.

[C] C. Chevalley; Sur certains groupes simples, Tohoku Math. J. **7** (1955), 14 – 66.

[DL] P. Deligne and G. Lusztig; Representations of reductive groups over finite fields, Ann. of Math. 103 (1976), 103–161.

[G] J.A. Green; The characters of the finite general linear groups, Trans. Amer. Math. Soc. 80 (1955), 402–447.

[GM] M. Geck and G. Malle; On special pieces in the unipotent variety, Experimental Math. **8** (1999).

[H] 原田耕一郎; 有限群論の成果と課題, 数学 **53-1**, (2001), 46–61.

[L1] G. Lusztig; Characters of reductive groups over a finite field, Annals of Math. Studies **107**, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1984.

[L2] G. Lusztig; Intersection cohomology complexes on a reductive group, Invent. Math. **75** (1984), 205–272.

[L3] G. Lusztig; Green functions and character sheaves, Annals of Mathematics, 131 (1990), 355–408.

[L4] G. Lusztig; Coxeter groups and unipotent representations, Astérisque **212**, (1993), 191–201.

[L5] G. Lusztig; Notes on unipotent classes, Asia J. Math. **1** (1997), 194 – 207.

[M] I.G. Macdonald; Symmetric functions and Hall Polynomials, second edition. Clarendon Press. Oxford 1995.

[S1] 庄司 俊明; 有限 Chevalley 群の既約指標, 数学 **47-3**, (1995), 241–255.

[S2] T. Shoji; Green functions associated to complex reflection groups, to appear in J. Algebra.

[S3] T. Shoji; Green functions associated to complex reflection groups, II. Preprint.

[S4] 庄司 俊明; 複素鏡映群に付随した Green 関数- D_n-型を中心にして -. 数理解析研究所講究録「組合せ論的表現論をめぐる話題」(2001) 107 - 125.

[ST] G.C. Shephard and J.A. Todd; Finite unitary reflection groups, Canad. J. Math. **6** (1954), 274–304.

(しょうじ としあき・東京理科大学理工学部)