Riemann 面上の概劣調和関数と標準計量

宮武夏雄
東北大学数理科学共創社会センター（MathCCS）
Email address: natsuo.miyatake.e8@tohoku.ac.jp
「一般相対論と幾何」於名古屋大学 ES 総合館

2024 年 2 月 9 日（金）

講演内容の概略は以下の通り:

- 種数が 2 以上のコンパクト Riemann 面上の定曲率 Kähler 計量 (Riemann 面の標準 Kähler 計量) は, Higgs 束上の調和計量, というものから構成される (Hitchin'87).
- 上記の事実を最初の出発点にして, (開かもしれない) Riemann 面の標準束上の曲率 ≥ 0 かつ非自明な特異 Hermite 計量 $e^{-\varphi}h_{\mathrm{ref}}$ と 2 以上の自然数 r に対する, r 個の「標準」Kähler 計量 $H_1(\varphi), \ldots, H_{r-1}(\varphi), H_{r,\varphi}(\varphi)$ というものを新しく考えたので, それを紹介する.
- 上記 Kähler 計量の存在と一意性を, Riemann 面がコンパクトな場合と, 境界付きコンパクトな場合に (後者の場合は Dirichlet 境界条件付きで) 証明したので, その定理を紹介する (主定理).
- 上述したものの発展可能性を議論する.

X を種数が 2 以上のコンパクト Riemann 面とする．X 上の実定曲率計量と正則二次微分及び調和計量 (調和写像) の関係について説明する (cf. Gerstenhaber-Rauch '54, Earle-Eells'69, Schoen-Yau'79, Diederich-Ohsawa'85, Tabak'85, Wolf'89, ...).

負定曲率計量と正則二次微分と調和計量 (Hitchin'87)

$K_X \to X$ を X 上の標準束とする．標準束の二乗根 $K_X^{1/2}$ ($K_X^{1/2} \otimes K_X^{1/2} \simeq K_X$) を一つ固定する．階数が 2 の正則ベクトル束 $\mathbb{K}_2$ を $\mathbb{K}_2 := K_X^{1/2} \oplus K_X^{-1/2}$ と定める．正則二次微分 $q \in H^0(K_X^2)$ を一つとる．$\mathrm{End}\mathbb{K}_2 \otimes K_X \to X$ の正則切断 $\Phi(q)$ を以下のように定義する:

$$\Phi(q) := \begin{pmatrix} 0 & q \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

ただし 1 は，自明束 $K_X^{-1} \otimes K_X$ の標準切断である．

(前頁から続く)

Higgs 束の Kobayashi-Hitchin 対応と呼ばれる定理 (Hitchin'87, Simpson'88) から, $\mathbb{K}_2$ 上の Hermite 計量 h であって, $\det(h) = 1$ かつ, 以下の $\mathbb{K}_2$ 上の接続 $D_q(h)$ の曲率が零 (平坦) となるようなものが唯一つ存在する:

$$D_q(h) := \nabla^h + \Phi(q) + \Phi(q)^{*h}.$$

ただし, ∇^h は h の Chern 接続であって, $\Phi(q)^{*h}$ は h に関する随伴である. h のことを調和計量と呼ぶ. 対称性に関する考察と調和計量の一意性を用いると, $h = (h_1, h_1^{-1})$ とスプリットすることを確かめることができる. 調和計量 h から, $D_q(h)$ のホロノミー表現に関して同変な, X の普遍被覆空間 $\widetilde{X}$ を定義域とする写像

$$\hat{h} : \widetilde{X} \to \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})/\mathrm{SO}(2)$$

が自然に構成されるが, この写像は調和写像になる (さらに, $q = 0$ の場合には, 双正則写像になる (Simpson'88)).

(前頁から続く)

$H_1 := h_1^{-1} \otimes h_1^{-1}$ と $T_X := K_X^{-1}$ 上の Hermite 計量 (Kähler 計量) を定める. 調和計量から誘導される以下の対称二形式 $g(q)$ は, Gauss 曲率が -4 の正定値 Riemann 計量になる:

$$g(q) := q + (H_1 + q \otimes \bar{q} \otimes H_1^{-1}) + \bar{q}.$$

さらに, X 上の全ての Gauss 曲率 -4 の Riemann 計量はこの方法で構成される. 特に, $q = 0$ の場合には $g(0) = H_1$ は定曲率 Kähler 計量になる.

本講演では, 上述した具体例において, 調和計量から構成される Kähler 計量 H_1 と, 調和計量と正則二次微分 q から構成される q の零点において退化した Kähler 計量 $q \otimes \bar{q} \otimes H_1^{-1}$ に着目する. これらの拡張として冒頭で述べたものを導入する.

上述した具体例の以下のような一般化が知られている. 階数が r の正則ベクトル束 $\mathbb{K}_r \to X$ を以下のように定める:

$$\mathbb{K}_r \coloneqq K_X^{\frac{r-1}{2}} \oplus K_X^{\frac{r-3}{2}} \oplus \cdots \oplus K_X^{-\frac{r-3}{2}} \oplus K_X^{-\frac{r-1}{2}}.$$

正則ベクトル束 $\mathbb{K}_r$ を階数が小さい場合に具体的に表示すると, 以下の通り:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{K}_2 = K_X^{1/2} \oplus K_X^{-1/2} \ (r = 2),\\
&\mathbb{K}_3 = K_X \oplus \mathbb{C} \oplus K_X^{-1} \ (r = 3),\\
&\mathbb{K}_4 = K_X^{3/2} \oplus K_X^{1/2} \oplus K_X^{-1/2} \oplus K_X^{-3/2} \ (r = 4),\\
&\cdots
\end{aligned}$$

$r = 2$ の場合は, 先ほど紹介したものである. 定義には Lie 環論的な背景がある.

標準束の r 乗 $K_X^r \to X$ の正則切断 $q \in H^0(K_X^r)$ を一つとる.
$H^0(\mathrm{End}\mathbb{K}_r \otimes K_X)$ の元 $\Phi(q)$ を以下のように定義する:

$$\Phi(q) := \begin{pmatrix} 0 & & & q \\ 1 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

組 $(\mathbb{K}_r, \Phi(q))$ は cyclic Higgs 束と呼ばれている (Hitchin'92, Baraglia'10). Higgs 束の Kobayashi-Hitchin 対応の一般論から, Hermite 計量 h で $\det(h) = 1$ を満たし以下の接続が平坦となるものが唯一つ存在する:

$$D_q(h) := \nabla^h + \Phi(q) + \Phi(q)^{*h}.$$

$D_q(h)$ が平坦になるような h を調和計量と呼ぶ. 調和計量 h は $h = (h_1, \dots, h_r)$ とスプリットし, また $h_j = h_{r-j+1}^{-1}$ を満たすことを確かめることができる. 調和計量から調和写像 $\hat{h} : \tilde{X} \to \mathrm{SL}(r, \mathbb{R})/\mathrm{SO}(r)$ が自然に構成される.

調和計量 $h = (h_1, \ldots, h_r)$ の隣接成分の差が, $r-1$ 個の $T_X := K_X^{-1}$ 上の Hermite 計量を定める:

$$H_j := h_j^{-1} \otimes h_{j+1} \ (j = 1, \ldots, r-1).$$

同様に, h_1 と h_r の差が, K_X^{r-1} の Hermite 計量を定める:

$$H_r := h_r^{-1} \otimes h_1.$$

h_q を $h_q(u,v) := \langle q_x, u\rangle \overline{\langle q_x, v\rangle}$ $(x \in X, u, v \in (K_X^{-r})_x)$ により定まる K_X^{-r} 上の q の零点において退化した Hermite 計量とする. H_r と h_q から, T_X 上に退化した Hermite 計量が定まる:

$$H_{r,q} := H_r \otimes h_q.$$

$H_1, \ldots, H_{r-1}, H_{r,q}$ の体積密度の総和は, 調和写像 $\hat{h}$ のエネルギー密度に一致する.

対角形の初期計量 $h_{\mathrm{in}} = (h_{\mathrm{in},1}, \ldots, h_{\mathrm{in},r})$ $(\det(h_{\mathrm{in}}) = 1)$ を一つ固定する. Kähler 計量 ω_X を一つ固定し, h_X を ω_X が $K_X \to X$ に誘導する Hermite 計量とする. このとき, Hermite 計量 $h := (e^{\xi_1} h_{\mathrm{in},1}, \ldots, e^{\xi_r} h_{\mathrm{in},r})$ $(\xi_1 + \cdots + \xi_r)$ から定まる接続 $D_q(h)$ が平坦になることは $(\xi_1, \ldots, \xi_r)$ が以下の楕円型偏微分方程式の解となることと同値である:

$$\Delta_{\omega_X} \xi_j - \left\{ 4k_j e^{-\xi_j + \xi_{j+1}} - 4k_{j-1} e^{-\xi_{j-1} + \xi_j} \right\} = -2\sqrt{-1} \Lambda_{\omega_X} F_{h_{\mathrm{in},j}},$$
$$(j = 1, \ldots, r).$$

ただし, 各記号を次のように定めた:

- $F_{h_{\mathrm{in},j}}$ $(j = 1, \ldots, r-1)$ は $h_{\mathrm{in},j}$ の Chern 接続の曲率である.
- k_j $(j = 1, \ldots, r-1)$ を, $k_j := |1|_{h_{\mathrm{in},j}^{-1} \otimes h_{\mathrm{in},j+1} \otimes h_X}$ と定めた.
- k_r を $k_r := |1|_{h_{\mathrm{in},1} \otimes h_{\mathrm{in},r}^{-1} \otimes h_q \otimes h_X} = |q|_{h_{\mathrm{in},1} \otimes h_{\mathrm{in},r}^{-1} \otimes h_X}$ と定めた.
- Λ_{ω_X} は $\omega_X \wedge$ の双対であり, Δ_{ω_X} は $\Delta_{\omega_X} := -2\sqrt{-1} \Lambda_{\omega_X} \partial \bar{\partial}$ により定まる幾何学的 Laplacian である.

調和計量 $(h_1, \dots, h_r)$ や, それから構成される Kähler 計量 $(H_1, \dots, H_{r-1}, H_{r,q})$ は, q そのものに依存するのではなく, q の絶対値にのみ依存するものである. すなわち, q から自然に定まる Hermite 計量 h_q に依存するものである. h_q から定まる $K_X \to X$ 上の Hermite 計量 $h_q^{-1/r}$ は正曲率の特異 Hermite 計量である. この観察から, 任意の正曲率特異 Hermite 計量への上述した構成の拡張を考えたので, それを以下紹介する.

$\mathbb{C}$ を複素平面, $D \subseteq \mathbb{C}$ を領域とする. $z \in \mathbb{C}$ と $r > 0$ に対し, $B_r(z)$ で z を中心とする半径 r の開球を表す:

$$B_r(z) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < r\}.$$

D 上の関数 $u : D \to [-\infty, \infty)$ であって, 恒等的に $-\infty$ ではなく, 以下の条件を満たすものを, 劣調和関数と呼ぶ:

- u は, 上半連続関数である.
- 任意の $z \in D$ と任意の $B_r(z) \subseteq D$ なる $r > 0$ に対し, 以下の不等式が成り立つ:

$$u(z) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z + re^{\sqrt{-1}\theta}) d\theta.$$

例えば, f を正則関数としたとき, $\log |f|$ は劣調和関数である.

(cf. T. Ransford, *Potential theory in the complex plane*, No. 28. Cambridge university press, 1995.)

関数 $u : D \to [-\infty, \infty)$ が劣調和関数であることは, u が局所可積分な上半連続関数であって, 以下の不等式をカレントの意味で満たすことと同値である:

$$\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}u \geq 0.$$

例えば, $\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\log|f|$ (f : 正則関数) は f の零点の全体がサポートになるような測度である.
Riemann 面 X 上の局所的に滑らかな関数と劣調和関数の和で表すことができる関数を概劣調和関数と呼ぶ. $K_X \to X$ 上の滑らかな Hermite 計量 h_{ref} を一つ固定する. 概劣調和関数 φ を用いて $e^{-\varphi}h_{\mathrm{ref}}$ と書くことができる Hermite 計量を特異 Hermite 計量と呼ぶ. 特異 Hermite 計量には, カレントの意味で曲率を定義することができる.

$F_{h_{\mathrm{ref}}}$ を h_{ref} の曲率とする．概劣調和関数 φ が以下の不等式をカレントの意味で満たすとき，φ は $F_{h_{\mathrm{ref}}}$-劣調和関数であるという:

$$\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\varphi + \sqrt{-1}F_{h_{\mathrm{ref}}} \geq 0.$$

これは，$e^{-\varphi}h_{\mathrm{ref}}$ の曲率が ≥ 0 であることと同値である (上式の左辺が曲率の定義である)．任意の零でない $q_N \in H^0((K_X)^N)$ に対し，$\frac{1}{N}\log|q_N|^2_{h_{\mathrm{ref}}}$ は $F_{h_{\mathrm{ref}}}$-劣調和関数である．このとき，

$$e^{-\frac{1}{N}\log|q_N|^2_{h_{\mathrm{ref}}}}h_{\mathrm{ref}}$$

は $h_{q_N}^{-1/N}$ に一致する．さらに，$SH(X, F_{h_{\mathrm{ref}}})$ を $F_{h_{\mathrm{ref}}}$-劣調和関数の全体とすると，Demailly の近似定理から，以下の集合は L^1_{loc}-位相に関して $SH(X, F_{h_{\mathrm{ref}}})$ の中で稠密である:

$$\left\{\frac{1}{N}\log|q_N|^2_{h_{\mathrm{ref}}} \mid q_N \in H^0((K_X)^N), N \in \mathbb{Z}_{\geq 1}, q_N \neq 0\right\}$$

先ほどの設定に戻る:

- X を (開かもしれない) Riemann 面, $K_X \to X$ をその標準束とする.
- 標準束の二乗根 $K_X^{1/2}$ を固定して, 階数 r の正則ベクトル束 $\mathbb{K}_r$ を $\mathbb{K}_r := K_X^{\frac{r-1}{2}} \oplus \cdots \oplus K_X^{-\frac{r-1}{2}}$ と定める.
- $\mathbb{K}_r$ 上に対角形の初期計量 $h_{\mathrm{in}} = (h_{\mathrm{in},1}, \ldots, h_{\mathrm{in},r})$ を一つ固定する.
- X 上に Kähler 計量 ω_X を一つ固定する. h_X を ω_X が誘導する $K_X \to X$ 上の Hermite 計量とする.
- $h_{\mathrm{ref}}^r = h_{\mathrm{in},r}^{-1} \otimes h_{\mathrm{in},1} \otimes h_X$ となるように調整をしておく.

各 $\varphi \in SH(X, F_{h_{\mathrm{ref}}})$ に対し, φ に付随した以下の PDE を導入する:

$$\Delta_{\omega_X}\xi + \sum_{j=1}^{r} 4k'_j e^{(v_j,\xi)} v_j = -2\sqrt{-1}\Lambda_{\omega_X} F_{h_{\mathrm{in}}}. \tag{1}$$

- $\xi := (\xi_1, \ldots, \xi_r)$ は $\xi_1 + \cdots + \xi_r = 0$ なる実数値関数の組で, PDE (1) の解.
- $v_1, \ldots, v_r$ は標準基底 $u_1, \ldots, u_r \in \mathbb{R}^r$ を用いて $v_j := u_{j+1} - u_j$ $(j = 1, \ldots, r-1)$, $v_r := u_1 - u_r$ と定義される. また $\mathbb{R}^r$ を $r \times r$-行列の対角成分と同一視している.
- $k'_j := k_j = |1|_{h_{\mathrm{in},j}^{-1} \otimes h_{\mathrm{in},j+1} \otimes h_X}$ $(j = 1, \ldots, r-1)$, $k'_r := e^{r\varphi}$ である.

• $\varphi = \frac{1}{r}\log|q|^2_{h_{\mathrm{ref}}}$ $(q \in H^0(K_X^r))$ の場合には, $e^{-\varphi}h_{\mathrm{ref}}$ は $h_q^{-1/r}$ と一致し, 上記 PDE は $h = (e^{\xi_1}h_{\mathrm{in},1}, \ldots, e^{\xi_r}h_{\mathrm{in},r})$ が定める接続 $D_q(h) = \nabla^h + \Phi(q) + \Phi(q)^{*h}$ が平坦という条件と同値である.

• また Demailly の近似定理から, PDE (1) は $D_{q_N^{1/N}}(h) = \nabla^h + \Phi(q_N^{1/N}) + \Phi(q_N^{1/N})^{*h}$ $(q_N \in H^0((K_X^r)^N))$ が平坦という条件の $N \to \infty$ の極限であると見做せる.

以下の PDE を導入した:

$$\Delta_{\omega_X}\xi + \sum_{j=1}^{r} 4k_j' e^{(v_j,\xi)} v_j = -2\sqrt{-1}\Lambda_{\omega_X} F_{h_{\mathrm{in}}}. \tag{2}$$

次が成り立つ:

定理 (M.'23)

X を開 Riemann 面に埋め込まれた境界付き Riemann 面とする. 任意の境界上の連続関数
$\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_r) : \partial X \to \mathbb{R}^r$ $(\eta_1 + \cdots + \eta_r = 0)$ に対して, 以下を満たす $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_r) : X \to \mathbb{R}^r$ $(\xi_1 + \cdots + \xi_r = 0)$ が存在する:

(i) ξ は任意の $\alpha \in (0,1)$ に対して, $C^{1,\alpha}$-級の関数であって, PDE (2) の弱解である.

(ii) $\lim_{z\to\zeta} \xi(z) = \eta(\zeta)$ が任意の $\zeta \in \partial X$ に対して成り立つ.

さらに, 上記条件 (i) と (ii) を満たす ξ は唯一つである.

定理 (M.'24)

X を種数が 2 以上のコンパクト Riemann 面とする．このとき，PDE (2) は唯一つの $C^{1,\alpha}$-級 (for any $\alpha \in (0,1)$) の弱解 ξ を持つ．

$h = (e^{\xi_1} h_{\mathrm{in},1}, \ldots, e^{\xi_r} h_{\mathrm{in},r})$ を PDE (2) の解から構成される Hermite 計量とする．隣接成分の差をとることにより，Kähler 計量 $H_1(\varphi), \ldots, H_{r-1}(\varphi), H_{r,\varphi}(\varphi)$ が cyclic Higgs 束の場合と同様に構成される．また $H_1(\varphi), \ldots, H_{r-1}(\varphi), H_{r,\varphi}(\varphi)$ の一意性も適当な意味で成り立つ．以下の問題を提起したい:

問題 (M.)

$H_1(\varphi), \ldots, H_{r-1}(\varphi), H_{r,\varphi}(\varphi)$ には $e^{-\varphi} h_{\mathrm{ref}}$ の情報がどのように反映されるか? 例えば，$\varphi_N := \frac{1}{rN} \log |q_N|^2_{h_{\mathrm{ref}}}$ $(q_N \in H^0((K_X^r)^N))$ のとき，$H_1(\varphi_N), \ldots, H_{r-1}(\varphi_N), H_{r,\varphi_N}(\varphi_N)$ には q_N の零点の個数と位置の情報がどのように反映されるか? $N \to \infty$ で何が起きるか?