特異点の無い宇宙の大きさについて

吉田 大介 (名古屋大・多元数理)

Phys.Rev.D 106 (2022) 12, 124016 with **野村皇太 (神戸大)**

一般相対論と幾何@名古屋大学 2024/2/8

研究の動機

物理的な時空の普遍的な性質を理解したい。

→ 一般のローレンツ多様体には非物理的な時空が多く含まれる。

ローレンツ多様体を物理的な性質で分類し、各々の性質を明らかにできると嬉しい。

- 大域的構造による分類：**大域的双曲性**、因果律、 …
- 局所的な曲率の性質による分類：**ヌル収束条件**、時間的収束条件、 …

今回は大域的双曲性、ヌル収束条件を満たすクラスの時空について、
ヌル測地線の完備性（時空特異点の有無）に関連する性質を見ていく。

研究の概要

ペンローズの特異点定理の証明法を応用することで、
特異点の無い時空について以下の定理が成り立つ：

時空 $(\mathcal{M}, g_{ab})$ が以下の条件を満たすとする：

1. ヌル収束条件を満たす。
2. 大域的双曲性を持つ。
3. すべてのヌル測地線が過去向きに完備である。
4. 過去向き捕捉面を持つ。

この時、

✓ コーシー面はコンパクト。（ペンローズの特異点定理）
✓ 「アフィンパラメータで定義した宇宙の大きさ」（後述）
は捕捉面の膨張率で決まる上限を持つ。

特に一様等方宇宙において、この上限はドジッター時空の大きさに対応する。

ペンローズの特異点定理

ペンローズの特異点定理 (ペンローズ 1965)

時空 $(\mathcal{M}, g_{ab})$ について以下の条件は同時に満たされない

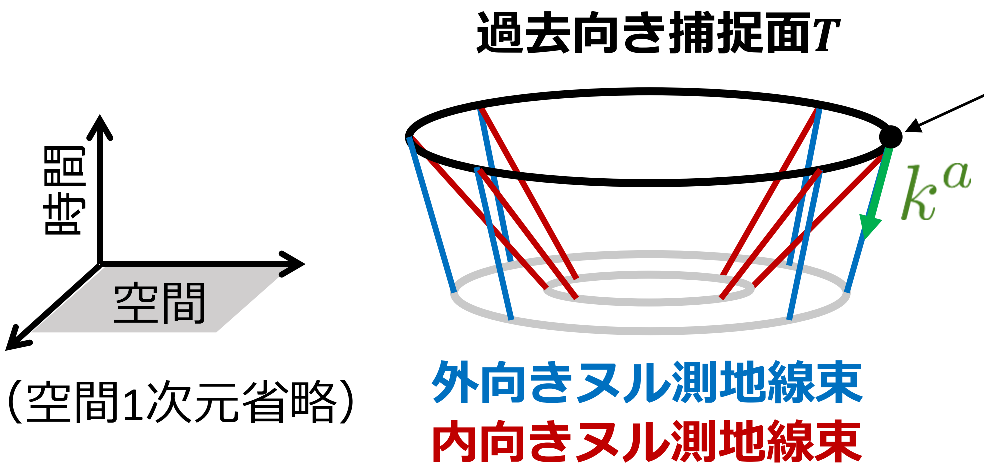
1. ヌル収束条件を満たす。
2. 大域的双曲性を持つ。
3. すべてのヌル測地線が過去向きに完備である。
4. 過去向き捕捉面を持つ。
5. コーシー面が非コンパクト

Remarks:

- ✓ 最初に提案された特異点定理。
  その後の特異点定理（ホーキング 1967、ホーキング&ペンローズ 1970）は時間的収束条件を仮定しているが、これはインフレーション宇宙で破れている。
- ✓ 通常1, 2, 4, 5 → 「過去向きに完備でないヌル測地線が存在する。」と使われる。
- ✓ 今回は1, 2, 3, 4 → 「コーシー面がコンパクト」という見方をする。

捕捉面

コンパクトでなめらかな2次元部分多様体 T が過去向き捕捉面であるとは、
Tに直交するすべての過去向きヌル測地線束（内向き・外向き の2種類）
の過去向きの膨張率が負（未来向きの膨張率が正）である。



この点における
外向きヌル測地線束の膨張率：

$$\theta = \nabla_a k^a < 0$$

（注：面積を視覚的に表した図）

ヌル収束条件とその帰結

ヌル収束条件： 任意のヌルベクトル k^a に対し、$R_{ab}k^a k^b \geq 0$

Raychaudhuri 方程式：

アフィンパラメータ λ を変数とするヌル測地線の接ベクトルを k^a とすると

$$\frac{d\theta}{d\lambda} = -\frac{1}{2}\theta^2 \underbrace{- R_{ab}k^a k^b}_{\leq 0 \text{ (ヌル収束条件)}} + (\text{non-positive term})$$

（ただし、$\theta = \nabla_a k^a$ ）

→ $\frac{d\theta}{d\lambda} \leq -\frac{1}{2}\theta^2$ 　積分して　$\frac{1}{\theta(\lambda)} \geq \frac{1}{\theta_0} + \frac{1}{2}\lambda$ 　（ただし、$\theta_0 := \theta|_{\lambda=0}$ ）

Remarks:

- ✓ 捕捉面を始点とするヌル測地線について $\theta_0 < 0$ 。
- ✓ さらに、アフィンパラメータが $\lambda = 2/|\theta_0|$ の値を取れるとすると $\frac{1}{\theta(\lambda = 2/|\theta_0|)} \geq 0$ 。

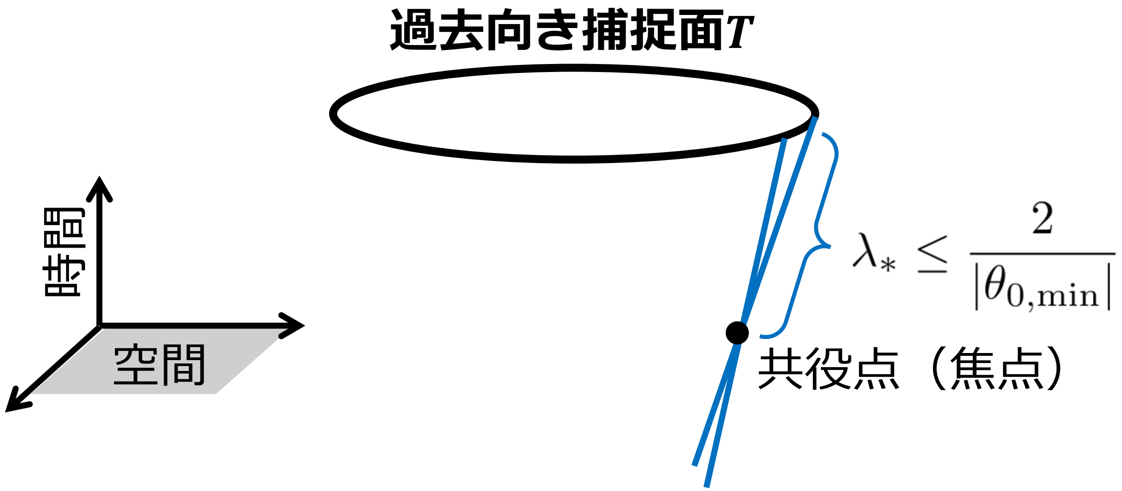
→ この時、$0 < \lambda_c < 2/|\theta_0|$ となる ある λ_c が存在して、$\lim_{\lambda \to \lambda_c - 0} \theta \to -\infty$ 。

共役点定理

時空 $(\mathcal{M}, g_{ab})$ が以下の条件を満たすとする：

1. ヌル収束条件を満たす。$R_{ab}k^a k^b \geq 0$
3. すべてのヌル測地線が過去向きに完備である。
4. 過去向き捕捉面を持つ。　（ $|\theta_0|$ の最小値を $|\theta_{0,\min}|$ と書く。）

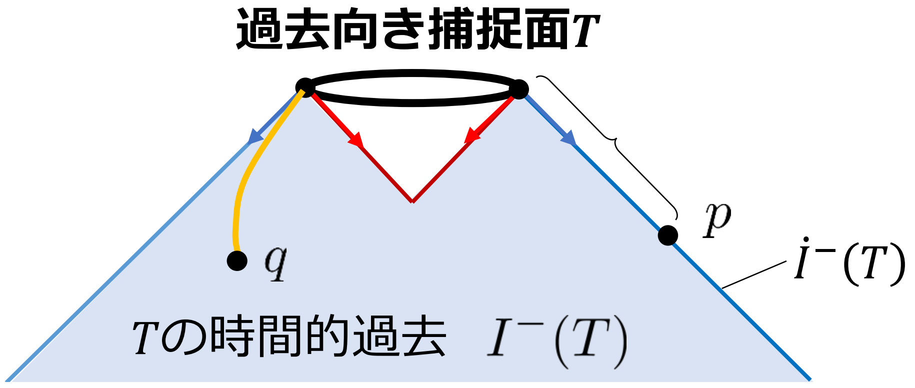
このとき、捕捉面に直交するすべての過去向きヌル測地線は
アフィンパラメータ $\lambda_* \leq 2/|\theta_{0,\min}|$ に共役点（焦点）$\theta = -\infty$ を持つ。



大域的双曲性の帰結：共役点と因果領域

定理 (c.f. Wald, Theorem 9.3.11)

大域的双曲性を持った時空 $(\mathcal{M}, g_{ab})$ において、 任意の点 $p \in \dot{I}^-(T)$ は
- Tに直交する過去向きヌル測地線束上に存在する。
- そのヌル測地線束は T と p の間に共役点を持たない。



（注：ヌル測地線を45度で表した図。）

もし点 p が共役点を持っていたら…

大域的双曲性：任意の（拡張しきった）因果曲線が交わる非時間的な面（コーシー面）が存在する。

Tの時間的過去 $I^-(T)$ **:** Tを始点とする過去向き時間的曲線で結べる点からなる集合。

Key Theorem

時空 $(\mathcal{M}, g_{ab})$ が以下の条件を満たすとする：

1. ヌル収束条件を満たす。$R_{ab}k^a k^b \geq 0$
2. 大域的双曲性を持つ。
3. すべての過去向き測地線が完備である。
4. 過去向き捕捉面を持つ。（ $|\theta_0|$ の最小値を $|\theta_{0,\min}|$ と書く。）

このとき、Tを始点とし直交する、すべての過去向きヌル測地線はある $\lambda_* \leq 2/|\theta_{0,\min}|$ で $\dot{I}^-(T)$ を離れる。

ペンローズの証明の続き（概略）

✓ $\dot{I}^-(T)$ がコンパクトであることを示す。
✓ コーシー面と $\dot{I}^-(T)$ が同相であることを示す。

「5．コーシー面が非コンパクトである。」と矛盾

ペンローズの特異点定理（再掲）

時空 $(\mathcal{M}, g_{ab})$ について以下の条件は同時に満たされない

1. ヌル収束条件を満たす。
2. 大域的双曲性を持つ。
3. すべてのヌル測地線が過去向きに完備である。
4. 過去向き捕捉面を持つ。
5. コーシー面が非コンパクト

特異点の無い宇宙の性質について

Key Theorem (再掲)

時空 $(\mathcal{M}, g_{ab})$ が以下の条件を満たすとする：

1. ヌル収束条件を満たす。$R_{ab}k^a k^b \geq 0$
2. 大域的双曲性を持つ。
3. すべての過去向き測地線が完備である。
4. 過去向き捕捉面を持つ。　（ $|\theta_0|$ の最小値を $|\theta_{0,\mathrm{min}}|$ と書く。）

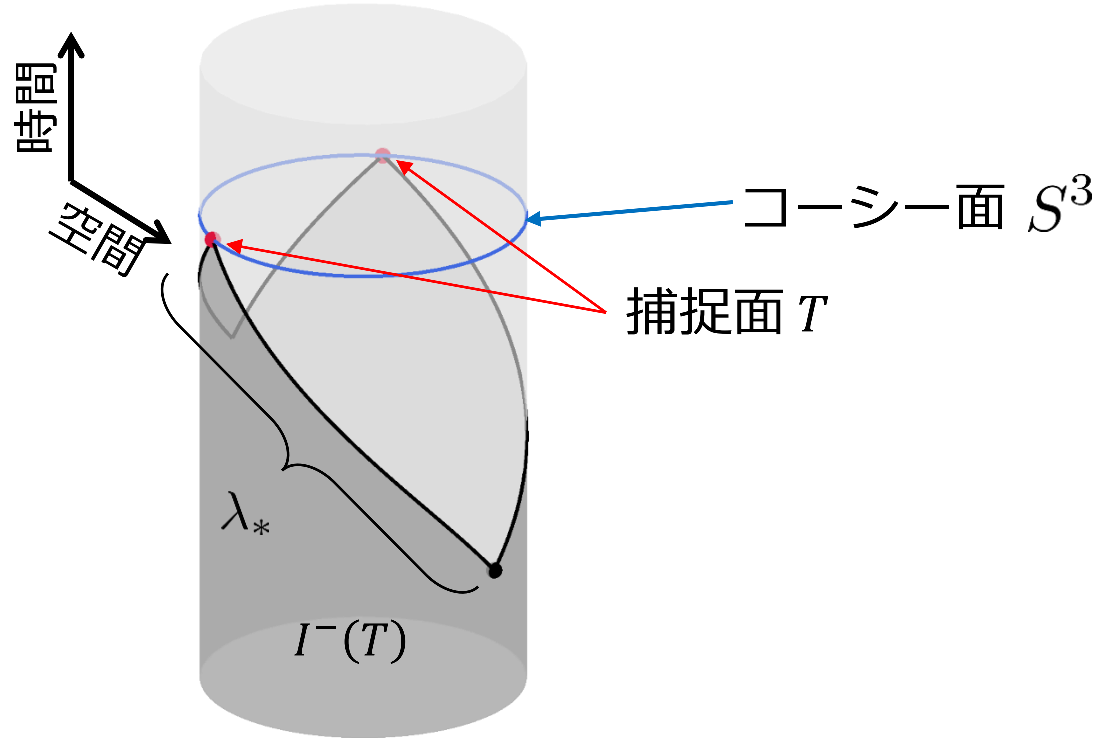
このとき、Tを始点とし直交する、すべての過去向きヌル測地線は
ある $\lambda_* \leq 2/|\theta_{0,\mathrm{min}}|$ で $\dot{I}^-(T)$ を離れる。

特異点定理の証明では、コーシー面の非コンパクト性の仮定との矛盾を導くために
使われたこの定理であるが、
コーシー面がコンパクトな場合にどのような意味を持つのか？

λ_* の意味

例：$\mathcal{M} = \mathrm{R} \times \mathrm{S}^3$

1+1次元で表した図
（空間 2 次元省略）



λ_*の最大値は
「捕捉面から出発した過去向き因果曲線が宇宙全体を覆うまでの時間」
と解釈され、「アフィンパラメータで測った宇宙の大きさ」と呼ぶことにする。
Key Theoremはこの意味で宇宙の大きさの上限が $2/|\theta_{0,\min}|$であることを主張している。

一様等方宇宙への応用

■ 空間的に平坦な一様等方時空：局所的に計量が以下のもので与えられる

$$g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = -dt^2 + a(t)^2\left(dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)\right), \qquad H := \frac{\dot{a}}{a}$$

■ 捕捉面の存在

T として $t = t_0,\ r = r_0$ で指定される2次元球面を考える。

・内向きヌル測地線の過去向き膨張率 $\theta_0^{\mathrm{in}} = -\frac{2}{a_0^2 r_0}(r_0 a_0 H_0 + 1) < 0$

・外向きヌル測地線の過去向き膨張率 $\theta_0^{\mathrm{out}} = -\frac{2}{a_0^2 r_0}(r_0 a_0 H_0 - 1)$: negative if $r_0 > (a_0 H_0)^{-1}$

$r_0 > (a_0 H_0)^{-1}$ となるような大きい球面を考えると、Tは過去向き捕捉面となる。

■ ヌル収束条件は $\dot{H} \geq 0$ である。

我々の主張：大域的双曲性を持ち、かつ、初期特異点が無いなら
捕捉面から過去に延ばしたヌル測地線は $\lambda_* \leq \frac{2}{|\theta_0^{\mathrm{out}}|} = \frac{a_0^2 r_0}{r_0 a_0 H_0 - 1}$ で宇宙を覆う

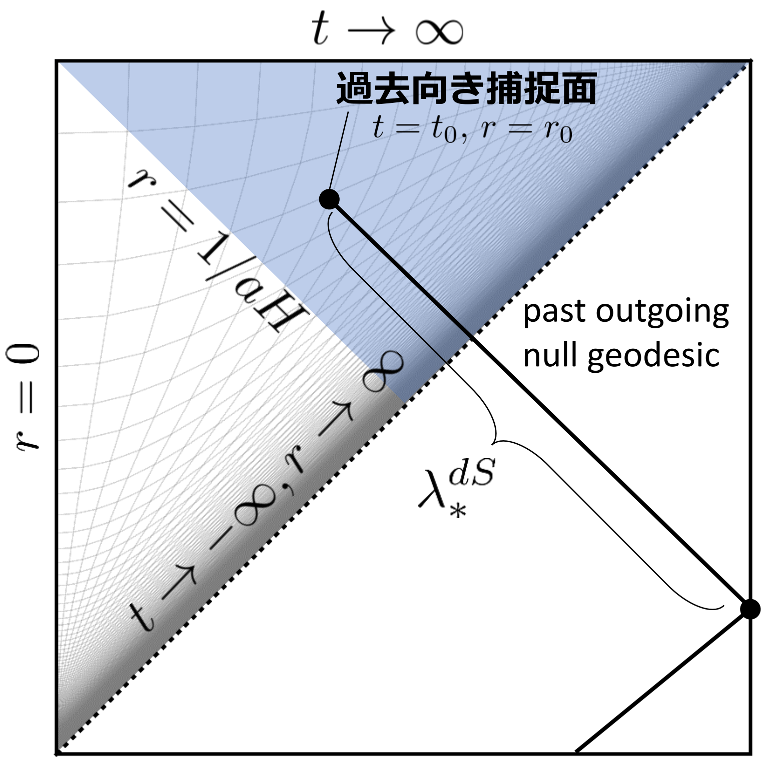
上限 $2/|\theta_0^{\rm out}|$ の意味

■ ドジッター時空（平坦座標）

$$g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = -dt^2 + \bar{a}^2 e^{2\bar{H}t}(dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2))$$

■ ドジッター時空はすべての仮定を満たす：

- ✓ ヌル収束条件
- ✓ 大域的双曲性（最大拡張後）
- ✓ ヌル測地線の完備性
- ✓ 過去向き捕捉面 ➡ 一般論から $\lambda_*^{dS} \le 2/|\theta_0^{\rm out}|$



■ 直接計算することで $\lambda_*^{dS} = 2/|\theta_0^{\rm out}|$ が確かめられる。
ドジッター時空で等号成立！

■ 一般の一様等方宇宙について $\lambda_* \le 2/|\theta_0^{\rm out}| = \lambda_*^{dS}$ 。
アフィンパラメータで測った宇宙の大きさはドジッター時空より小さい。

（捕捉面上で同じ膨張率を持つ）

Remark: 空間的に平坦でない一様等方宇宙についても同様。

具体例：Scaled de Sitter 時空

■ 具体例として次の正の空間曲率を持った一様等方宇宙を考える：

$$ds^2 = -dt^2 + \frac{\gamma^2}{\bar{H}^2}\cosh^2 \bar{H}t \left(d\chi^2 + \sin^2\chi(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)\right) \qquad \text{with } \gamma \leq 1$$

■ この時空はすべての仮定を満たす：

✓ ヌル収束条件 $\quad \dot{H} - \frac{1}{a^2} = \frac{\gamma^2 - 1}{\gamma^2}\frac{\bar{H}^2}{\cosh^2 \bar{H}t} < 0$

✓ 大域的双曲性

✓ ヌル測地線の完備性

✓ 過去向き捕捉面 $\; t = t_0,\ \chi = \chi_0 \sim \pi/2$

→ 一般論から $\lambda_* \leq \frac{2}{|\theta_0^{\rm out}|} = \lambda_*^{dS}$

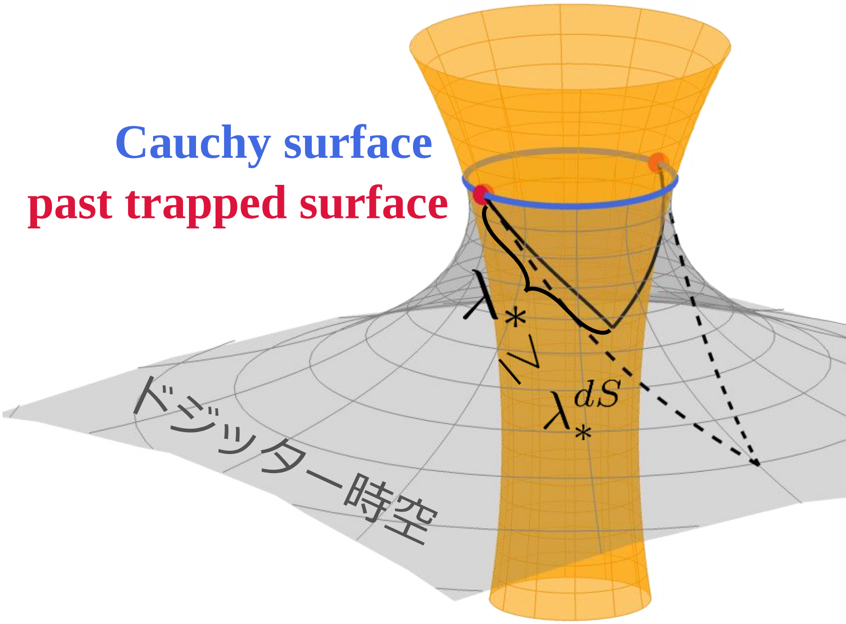
■ 実際に計算すると確かに

$$\frac{2}{\theta_0} - \lambda_* = \frac{2}{\theta_0}\frac{\gamma\tan(\pi - \chi_0) - \tan(\gamma(\pi - \chi_0))}{\gamma\tan(\pi - \chi_0)(1 + \tan(\gamma(\pi - \chi_0))\tan\gamma\eta_0)} > 0$$

■ 図形的には右図のような関係になる：

1+1次元で表した図

（空間 2 次元省略）



まとめ

まとめ

ペンローズの特異点定理の証明でコーシー面の非コンパクト性と矛盾を
導くために使われていた以下の性質のコンパクトな宇宙に対する示唆を与えた。

時空 $(\mathcal{M}, g_{ab})$ が以下の条件を満たすとする：

1. ヌル収束条件を満たす。$R_{ab}k^a k^b \geq 0$
2. 大域的双曲性を持つ。
3. すべての過去向き測地線が完備である。
4. 過去向き捕捉面を持つ。　（ $|\theta_0|$ の最小値を $|\theta_{0,\mathrm{min}}|$ と書く。）

このとき、Tを始点とし直交する、すべての過去向きヌル測地線は
ある $\lambda_* \leq 2/|\theta_{0,\mathrm{min}}|$ で $\dot{I}^-(T)$ を離れる。

λ_*は捕捉面を始点とする因果曲線が宇宙を覆うまでにかかる``時間”を意味し、
不等式は、条件を満たす一様等方宇宙がドジッター時空より小さいことを表す。