リーマンペンローズ不等式の一般化

泉 圭介

名古屋大 素粒子宇宙起源研究所
多元数理科学研究科

Ref: PTEP 2021 (2021) 8, 083E02
Keisuke Izumi, Yoshimune Tomikawa, Tetsuya Shiromizu, Hirotaka Yoshino
PTEP 2023 (2023) 4, 043E01
Keisuke Izumi, Yoshimune Tomikawa, Tetsuya Shiromizu, Hirotaka Yoshino

話の流れ

1、定理の主張

2、不等式の見積もり

3、証明の概要

4、スムース化

記法

抽象添字記法

多様体 (M, g)の接ベクトルを v^a と表す。 $v^a := v^\mu \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)$

余接ベクトルは u_a と表す。 $u_a := u_\mu \, dx^\mu$

同様に、テンソルを $T^{abc\cdots}{}_{de\cdots\cdots}$ と書く。

同じ添え字が出てきたら、縮約を取る(アインシュタイン規約) $T^{abc}{}_{db}$

接ベクトルと余接ベクトルは計量により対応づける

接ベクトルv^aに対し余接ベクトルv_aは $v_a := g_{ab} v^b$

幾何学量の表記

Rは曲率量を表す。添え字の数に応じて、リーマンテンソル、リッチテンソル、スカラー曲率を表す。

$Riem =: R^a{}_{bcd}$ $Ric =: R_{ab} = R^c{}_{acb}$ $R = g^{ab} R_{ab}$: スカラー曲率

第二基本形式(外的曲率)は k_{ab} と書いて、平均曲率は$k := g^{ab} k_{ab}$ と書く

${}^{(3)}R$: ３次元多様体のスカラー曲率

${}^{(2)}R$: ２次元面のスカラー曲率(３次元多様体に埋め込まれた面)

その他

テンソルの(計量)ノルム: $v_a{}^2 := v_a v^a$, ${T_{ab}}^2 := T_{ab} T^{ab}$, $\cdots$

微分演算子の縮約: $\nabla^2 \phi := g^{ab} \nabla_a \nabla_b \phi$ (∇_a : 共変微分)

漸近平坦空間とADM質量

３次元多様体 (M, g): 完備、滑らか、

def: 漸近平坦性（Bondi, ver der Burg, Metzner (1962)）

(M, g)が漸近平坦とは

$^{\exists}K \subset M$

s.t.

1, K が1つの無限遠を持つ

2, K が$\mathbb{R}^3 \setminus B_1(0)$と微分同相

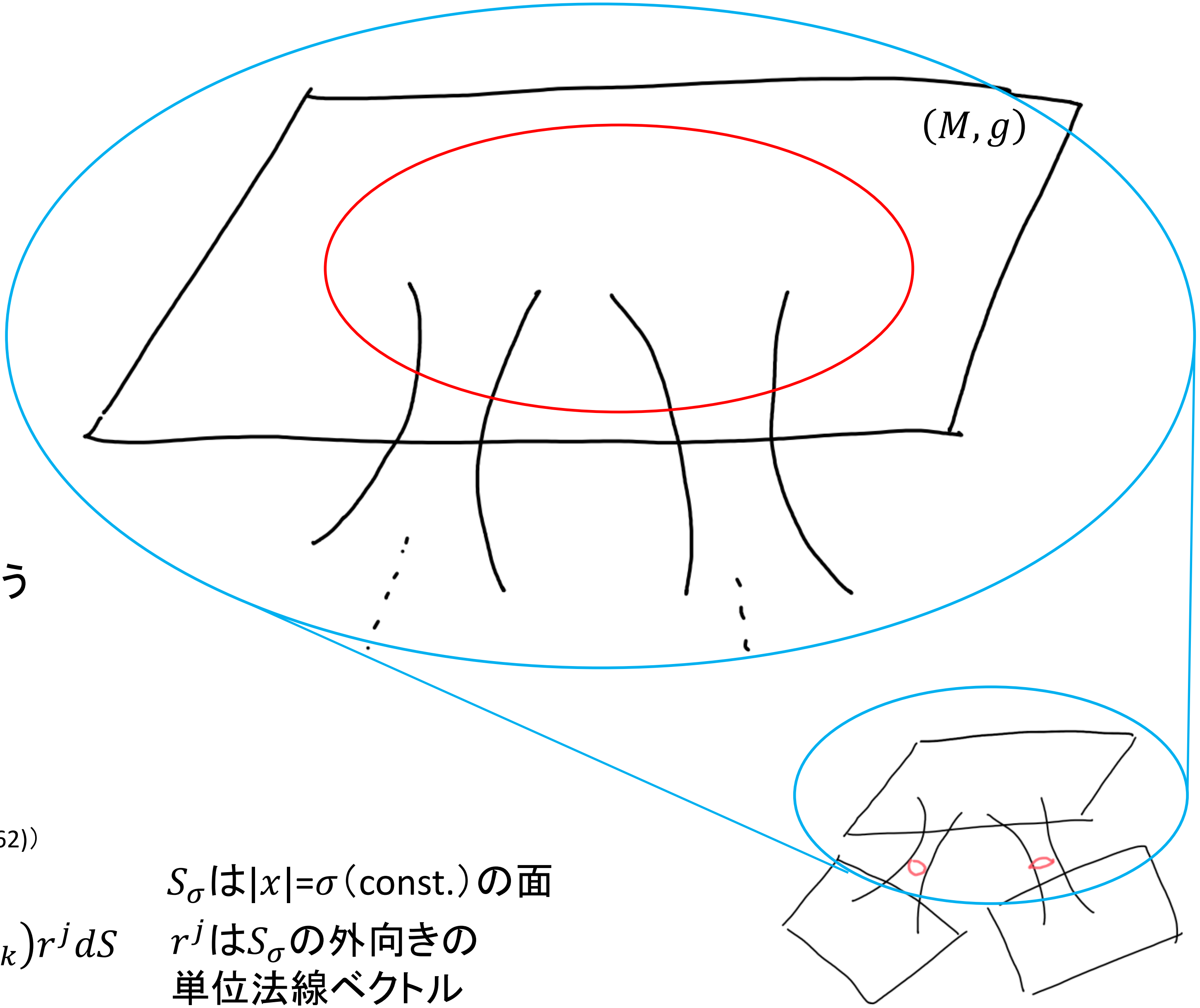
3, 計量成分 g_{ij}が以下のようにふるまう

$$g_{ij} = \delta_{ij} + O(|x|^{-1})$$
$$\partial_k g_{ij} = O(|x|^{-2})$$
$$\partial_l \partial_k g_{ij} = O(|x|^{-3})$$

def: ADM質量(エネルギー)（Arnowitt, Deser, Misner (1962)）

$$m = \frac{1}{16\pi} \lim_{\sigma \to \infty} \int_{S_\sigma} (\partial_k g_{jk} - \partial_j g_{kk}) r^j dS$$

S_σは$|x|$=σ(const.)の面
r^jはS_σの外向きの
単位法線ベクトル



リーマン・ペンローズ不等式

Thm: リーマン-ペンローズ不等式 （Huisken, Ilmanen(2001), Bray(2001)）

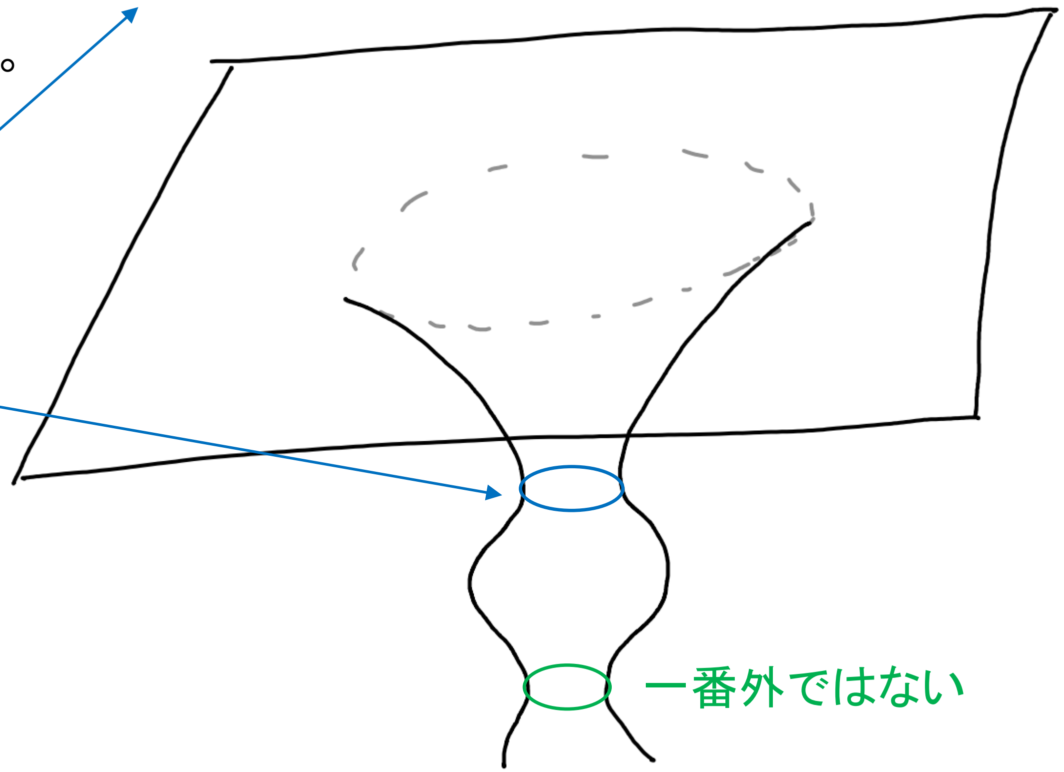
３次元多様体 (M,g): 完備、滑らか、非負曲率（$R \geq 0$）、漸近平坦、ADM質量m

∂Mは漸近平坦な無限遠と一番外にある極小曲面Sからなる。

このとき、極小曲面Sの面積Aは $A \leq 4\pi\,(2m)^2$を満たす。

等号成立は空間が
シュバルツシルト解
（球対称ブラックホール解）
の時間一定面に等しいときのみ

その面を取り囲む極小曲面が
M内に存在しない。



リーマン・ペンローズ不等式の一般化

Thm: リーマン-ペンローズ不等式（Huisken, Ilmanen(2001), Bray(2001)）

３次元多様体 (M, g): 完備、滑らか、非負曲率（$R \geq 0$）、漸近平坦、ADM質量m

∂Mは漸近平坦な無限遠と一番外にある極小曲面Sからなる。

このとき、極小曲面Sの面積Aは $A \leq 4\pi\,(2m)^2$を満たす。

等号成立は空間が
シュバルツシルト解
（球対称ブラックホール解）
の時間一定面に等しいときのみ

Thm: 重力検知面の面積不等式（Izumi, Tomikawa, Shiromizu, Yoshino (2021)）

３次元多様体 (M, g): 完備、滑らか、非負曲率（$R \geq 0$）、漸近平坦、ADM質量m

∂Mは漸近平坦な無限遠といくつかの境界Nからなる
すべての境界Nは、パラメータαの重力検知面で囲われる

＋もう少し仮定が必要

このとき、重力検知面の面積Aは $A \leq 4\pi \left(\frac{3+4\alpha}{1+2\alpha}\,m\right)^2$を満たす。

等号成立は空間が
シュバルツシルト解
（球対称ブラックホール解）
の時間一定面に等しいときのみ

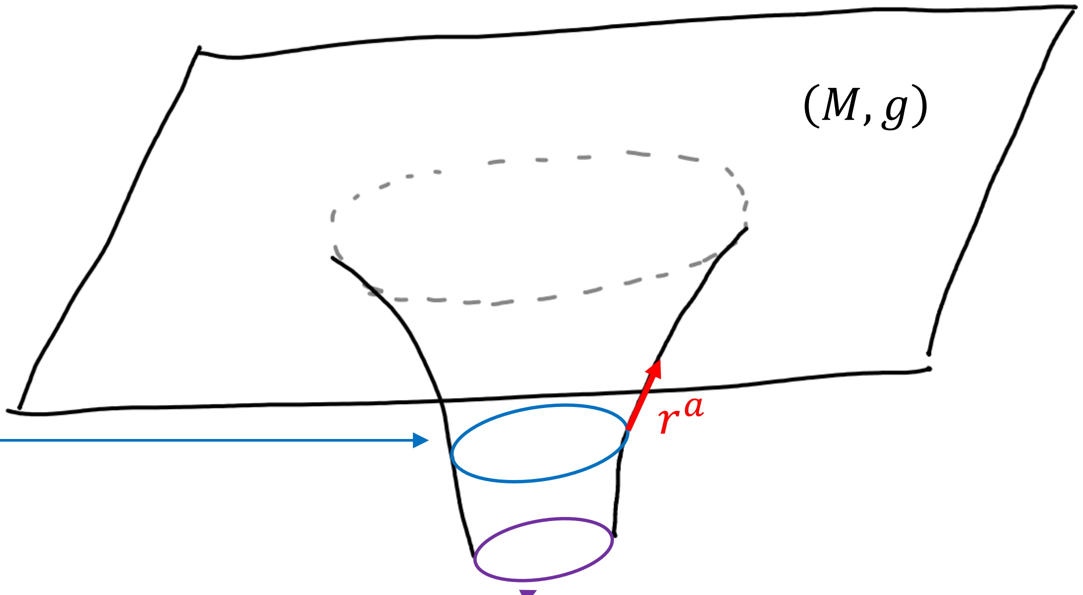
重力検知面

def: 重力検知面（Izumi, Tomikawa, Shiromizu, Yoshino (2021)）

(M,g)に埋め込まれた滑らかな閉曲面Sの近傍に
逆平均曲率流で葉層構造を取り、Sのいたるところで

$$r^a D_a k \geq \alpha k^2 \quad かつ \quad k > 0$$

が満たされるとき、Sをパラメータαの重力検知面と呼ぶ。
ここで、r^aはSの単位法ベクトル、D_aは(M,g)の共変微分、
αは$\alpha > -\frac{1}{2}$満たすある定数である。（kは各葉層の平均曲率。）



Thm: 重力検知面の面積不等式（Izumi, Tomikawa, Shiromizu, Yoshino (2021)）

＋もう少し仮定が必要

３次元多様体 (M,g): 完備、滑らか、非負曲率（$R \geq 0$）、漸近平坦、ADM質量m

∂Mは漸近平坦な無限遠といくつかの境界Nからなる
すべての境界Nは、パラメータαの重力検知面で囲われる

このとき、重力検知面の面積Aは $A \leq 4\pi \left(\frac{3+4\alpha}{1+2\alpha} m\right)^2$を満たす。

等号成立は空間が
シュバルツシルト解
（球対称ブラックホール解）
の時間一定面に等しいときのみ

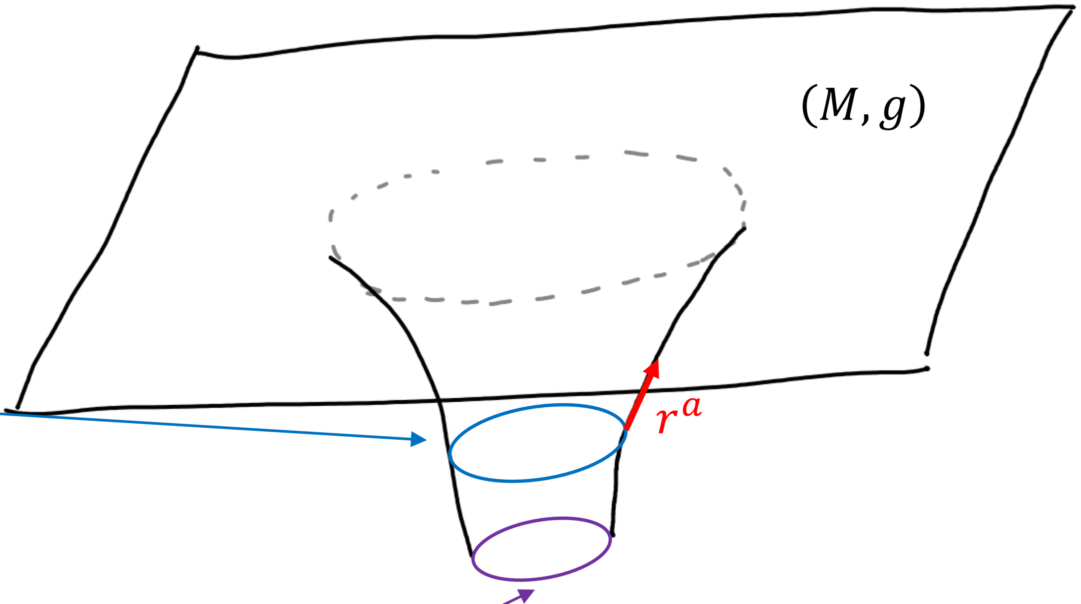
重力検知面

def: 精査された重力検知面 （Izumi, Tomikawa, Shiromizu, Yoshino (2023)）

(M,g)に埋め込まれた滑らかな閉曲面Sのいたるところで

$${}^{(2)}R + 2\,k\mathcal{D}^2 k^{-1} \geq \left(2\alpha + \frac{3}{2}\right)k^2 \quad \text{かつ} \quad k > 0$$

が満たされるとき、Sをパラメータαの重力検知面と呼ぶ。
ここで、r^aはSの単位法ベクトル、$\mathcal{D}_a$はSの共変微分、
${}^{(2)}R$は Sのスカラー曲率、αは$\alpha > -\frac{1}{2}$満たすある定数である。
（kは平均曲率。）



Thm: 重力検知面の面積不等式 （Izumi, Tomikawa, Shiromizu, Yoshino (2021)）

＋もう少し仮定が必要

３次元多様体 (M,g): 完備、滑らか、非負曲率（$R \geq 0$）、漸近平坦、ADM質量m
∂Mは漸近平坦な無限遠といくつかの境界Nからなる
すべての境界Nは、パラメータαの重力検知面で囲われる

このとき、重力検知面の面積Aは $A \leq 4\pi\left(\frac{3+4\alpha}{1+2\alpha}\,m\right)^2$ を満たす。

等号成立は空間が
シュバルツシルト解
（球対称ブラックホール解）
の時間一定面に等しいときのみ

パラメータαを持つ面の位置

def: 重力検知面

$r^a D_a k \geq \alpha k^2$　かつ　$k > 0$ ⇨ $\alpha \to \infty$は、$k \to 0$に対応。⇨ $\alpha \to \infty$は、極小曲面。

有界

$$r^a D_a k = -\varphi^{-1}\mathcal{D}^2\varphi - \frac{1}{2}{}^{(3)}R + \frac{1}{2}{}^{(2)}R - \frac{1}{2}(k^2 + k_{ab}k^{ab}).$$

$\mathcal{D}_a$は面上の誘導計量によるの共変微分

def: 漸近平坦性

$|x|$ =const.面上で

$$g_{ij} = \delta_{ij} + O(|x|^{-1})$$
$$\partial_k g_{ij} = O(|x|^{-2})$$
$$\partial_l \partial_k g_{ij} = O(|x|^{-3})$$

⇨

$$k = \frac{2}{|x|} + O(|x|^{-2})$$
$$r^a D_a k = -\frac{1}{|x|^2} + O(|x|^{-3})$$

⇨ $\alpha \to -\frac{1}{2}$は、無限遠の球面。

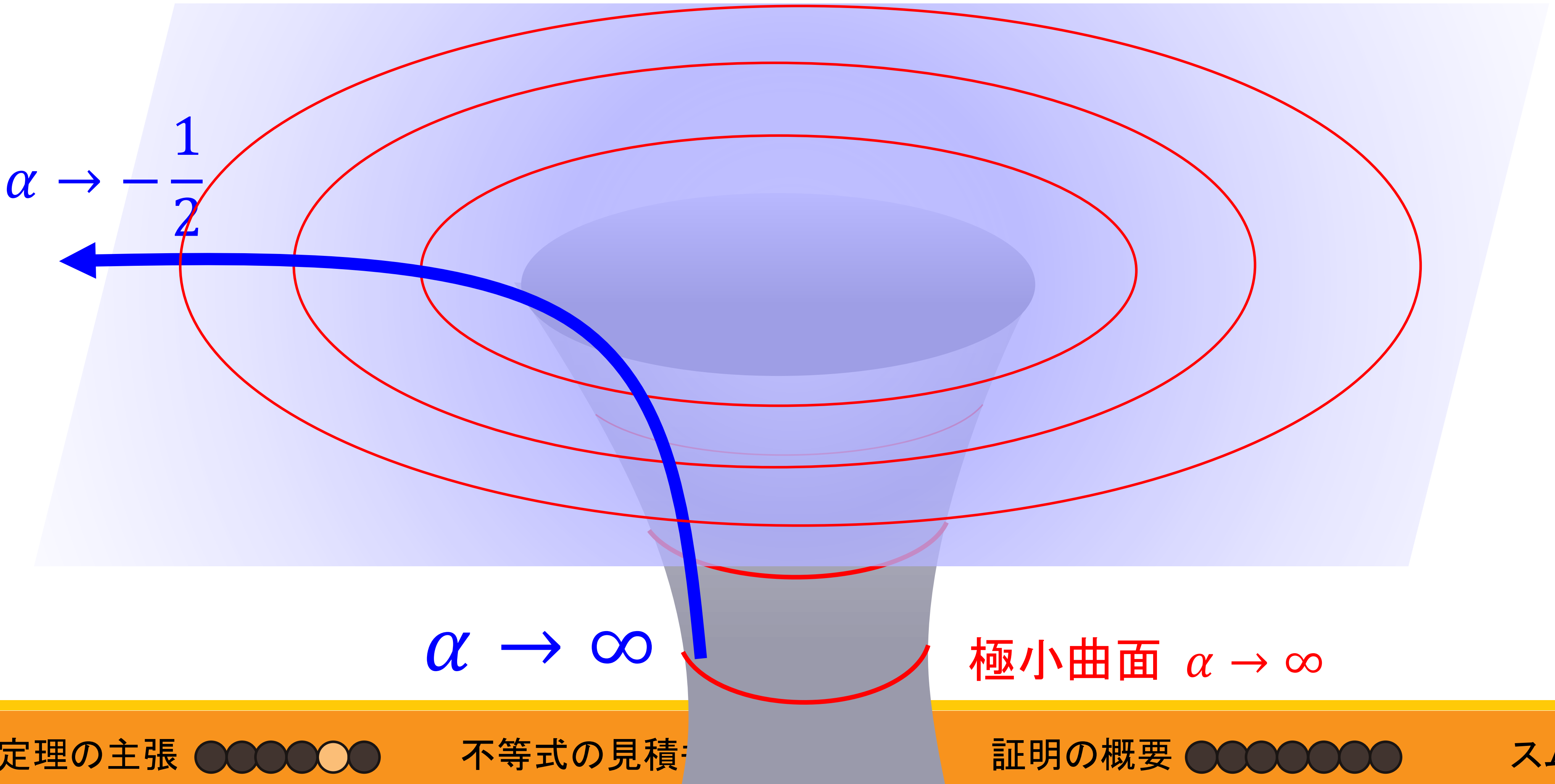
パラメータαを持つ面の位置

$\alpha \to \infty$は、極小曲面。

$\alpha \to -\frac{1}{2}$は、無限遠の球面。

def: 重力検知面

$r^a D_a k \geq \alpha k^2$　かつ　$k > 0$



リーマン・ペンローズ不等式の一般化

$\alpha \to \infty$ は、極小曲面。

$$\left(\frac{3+4\alpha}{1+2\alpha}\,m\right)^2 \to (2\,m)^2$$

$\alpha \to -\frac{1}{2}$ は、無限遠の球面。

$$\left(\frac{3+4\alpha}{1+2\alpha}\,m\right)^2 \to \infty$$

Thm: リーマン-ペンローズ不等式 （Huisken, Ilmanen(2001), Bray(2001)）

３次元多様体 (M, g): 完備、滑らか、非負曲率（$R \geq 0$）、漸近平坦、ADM質量 m

∂M は漸近平坦な無限遠と一番外にある極小曲面 S からなる。

このとき、極小曲面 S の面積 A は $A \leq 4\pi\,(2m)^2$ を満たす。

等号成立は空間が
シュバルツシルト解
（球対称ブラックホール解）
の時間一定面に等しいときのみ

Thm: 重力検知面の面積不等式 （Izumi, Tomikawa, Shiromizu, Yoshino (2021)）

３次元多様体 (M, g): 完備、滑らか、非負曲率（$R \geq 0$）、漸近平坦、ADM質量 m

∂M は漸近平坦な無限遠といくつかの境界 N からなる

すべての境界 N は、パラメータ α の重力検知面で囲われる

＋もう少し仮定が必要

このとき、重力検知面の面積 A は $A \leq 4\pi \left(\frac{3+4\alpha}{1+2\alpha}\,m\right)^2$ を満たす。

リーマン・ペンローズ不等式の一般化

高次元への拡張

$\alpha \to \infty$は、極小曲面。

$$\left(\frac{3+4\alpha}{1+2\alpha}\,m\right)^2 \to (2\,m)^2$$

$\alpha \to -\frac{1}{2}$は、無限遠の球面。

$$\left(\frac{3+4\alpha}{1+2\alpha}\,m\right)^2 \to \infty$$

Thm: リーマン-ペンローズ不等式 （Huisken, Ilmanen(2001), Bray(2001)）

３次元多様体 (M, g): 完備、滑らか、非負曲率（$R \geq 0$）、漸近平坦、ADM質量m

n次元（$3 \leq n \leq 7$）

∂Mは漸近平坦な無限遠と一番外にある極小曲面Sからなる。

このとき、極小曲面Sの面積Aは $A \leq 4\pi\,(2m)^2$を満たす。

$$A \leq \omega_{n-1}(2m)^{\frac{n-1}{n-2}}$$ （Bray, Lee(2009)）

ω_{n-1}: 単位$(n-1)$次元球面の表面積

等号成立は空間が
シュバルツシルト解
（球対称ブラックホール解）
の時間一定面に等しいときのみ

Thm: 重力検知面の面積不等式 （**Izumi**, Tomikawa, Shiromizu, Yoshino (2021)）

３次元多様体 (M, g): 完備、滑らか、非負曲率（$R \geq 0$）、漸近平坦、ADM質量m

n次元（$3 \leq n \leq 7$）

∂Mは漸近平坦な無限遠といくつかの境界Nからなる

すべての境界Nは、パラメータαの重力検知面で囲われる

＋もう少し仮定が必要

このとき、重力検知面の面積Aは $A \leq 4\pi\left(\frac{3+4\alpha}{1+2\alpha}\,m\right)^2$を満たす。

$$A \leq \omega_{n-1}\left(\frac{n+2(n-1)\alpha}{1+(n-1)\alpha}\,m\right)^{\frac{n-1}{n-2}}$$

（**Izumi**, Tomikawa, Shiromizu, Yoshino (2023)）

話の流れ

1、定理の主張

2、不等式の見積もり

3、証明の概要

4、スムース化

逆平均曲率流

<u>**def: 逆平均曲率流**</u>　（Geroch (1973)）

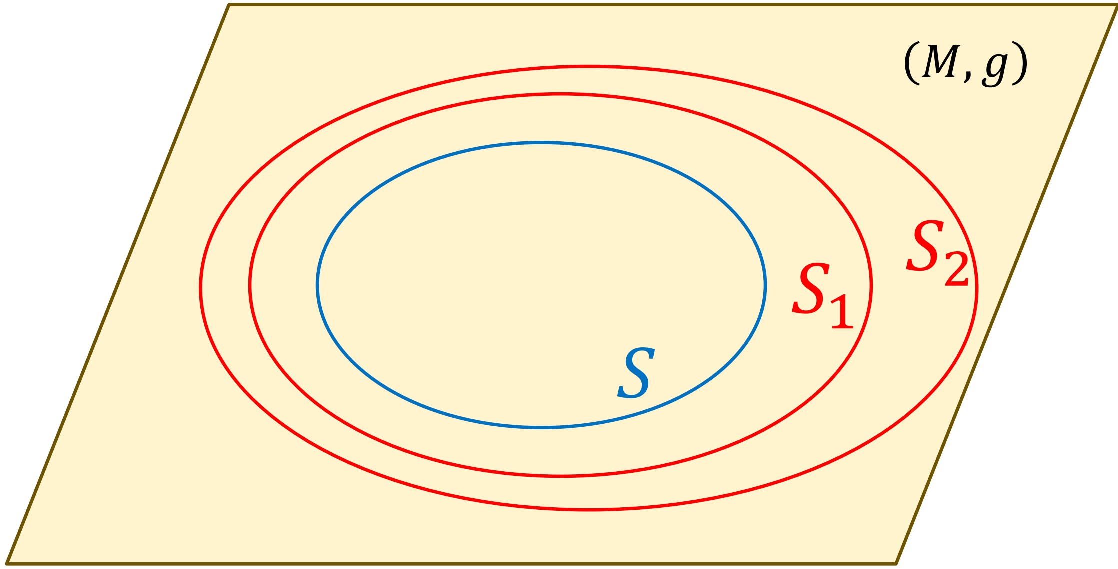
３次元多様体 (M,g)に埋め込まれた
いたるところで平均曲率kが非負の閉曲面Sからの
逆平均曲率流による葉層構造とは

葉層構造$(S_t)_{0\leq t<T}$
s.t.　１、$S_0 = S$
　２、S_tの面積要素dA_tの直交方向の速度をφと書いておくと

$$\mathcal{L}_t dA_t = k\varphi\, dA_t = dA_t$$

となるようにφをとる
ただし、$\mathcal{L}_t dA_t$はS_tに直交する束に沿ったdA_tのリー微分

このとき　$ds^2 = \varphi^2 dt^2 + g_{ij}dx^i dx^j$
という座標が張れて、　$k\varphi = 1$　である



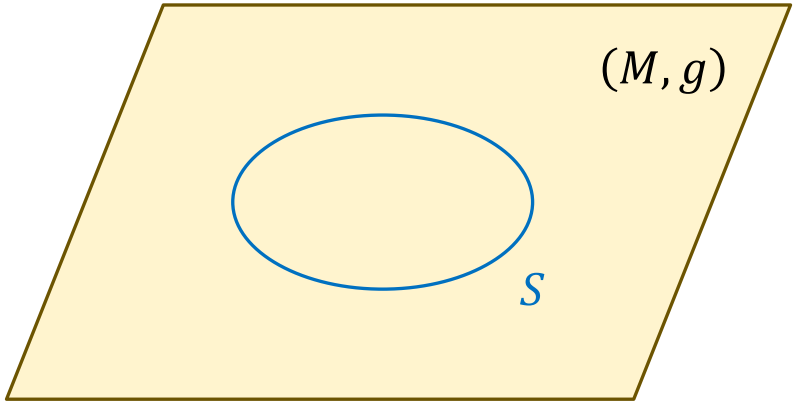
逆平均曲率流に伴う、面積A_tの変化

$$\frac{d}{dt}A_t = \frac{d}{dt}\int_S d\,A_t = \int_S \mathcal{L}_t d\,A_t = \int_S k\varphi d\,A_t = \int_S d\,A_t = A_t$$

$$A_t = \mathrm{A}_0 \exp\,(\mathrm{t})$$

局所エネルギー （Geroch (1973)）

$A(S)$: S の面積



def: Geroch質量(エネルギー)

3次元多様体 (M, g)に埋め込まれた閉曲面SのGerochエネルギー$E(S)$

$$E(S) := \frac{A^{1/2}(S)}{64\pi^{3/2}} \int_S \left(2\,{}^{(2)}R - k^2\right) dA$$

${}^{(2)}R$: Sのスカラー曲率

1, Geroch質量(エネルギー)はSを空間無限遠に飛ばす極限でADM質量(エネルギー)に一致する。

2, Geroch質量(エネルギー)の増大則

非負曲率(${}^{(3)}R \geq 0$)の3次元多様体 (M, g)の
Gerochエネルギーは逆平均曲率流による流れで増大する。

$$\frac{d}{dt} E(S_t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{A^{1/2}(S_t)}{64\pi^{3/2}} \int_{S_t} \left(2\,{}^{(2)}R - k^2\right) dA\right)$$

$$= \frac{A^{1/2}(S_t)}{64\pi^{3/2}} \int_{S_t} \left(2\varphi^{-1}\mathcal{D}^2\varphi + \tilde{k}_{ab}\tilde{k}^{ab} + {}^{(3)}R\right) dA \geq 0$$

${}^{(3)}R \geq 0$

部分積分して

$\varphi^{-2}\,|\mathcal{D}\varphi|^2 \geq 0$

$\tilde{k}_{ab} := k_{ab} - \frac{1}{2} k g_{ab}$

$\mathcal{D}_a$はS_tの共変微分

・逆平均曲率流で面のトポロジーは変化しない

$$\frac{d}{dt}\int_S {}^{(2)}R\, dA = 0$$

・幾何学的恒等式

$$2\mathcal{L}_t k = -2\varphi^{-1}\mathcal{D}^2\varphi - {}^{(3)}R + {}^{(2)}R - \left(k^2 + k_{ab}k^{ab}\right)$$

逆平均曲率流での面積の変化(前のスライド)

$$\frac{d}{dt} A(S_t) = A(S_t) \qquad \mathcal{L}_t dA_t = dA_t$$

不等式の見積もり （3次元の場合のみ） （Jang & Wald (1977)）

Geroch質量(エネルギー)

$$E(S) := \frac{A^{1/2}(S)}{64\pi^{3/2}} \int_S (2^{(2)}R - k^2)\, dA$$

2, Geroch質量(エネルギー)の増大則

$$E(S_0) \leq E(S_1) \leq \cdots \leq E(S_\infty) = \text{ADM質量}\ m$$

1, Geroch質量(エネルギー)はSを空間無限遠に飛ばす極限でADM質量(エネルギー)に一致する。

不等式の見積もり （3次元の場合のみ） （Jang & Wald (1977)）

Geroch質量（エネルギー）

$$E(S) := \frac{A^{1/2}(S)}{64\pi^{3/2}}\int_S (2^{(2)}R - k^2)dA$$

2, Geroch質量（エネルギー）の増大則

$$E(S_0) \leq E(S_1) \leq \cdots \leq E(S_\infty) = \text{ADM質量 } m$$

S_0が極小曲面$(k=0)$かつ
S^2トポロジーであったなら

1, Geroch質量（エネルギー）はSを空間無限遠に飛ばす極限でADM質量（エネルギー）に一致する。

$$E(S_0) = \frac{A^{1/2}(S_0)}{64\pi^{3/2}}\int_S (2^{(2)}R - k^2)dA = \frac{A^{1/2}(S_0)}{4\pi^{1/2}}$$

極小曲面 $\rightarrow k=0$
$S^2 \rightarrow \int_S {}^{(2)}R\, dA = 8\pi$

極小曲面から無限遠球面への逆平均曲率流があったとすると

$$\frac{A^{1/2}(S_0)}{4\pi^{1/2}} \leq m \quad \Rightarrow \quad A(S_0) \leq 4\pi(2m)^2$$

不等式の見積もり （3次元の場合のみ）

（Jang & Wald (1977)）

Geroch質量（エネルギー）

$$E(S) := \frac{A^{1/2}(S)}{64\pi^{3/2}} \int_S (2^{(2)}R - k^2)dA$$

2, Geroch質量（エネルギー）の増大則

$$E(S_0) \leq E(S_1) \leq \cdots \leq E(S_\infty) = \text{ADM質量 } m$$

S_0が極小曲面$(k=0)$かつ
S^2トポロジーであったなら

**1, Geroch質量（エネルギー）はSを空間無限遠に飛ばす極限で
ADM質量（エネルギー）に一致する。**

$$E(S_0) = \frac{A^{1/2}(S_0)}{64\pi^{3/2}} \int_S (2^{(2)}R - k^2)dA = \frac{A^{1/2}(S_0)}{4\pi^{1/2}}$$

極小曲面 $\rightarrow k = 0$
$S^2 \rightarrow \int_S {}^{(2)}R\, dA = 8\pi$

極小曲面から無限遠球面への逆平均曲率流があったとすると

$$\frac{A^{1/2}(S_0)}{4\pi^{1/2}} \leq m \quad \Rightarrow \quad A(S_0) \leq 4\pi(2m)\text{^}2$$

一般にはこのような逆平均曲率流は
存在するとは限らない

HuiskenとIlmanenはLevel Setsの手法を用い
逆平均曲率流をジャンプする流れに一般化した。
任意の空間でジャンプする流れを書くことが
できることを示し、証明が完成した。(2001)

不等式の見積もり（3次元の場合のみ）

（Izumi, Tomikawa, Shiromizu, Yoshino (2021)）

Geroch質量（エネルギー）

$$E(S) := \frac{A^{1/2}(S)}{64\pi^{3/2}} \int_S \left(2^{(2)}R - k^2\right) dA$$

2, Geroch質量（エネルギー）の増大則

$$E(S_0) \quad \leq \quad E(S_1) \quad \leq \quad \cdots \quad \leq \quad E(S_\infty) \quad = \quad \text{ADM質量 } m$$

S_0が重力検知面であったとき

$r^a D_a k \geq \alpha k^2$　かつ　$k > 0$

1, Geroch質量（エネルギー）はSを空間無限遠に飛ばす極限でADM質量（エネルギー）に一致する。

$$^{(2)}R = 2r^a D_a k + 2\varphi^{-1}\mathcal{D}^2\varphi + ^{(3)}R + (k^2 + k_{ab}k^{ab})$$

$\mathcal{D}_a$はS_0の誘導計量による共変微分

不等式の見積もり（3次元の場合のみ）

（Izumi, Tomikawa, Shiromizu, Yoshino (2021)）

Geroch質量（エネルギー）

$$E(S) := \frac{A^{1/2}(S)}{64\pi^{3/2}} \int_S \left(2{}^{(2)}R - k^2\right) dA$$

2，Geroch質量（エネルギー）の増大則

$$E(S_0) \leq E(S_1) \leq \cdots \leq E(S_\infty) = \text{ADM質量}\ m$$

1，Geroch質量（エネルギー）はSを空間無限遠に飛ばす極限でADM質量（エネルギー）に一致する。

S_0が重力検知面であったとき

$$r^a D_a k \geq \alpha k^2 \quad \text{かつ} \quad k > 0$$

$$\int_S {}^{(2)}R\, dA = \int_S \left[2 r^a D_a k + 2\varphi^{-1}\mathcal{D}^2\varphi + {}^{(3)}R + \left(k^2 + k_{ab}k^{ab}\right)\right] dA$$

$$\geq \int_S \left[\left(2\alpha + \frac{3}{2}\right) k^2 + 2\varphi^{-2}|\mathcal{D}_a\varphi|^2 + {}^{(3)}R + \tilde{k}_{ab}\tilde{k}^{ab}\right] dA$$

$$\geq \int_S \left(2\alpha + \frac{3}{2}\right) k^2 dA > 0$$

$\mathcal{D}_a$はS_0の誘導計量による共変微分

$$\tilde{k}_{ab} := k_{ab} - \frac{1}{2} k g_{ab}$$

不等式の見積もり （3次元の場合のみ）

（**Izumi**, Tomikawa, Shiromizu, Yoshino (2021)）

Geroch質量（エネルギー）

$$E(S) := \frac{A^{1/2}(S)}{64\pi^{3/2}} \int_S \left(2\,{}^{(2)}R - k^2\right) dA$$

2，Geroch質量（エネルギー）の増大則

$$E(S_0) \leq E(S_1) \leq \cdots \leq E(S_\infty) = \text{ADM質量}\ m$$

1，Geroch質量（エネルギー）はSを空間無限遠に飛ばす極限でADM質量（エネルギー）に一致する。

S_0が重力検知面であったとき

$r^a D_a k \geq \alpha k^2$　かつ　$k > 0$

$$\begin{aligned} 8\pi = \int_S {}^{(2)}R\, dA &= \int_S \left[2 r^a D_a k + 2\varphi^{-1}\mathcal{D}^2\varphi + {}^{(3)}R + \left(k^2 + k_{ab}k^{ab}\right)\right] dA \\ &\geq \int_S \left[\left(2\alpha + \frac{3}{2}\right)k^2 + 2\varphi^{-2}|\mathcal{D}_a\varphi|^2 + {}^{(3)}R + \tilde{k}_{ab}\tilde{k}^{ab}\right] dA \\ &\geq \int_S \left(2\alpha + \frac{3}{2}\right) k^2 dA > 0 \end{aligned}$$

$\mathcal{D}_a$はS_0の誘導計量による共変微分

$$\tilde{k}_{ab} := k_{ab} - \frac{1}{2} k g_{ab}$$

$$\int_S k^2 dA \leq \frac{16\pi}{4 + 3\alpha}$$

不等式の見積もり （3次元の場合のみ）

（Izumi, Tomikawa, Shiromizu, Yoshino (2021)）

Geroch質量（エネルギー）

$$E(S) := \frac{A^{1/2}(S)}{64\pi^{3/2}} \int_S \left(2\,{}^{(2)}R - k^2\right) dA$$

2, Geroch質量（エネルギー）の増大則

$$E(S_0) \quad \leq \quad E(S_1) \quad \leq \quad \cdots \quad \leq \quad E(S_\infty) \quad = \quad \text{ADM質量}\ m$$

S_0が重力検知面であったとき

$r^a D_a k \geq \alpha k^2$ かつ $k > 0$

$$E(S_0) := \frac{A^{\frac{1}{2}}(S_0)}{64\pi^{\frac{3}{2}}} \int_{S_0} \left(2\,{}^{(2)}R - k^2\right) dA \geq \frac{1+2\alpha}{3+4\alpha}\left(\frac{A(S_0)}{4\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow A(S_0) \leq 4\pi\left(\frac{3+4\alpha}{1+2\alpha} m\right)^2$$

$$8\pi = \int_S {}^{(2)}R\, dA = \int_S \left[2r^a D_a k + 2\varphi^{-1}\mathcal{D}^2\varphi + {}^{(3)}R + \left(k^2 + k_{ab}k^{ab}\right)\right] dA$$

$$\geq \int_S \left[\left(2\alpha + \frac{3}{2}\right)k^2 + 2\varphi^{-2}|\mathcal{D}_a\varphi|^2 + {}^{(3)}R + \tilde{k}_{ab}\tilde{k}^{ab}\right] dA$$

$$\geq \int_S \left(2\alpha + \frac{3}{2}\right) k^2 dA \quad > 0$$

$\mathcal{D}_a$はS_0の誘導計量による共変微分

$$\tilde{k}_{ab} := k_{ab} - \frac{1}{2} k g_{ab}$$

$$\int_S k^2 dA \leq \frac{16\pi}{4+3\alpha}$$

話の流れ

1、定理の主張

2、不等式の見積もり

3、証明の概要

4、スムース化

リーマン - ペンローズ不等式の一般化

極小曲面が非連結
の場合にも適用可能

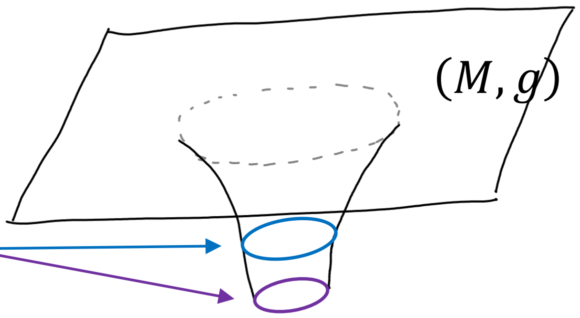
Thm: リーマン-ペンローズ不等式（Huisken, Ilmanen(2001), Bray(2001)）　高次元化（Bray, Lee(2009)）

３次元多様体 (M,g): 完備、滑らか、非負曲率（$R\geq 0$）、漸近平坦、ADM質量m
∂Mは漸近平坦な無限遠と一番外にある極小曲面Sからなる。

このとき、極小曲面Sの面積Aは $A\leq 4\pi\,(2m)^2$を満たす。

等号成立は空間が
シュバルツシルト解
（球対称ブラックホール解）
の時間一定面に等しいときのみ

Thm: 重力検知面の面積不等式（**Izumi**, Tomikawa, Shiromizu, Yoshino (2021)）



３次元多様体 (M,g): 完備、滑らか、非負曲率（$R\geq 0$）、漸近平坦、ADM質量m
∂Mは漸近平坦な無限遠といくつかの境界Nからなる
すべての境界Nは、パラメータαの重力検知面で囲われる

＋もう少し仮定が必要

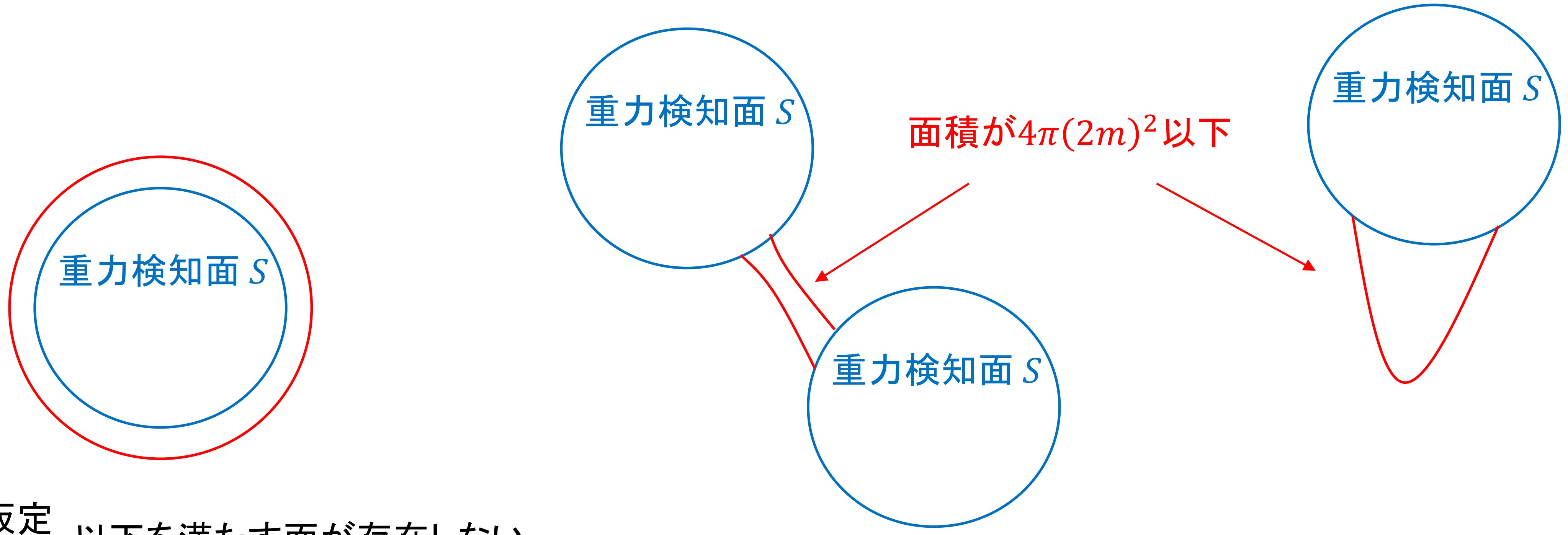
以下のような面が存在しない

1、重力検知面の外に存在する境界を持たないコンパクトな極小曲面
2、重力検知面に境界を持ち、面積が$4\pi(2m)^2$以下になる極小曲面

このとき、重力検知面の面積Aは $A\leq 4\pi\left(\frac{3+4\alpha}{1+2\alpha}\,m\right)^2$を満たす。

等号成立は空間が
シュバルツシルト解（球対称ブラックホール解）
の時間一定面に等しいときのみ

新たな仮定の意味

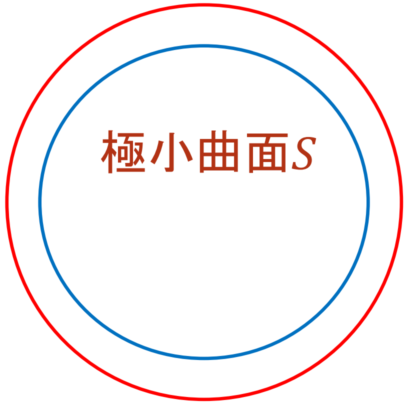


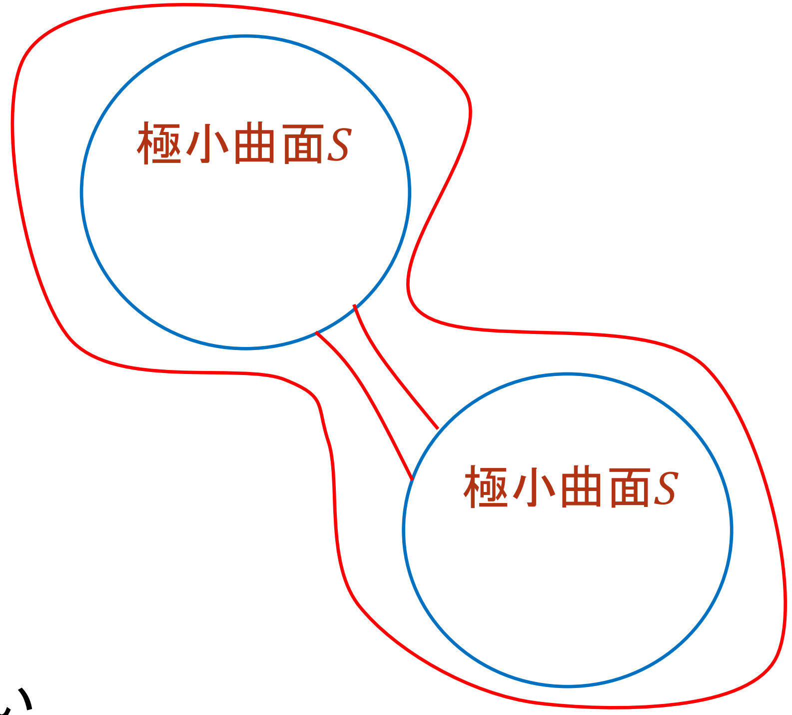
<u>新たな仮定</u>　以下を満たす面が存在しない

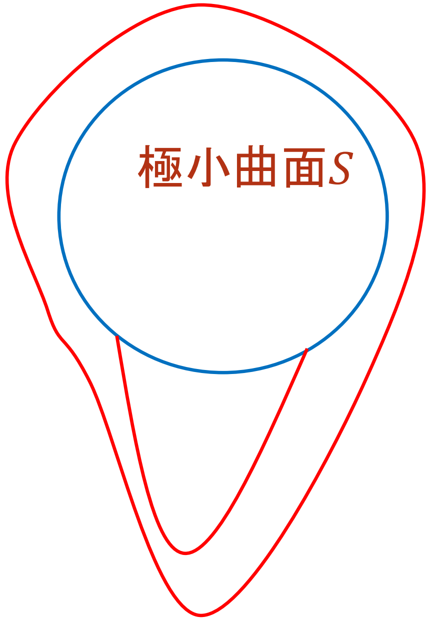
１、重力検知面の外に存在する境界を持たないコンパクトな極小曲面
２、重力検知面に境界を持ち、面積が$4\pi(2m)^2$以下になる極小曲面

上で示した赤色のような極小曲面が存在しない

リーマンペンローズ不等式の場合との対応







<u>新たな仮定</u>　以下を満たす面が存在しない

1、重力検知面の外に存在する境界を持たないコンパクトな極小曲面
2、重力検知面に境界を持ち、面積が$4\pi(2m)^2$以下になる極小曲面

上で示した赤色のような
極小曲面が存在しない

<u>リーマンペンローズ不等式の場合の仮定</u>

一番外にある極小曲面S

リーマン‐ペンローズ不等式の一般化

極小曲面が非連結
の場合にも適用可能

Thm: リーマン-ペンローズ不等式 （Huisken, Ilmanen(2001), Bray(2001)）　高次元化 （Bray, Lee(2009)）

３次元多様体 (M, g): 完備、滑らか、非負曲率（$R \geq 0$）、漸近平坦、ADM質量m

∂Mは漸近平坦な無限遠と一番外にある極小曲面Sからなる。

このとき、極小曲面Sの面積Aは $A \leq 4\pi\,(2m)^2$を満たす。

等号成立は空間が
バルツシルト解
（球 ブラックホール解）
の時間一 面に等しいときのみ

Thm: 重力検知面の面積不等式 （**Izumi**, Tomikawa, Shiromizu, Yoshino (2021)）

３次元多様体 (M, g): 完備、滑らか、非負曲率（$R \geq 0$）、漸近平坦、ADM質量m

∂Mは漸近平坦な無限遠といくつかの境界Nからなる
すべての境界Nは、パラメータαの重力検知面で囲われる

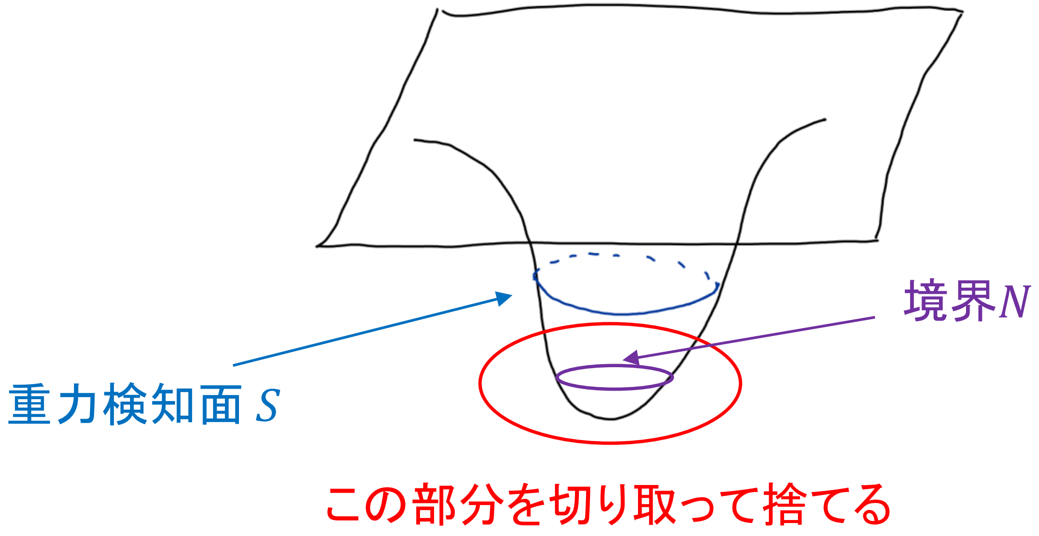
以下のような面が存在しない

1、重力検知面の外に存在する境界を持たないコンパクトな極小曲面
2、重力検知面に境界を持ち、面積が$4\pi(2m)^2$以下になる極小曲面

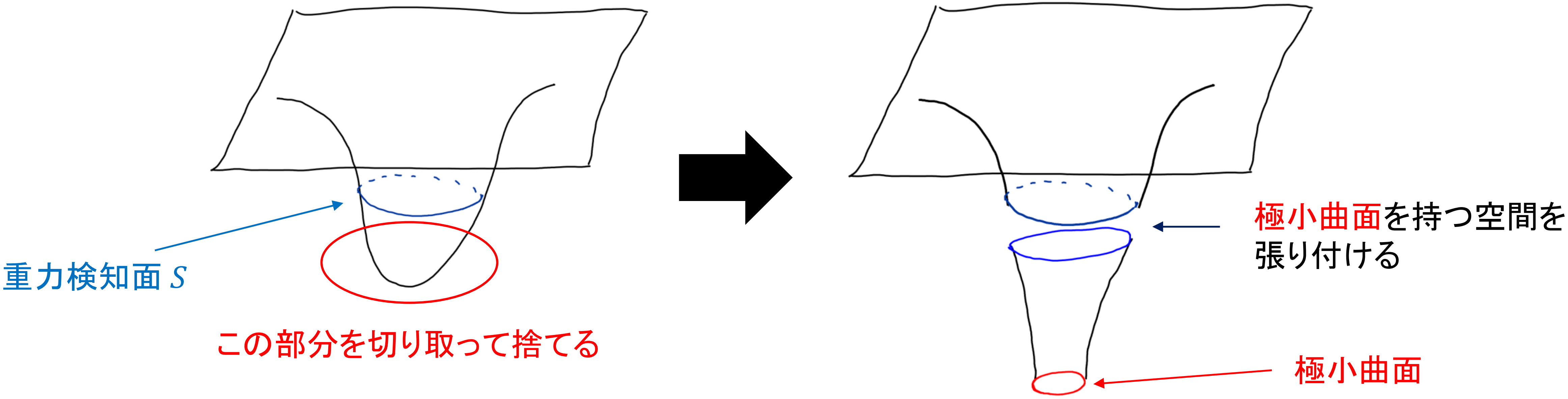
このとき、重力検知面の面積Aは $A \leq 4\pi\left(\frac{3+4\alpha}{1+2\alpha}\,m\right)^2$を満たす。

等号成立は空間が
シュバルツシルト解（球対称ブラックホール解）
の時間一定面に等しいときのみ

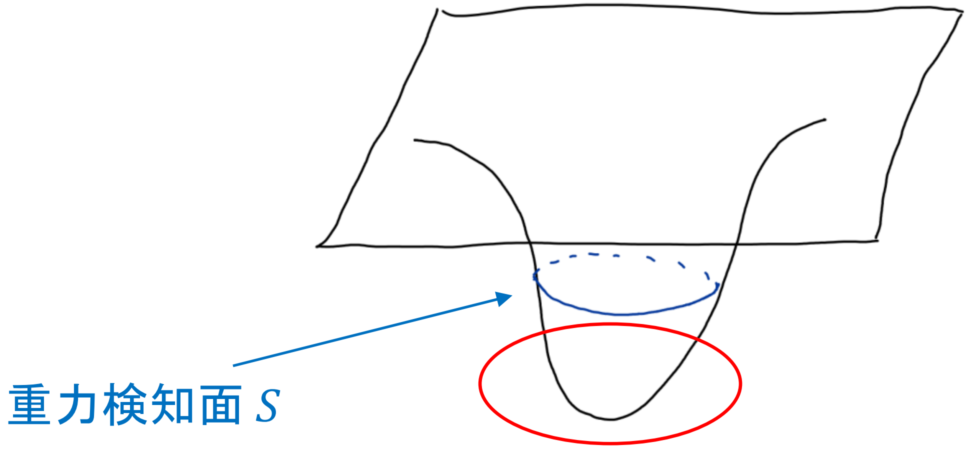
証明の概要



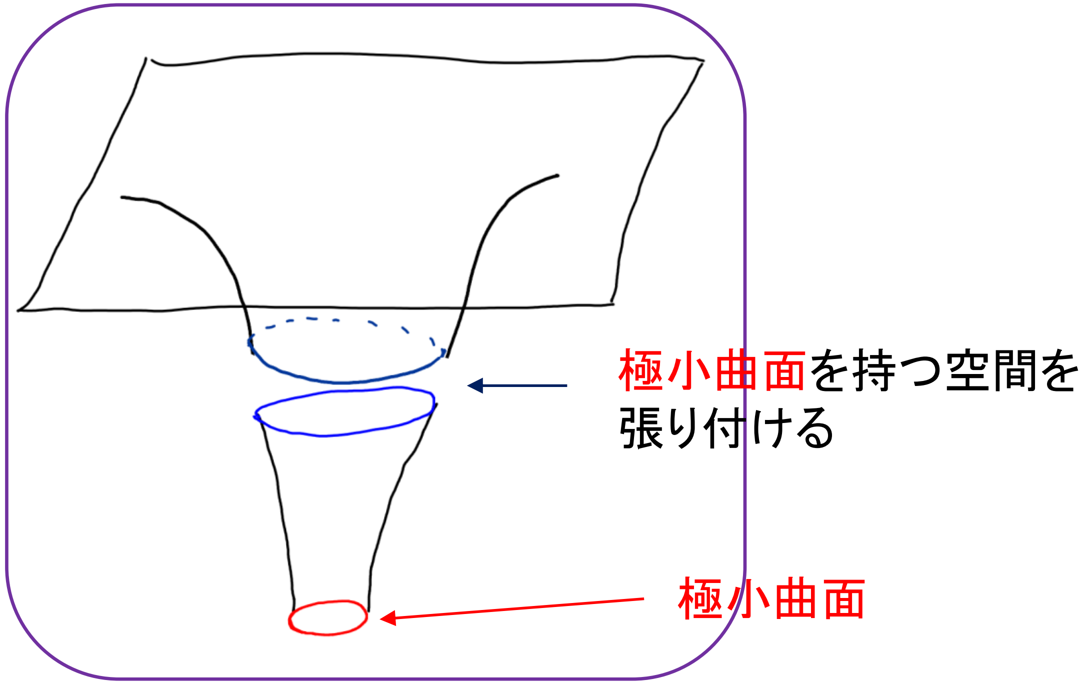
証明の概要



証明の概要



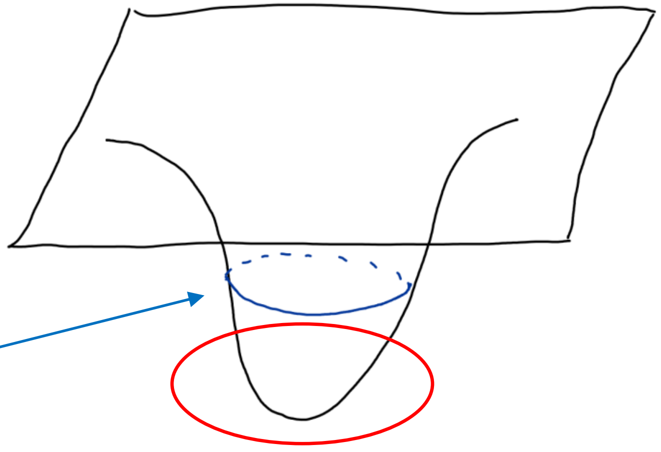
この空間にリーマンペンローズ不等式を使う



証明の概要

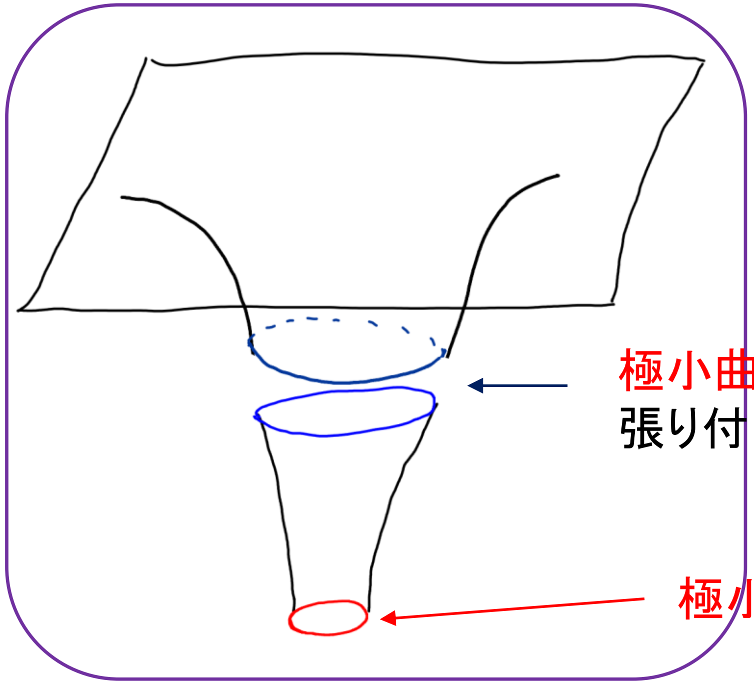
$$\boxed{\varphi_0 = k^{-1}\Big|_{r=0}}$$

この空間にリーマンペンローズ不等式を使う



重力検知面 S

この部分を切り取って捨てる



極小曲面を持つ空間を
張り付ける

極小曲面

重力検知面S近傍で面直交に座標を取る

$$ds^2 = \varphi^2 dr^2 + g_{ab}dx^a dx^b$$

（重力検知面 S は $r=0$、面外側で $r>0$）

S上で以下を満たすようにラプスを定める

$$k^{-1}\Big|_{r=0} = \varphi\Big|_{r=0} \quad (:= \varphi_0)$$

$$g_{0,ab} := g_{ab}|_{r=0} \qquad r_0 : \exp\left(\frac{r_0}{2}\right) = \frac{3+4\alpha}{1+2\alpha}$$

張り付けた空間の計量（$r<0$）

$$d\bar{s}^2 = \frac{1-2\exp\left(-\frac{r_0}{2}\right)}{1-2\exp\left(-\frac{r+r_0}{2}\right)}\exp(r)\,\varphi_0^2(x^a)dr^2 + \exp(r)\,g_{0,ab}(x^a)dx^a dx^b$$

cf: 球対称ブラックホール解の時刻一定($t=0$)超曲面の誘導計量

$$ds^2 = \frac{1}{4\left(1-\exp\left(-\frac{r+r_0}{2}\right)\right)}\exp(r)\,dr^2 + \exp(r)\omega_{ab}dx^a dx^b$$

単位球面の計量

証明の概要

$$\varphi_0 = k^{-1}\Big|_{r=0}$$

$${k_0}^2$$

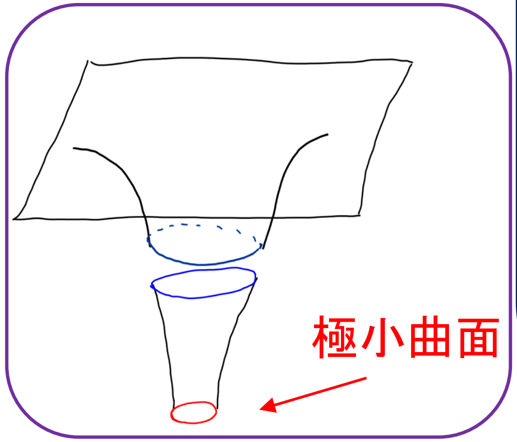
張り付けた空間の曲率の非負性の評価

$${}^{(3)}\bar{R} = {}^{(2)}\bar{R} - 2\bar{\varphi}^{-1}\bar{\mathcal{D}}^2\bar{\varphi} - 2\bar{r}^a\bar{D}_a\bar{k} - \bar{k}^2 - \bar{k}_{ab}\bar{k}^{ab}$$

$$\boxed{\begin{aligned} &{}^{(2)}\bar{R} = \exp(-r)\,{}^{(2)}R_0, \qquad \bar{\varphi}^{-1}\bar{\mathcal{D}}^2\bar{\varphi} = \exp(-r)\varphi_0^{-1}\mathcal{D}^2\varphi_0 \\ &2\bar{r}^a\bar{D}_a\bar{k} + \frac{3}{2}\bar{k}^2 = \exp(-r)\left(2\alpha + \frac{3}{2}\right){\varphi_0}^{-2}, \quad \bar{k}_{ab}\bar{k}^{ab} = \frac{1}{2}\bar{k}^2 \end{aligned}}$$

$${}^{(3)}\bar{R} \;=\; \exp(-r)\left\{\underline{{}^{(2)}R_0 - 2\varphi_0^{-1}\mathcal{D}^2\varphi_0 - \left(2\alpha + \frac{3}{2}\right){k_0}^2}\right\}$$

この空間に
リーマンペンローズ不等式
を使う



各記法の定義

$\mathcal{D}^2$: r一定面のラプラシアン

r^a: r一定面の外向き単位ベクトル

D_a: 3次元空間の共変微分

バーつき(なし)の量:
張り付けた空間の計量$d\bar{s}$
(元の空間の計量ds)
による幾何学量

添え字0 : $r = 0$ での評価

重力検知面

$$r^a D_a k \geq \alpha k^2$$

2次元中の2階テンソルに対し

$$k_{ab}k^{ab} \geq \frac{1}{2}k^2$$

$$\begin{aligned} \underline{\{\cdots\}} \geq\;& {}^{(2)}R_0 - 2\varphi_0^{-1}\mathcal{D}^2\varphi_0 \\ &- 2r^a D_a k\big|_{r=0} - k^2\big|_{r=0} - k_{ab}^2\big|_{r=0} \\ =\;& {}^{(3)}R_0 \geq 0 \end{aligned}$$

張り付けた空間の計量($r < 0$)

$$d\bar{s}^2 = \frac{1 - 2\exp\left(-\frac{r_0}{2}\right)}{1 - 2\exp\left(-\frac{r+r_0}{2}\right)}\exp(r)\,\varphi_0^2(x^a)dr^2 + \exp(r)\,g_{0,ab}(x^a)dx^a dx^b$$

cf: 球対称ブラックホール解の時刻一定($t = 0$)超曲面の誘導計量

$$ds^2 = \frac{1}{4\left(1 - \exp\left(-\frac{r+r_0}{2}\right)\right)}\exp(r)\,dr^2 + \exp(r)\,\omega_{ab}dx^a dx^b$$

単位球面の計量

証明の概要

リーマンペンローズ不等式

$$A_{MS} \leq 4\pi\,(2m)^2$$

重力検知面と極小曲面の面積の関係

重力検知面の位置 : $r = 0$

極小曲面の位置は
計量のdr^2の係数が発散するところ

$$r = -r_0 + 2\log 2$$

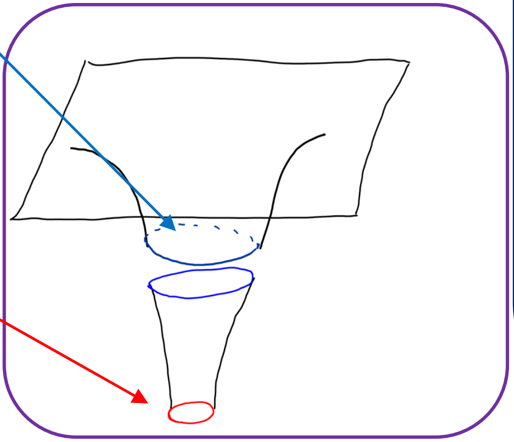
r一定面の面積 :

$$A(r) = \exp(r)\int_{S_0} dA$$

$$A_0 = \exp(-r_0 + 2\log 2)A_{MS} = \left(\frac{2(1+2\alpha)}{3+4\alpha}\right)^2 A_{MS}$$

重力検知面で張り付けた。
$r = 0$となるよう座標を取った
面積をA_0と書く。

この空間に
リーマンペンローズ不等式
を使う



極小曲面。
面積をA_{MS}と書く。

各記法の定義

$\mathcal{D}^2$: r一定面のラプラシアン

r^a: r一定面の外向き単位ベクトル

D_a: 3次元空間の共変微分

バーつき(なし)の量:
張り付けた空間の計量$d\bar{s}$
(元の空間の計量ds)
による幾何学量

添え字0 : $r = 0$ での評価

張り付けた空間の計量($r < 0$)

$$d\bar{s}^2 = \frac{1 - 2\exp\left(-\frac{r_0}{2}\right)}{1 - 2\exp\left(-\frac{r+r_0}{2}\right)}\exp(r)\,\varphi_0^2(x^a)dr^2 + \exp(r)\,g_{0,ab}(x^a)dx^a dx^b$$

cf: 球対称ブラックホール解の時刻一定($t = 0$)超曲面の誘導計量

$$ds^2 = \frac{1}{4\left(1 - \exp\left(-\frac{r+r_0}{2}\right)\right)}\exp(r)\,dr^2 + \exp(r)\,\omega_{ab}dx^a dx^b$$

単位球面の計量

証明の概要

リーマンペンローズ不等式

$$A_{MS} \le 4\pi\,(2m)^2$$

重力検知面と極小曲面の面積の関係

重力検知面の位置：$r=0$

極小曲面の位置は
計量のdr^2の係数が発散するところ

$$r=-r_0+2\log 2$$

r一定面の面積：

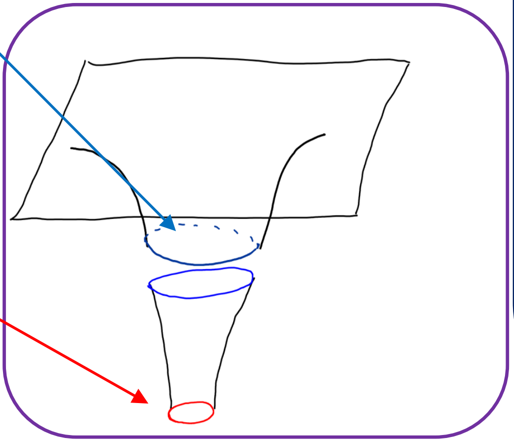
$$A(r)=\exp(r)\int_{S_0} dA$$

$$A_0=\exp(-r_0+2\log 2)A_{MS}$$
$$=\left(\frac{2(1+2\alpha)}{3+4\alpha}\right)^2 A_{MS}$$

$$\Rightarrow\quad A_0 \le 4\pi\left(\frac{3+4\alpha}{1+2\alpha}\,m\right)^2$$

重力検知面で
張り付けた。
$r=0$となるよう
座標を取った
面積をA_0と書く。

この空間に
リーマンペンローズ不等式
を使う



極小曲面。
面積をA_{MS}
と書く。

各記法の定義

$\mathcal{D}^2$: r一定面のラプラシアン

r^a: r一定面の外向き単位ベクトル

D_a: 3次元空間の共変微分

バーつき(なし)の量:
張り付けた空間の計量$d\bar{s}$
(元の空間の計量ds)
による幾何学量

添え字0：$r=0$での評価

張り付けた空間の計量($r<0$)

$$d\bar{s}^2=\frac{1-2\exp\left(-\frac{r_0}{2}\right)}{1-2\exp\left(-\frac{r+r_0}{2}\right)}\exp(r)\,\varphi_0^2(x^a)dr^2+\exp(r)\,g_{0,ab}(x^a)dx^a dx^b$$

cf: 球対称ブラックホール解の時刻一定($t=0$)超曲面の誘導計量

$$ds^2=\frac{1}{4\left(1-\exp\left(-\frac{r+r_0}{2}\right)\right)}\exp(r)\,dr^2+\exp(r)\omega_{ab}dx^a dx^b$$

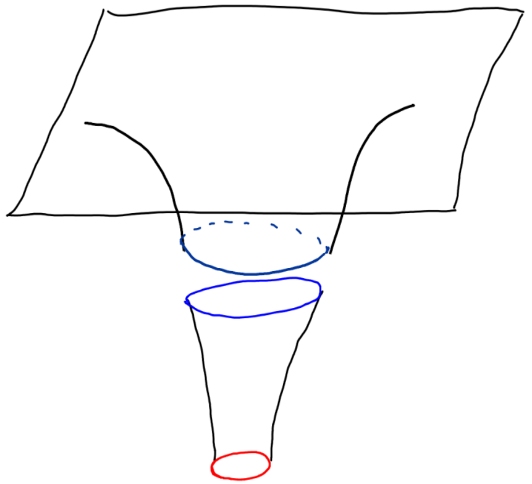
単位球面の計量

残る解決すべき点

接続面が滑らかでない

先ほど作った空間に近い滑らかな空間の族を作って
その族の極限として先ほどの空間を表現する

➡ 次の章で説明



作った極小曲面が一番外にある極小曲面になっているか？

仮定　　以下を満たす面が存在しない

1、重力検知面の外に存在する境界を持たないコンパクトな極小曲面
2、重力検知面に境界を持ち、面積が$4\pi(2m)^2$以下になる極小曲面

➡ この条件を用いると解決できる

（次のスライドで説明）

一番外の極小曲面

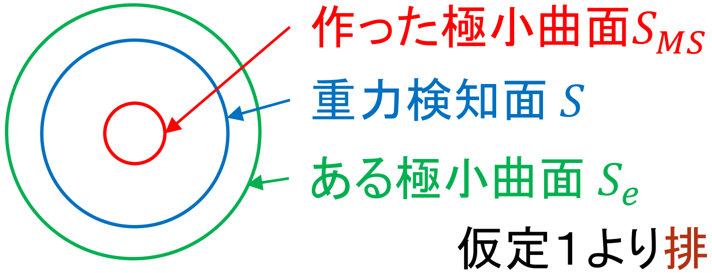
<u>仮定</u>　以下を満たす面が存在しない

1、重力検知面の外に存在する境界を持たないコンパクトな極小曲面
2、重力検知面に境界を持ち、面積が$4\pi(2m)^2$以下になる極小曲面

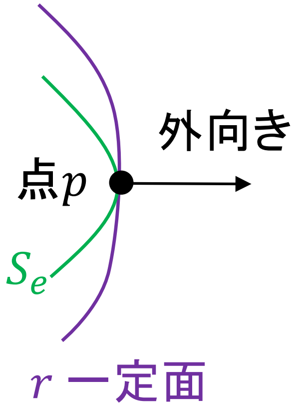
背理法

ある極小曲面 S_e が先ほど作った極小曲面 S_{MS} を囲っていたとする。

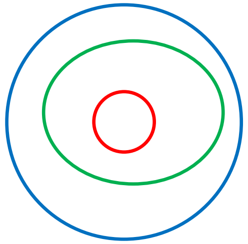
1, S_e が 重力検知面 S の外側に可能性



仮定1より排除



2, S_e が S の内 側にある可能性



r 一定面での平均曲率は
外向き直交に対して正（$k > 0$）

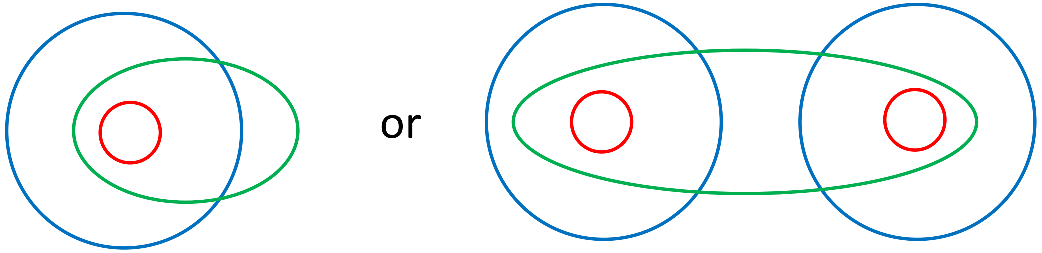
$$\bar{k} = \varphi_0^{-1} \sqrt{\frac{1 - 2\exp\left(-\frac{r+r_0}{2}\right)}{1 - 2\exp\left(-\frac{r_0}{2}\right)}} \exp(-r)$$

S_eで r が最大になる点pが存在

点pにおいて（S_eの平均曲率）＞（r一定面の平均曲率）＞0

「S_eが極小曲面」と矛盾

3, S_e が S と交わる可能性



仮定2より、S の外にある S_e の部分の面積は
$4\pi(2m)^2$より大きい

S_e の面積は$4\pi(2m)^2$より大きい

矛盾

リーマンペンローズ不等式より
最も外側の極小曲面 S_eの面積は$4\pi(2m)^2$ 以下

話の流れ

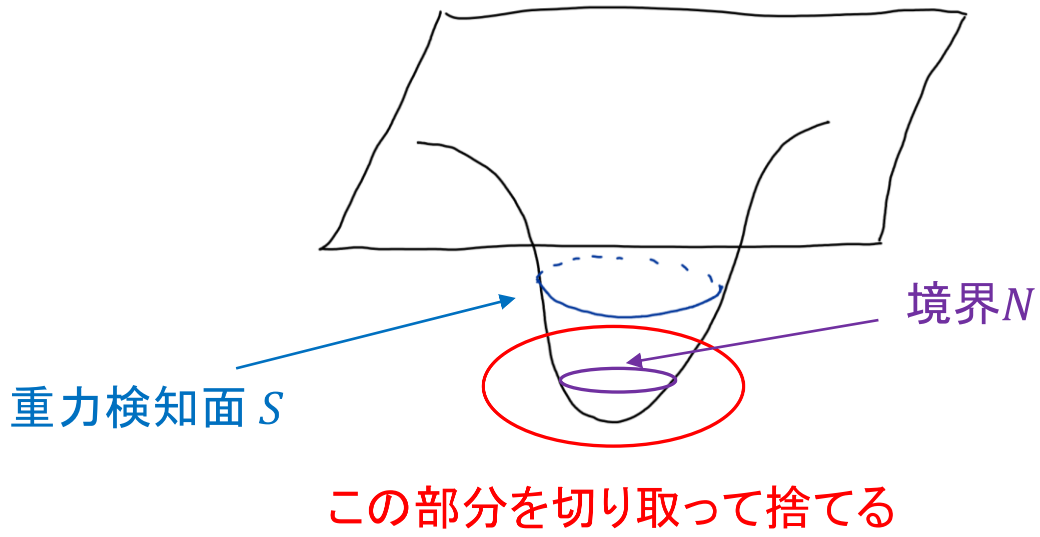
1、定理の主張

2、不等式の見積もり

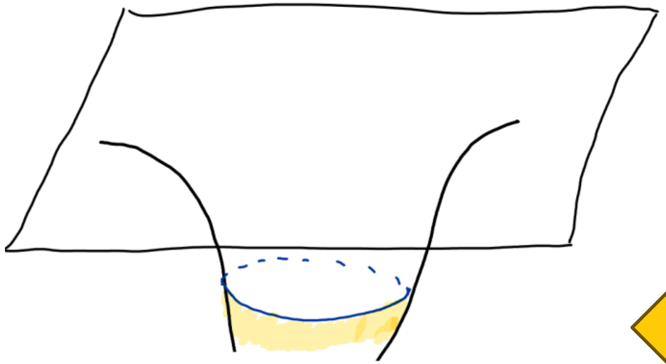
3、証明の概要

4、スムース化

スムースな接続



スムースな接続

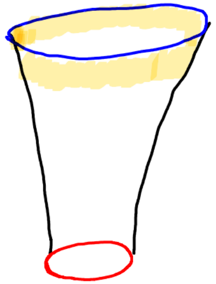


張り付けた空間の計量($r<0$)

$$d\bar{s}^2 = \frac{1-2\exp\left(-\frac{r_0}{2}\right)}{1-2\exp\left(-\frac{r+r_0}{2}\right)}\exp(r)\,\varphi_0^2(x^a)dr^2 + \exp(r)\,g_{0,ab}(x^a)dx^a dx^b$$

重力検知面S近傍で面直交に座標を取る

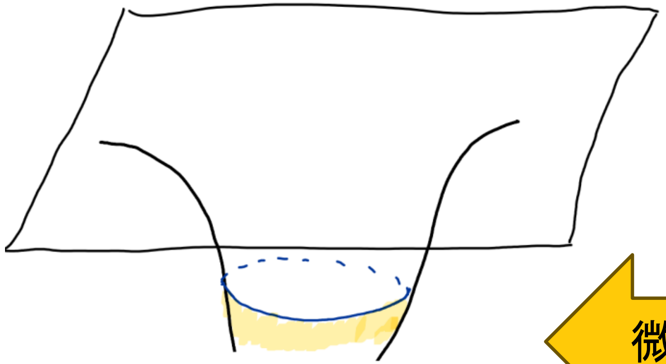
$$ds^2 = \varphi^2 dr^2 + g_{ab}dx^a dx^b$$



スムースな接続

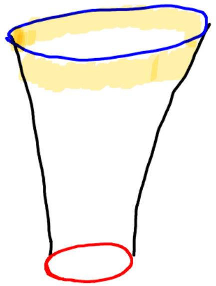
張り付けた空間の座標（$r < 0$）

$$d\bar{s}^2 = \frac{1 - 2\exp\left(-\frac{r_0}{2}\right)}{1 - 2\exp\left(-\frac{r+r_0}{2}\right)} \exp(r)\, \varphi_0^2(x^a) dr^2 + \exp(r)\, g_{0,ab}(x^a) dx^a dx^b$$



微分同相

微分同相



重力検知面S近傍で面直交に座標を取る

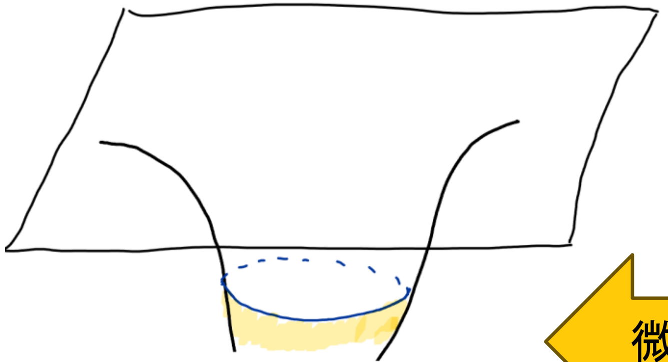
$$ds^2 = \varphi^2 dr^2 + g_{ab} dx^a dx^b$$

$r = 0$で左の空間に
$r = -\epsilon$で右の空間に
滑らかに繋がるのりしろを作る

スムースな接続

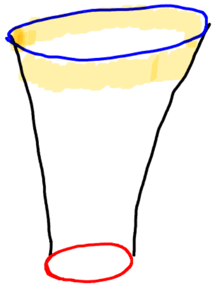
張り付けた空間の計量($r < 0$)

$$d\bar{s}^2 = \underbrace{\frac{1-2\exp\left(-\frac{r_0}{2}\right)}{1-2\exp\left(-\frac{r+r_0}{2}\right)}\exp(r)\,\varphi_0^2(x^a)}_{=:\,\bar{\varphi}^2}dr^2 + \underbrace{\exp(r)\,g_{0,ab}(x^a)}_{=:\,\bar{g}_{ab}}dx^a dx^b$$



微分同相

微分同相



重力検知面S近傍で面直交に座標を取る

$$ds^2 = \varphi^2 dr^2 + g_{ab}dx^a dx^b$$

$r = 0$で左の空間に
$r = -\epsilon$で右の空間に
滑らかに繋がるのりしろを作る

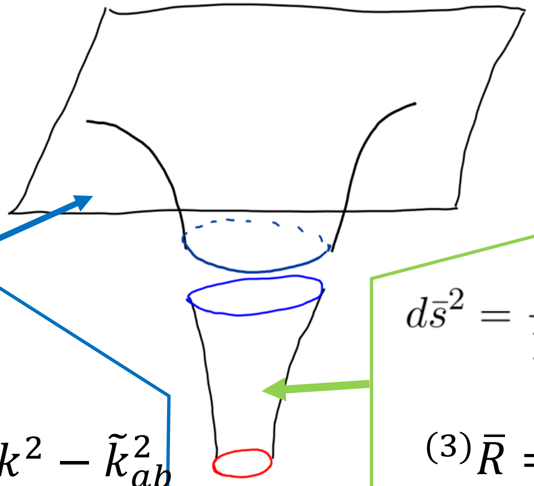
二つの計量を割合的に混ぜる

$$d\check{s}^2 = \check{\varphi}^2 dr^2 + \check{g}_{ab}\,dx^a dx^b$$

$$\check{\varphi} = f_1(r)\varphi + \left(1 - f_1(r)\right)\bar{\varphi}$$

$$\check{g}_{ab} = f_2(r)g_{ab} + \left(1 - f_2(r)\right)\bar{g}_{ab}$$

大雑把な見積もり



$r \geq 0$

$$ds^2 = \varphi^2 dr^2 + g_{ab} dx^a dx^b$$

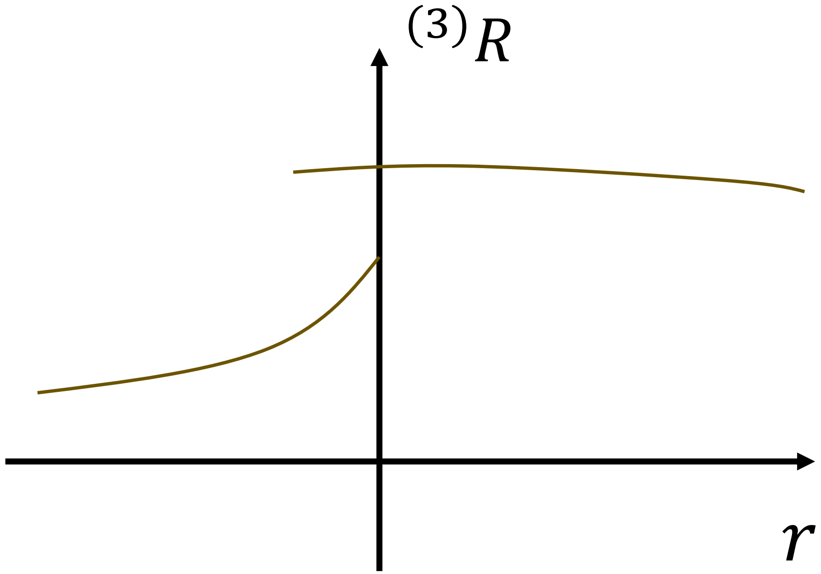
$$^{(3)}R = {}^{(2)}R - 2\varphi^{-1}\mathcal{D}^2\varphi - 2r^a D_a k - \frac{3}{2}k^2 - \tilde{k}_{ab}^2$$

$r < 0$

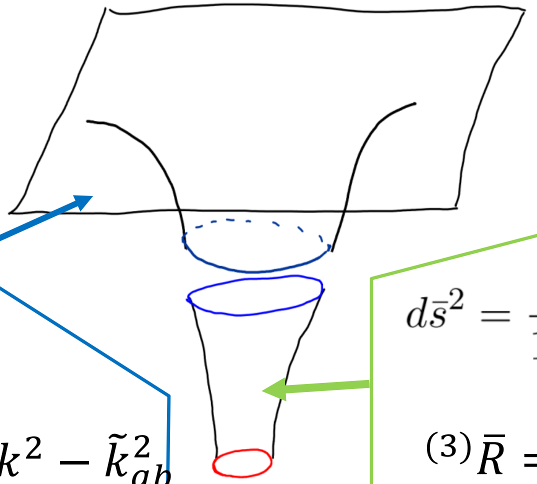
$$d\bar{s}^2 = \frac{1 - 2\exp\left(-\frac{r_0}{2}\right)}{1 - 2\exp\left(-\frac{r+r_0}{2}\right)} \exp(r)\, \varphi_0^2(x^a) dr^2 + \exp(r)\, g_{0,ab}(x^a) dx^a dx^b$$

$$^{(3)}\bar{R} = {}^{(2)}\bar{R} - 2\bar{\varphi}^{-1}\bar{\mathcal{D}}^2\bar{\varphi} - 2\bar{r}^a \bar{D}_a \bar{k} - \frac{3}{2}\bar{k}^2 - \tilde{\bar{k}}_{ab}^2$$

接続面において　$^{(2)}\bar{R} = {}^{(2)}R$　　$\bar{\varphi}^{-1}\bar{\mathcal{D}}^2\bar{\varphi} = \varphi^{-1}\mathcal{D}^2\varphi$　　$\bar{k}^2 = k^2$　　$\underbrace{\bar{r}^a\bar{D}_a\bar{k} \neq r^a D_a k \qquad \tilde{\bar{k}}_{ab}^2 = 0}_{\text{不連続}}$



大雑把な見積もり



$r \geq 0$

$$ds^2 = \varphi^2 dr^2 + g_{ab} dx^a dx^b$$

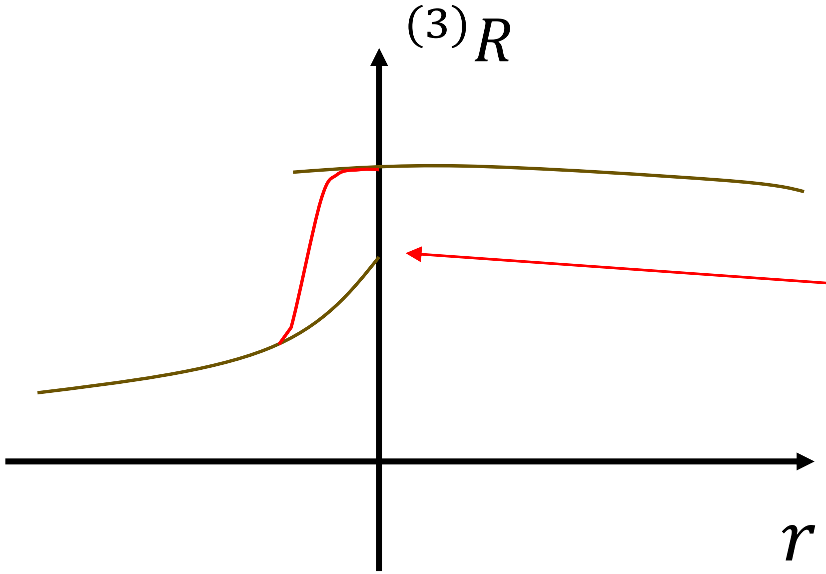
$${}^{(3)}R = {}^{(2)}R - 2\varphi^{-1}\mathcal{D}^2\varphi - 2r^a D_a k - \frac{3}{2}k^2 - \tilde{k}_{ab}^2$$

$r < 0$

$$d\bar{s}^2 = \frac{1 - 2\exp\left(-\frac{r_0}{2}\right)}{1 - 2\exp\left(-\frac{r+r_0}{2}\right)} \exp(r)\, \varphi_0^2(x^a) dr^2 + \exp(r)\, g_{0,ab}(x^a) dx^a dx^b$$

$${}^{(3)}\bar{R} = {}^{(2)}\bar{R} - 2\bar{\varphi}^{-1}\bar{\mathcal{D}}^2\bar{\varphi} - 2\bar{r}^a \bar{D}_a \bar{k} - \frac{3}{2}\bar{k}^2 - \tilde{\bar{k}}_{ab}^2$$

接続面において　${}^{(2)}\bar{R} = {}^{(2)}R$　$\bar{\varphi}^{-1}\bar{\mathcal{D}}^2\bar{\varphi} = \varphi^{-1}\mathcal{D}^2\varphi$　$\bar{k}^2 = k^2$　$\underbrace{\bar{r}^a \bar{D}_a \bar{k} \neq r^a D_a k \qquad \tilde{\bar{k}}_{ab}^2 = 0}_{\text{不連続}}$

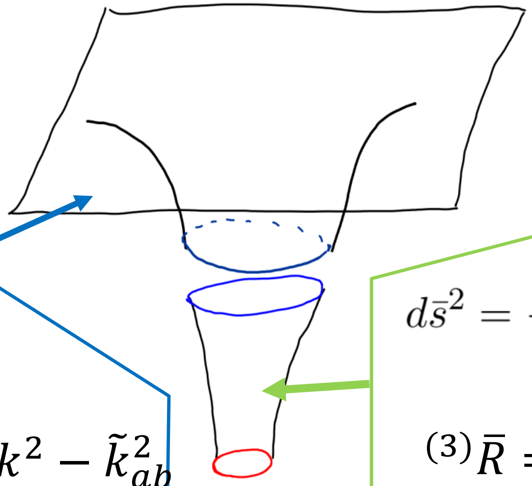


不連続

↓

①単調に滑らかに接続する

大雑把な見積もり



$r \geq 0$

$$ds^2 = \varphi^2 dr^2 + g_{ab} dx^a dx^b$$

$${}^{(3)}R = {}^{(2)}R - 2\varphi^{-1}\mathcal{D}^2\varphi - 2r^a D_a k - \frac{3}{2}k^2 - \tilde{k}_{ab}^2$$

$r < 0$

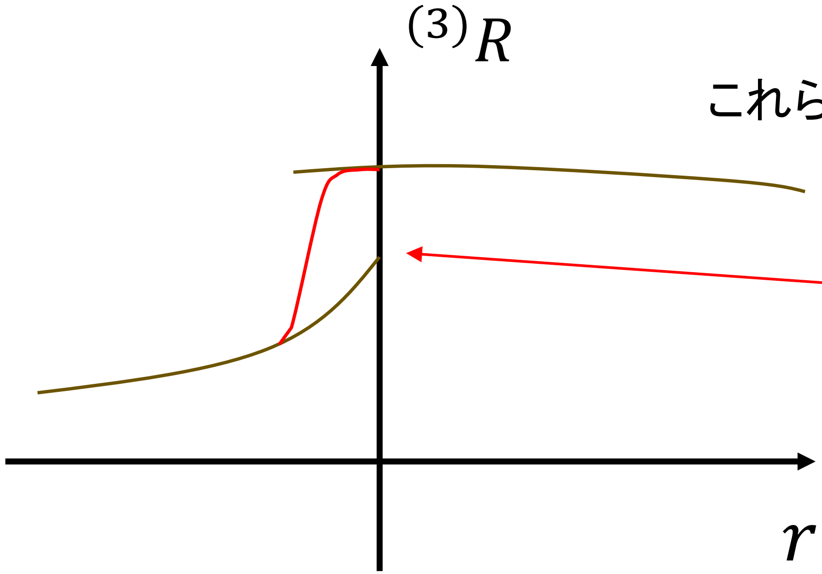
$$d\bar{s}^2 = \frac{1-2\exp\left(-\frac{r_0}{2}\right)}{1-2\exp\left(-\frac{r+r_0}{2}\right)} \exp(r)\, \varphi_0^2(x^a) dr^2 + \exp(r)\, g_{0,ab}(x^a) dx^a dx^b$$

$${}^{(3)}\bar{R} = {}^{(2)}\bar{R} - 2\bar{\varphi}^{-1}\bar{\mathcal{D}}^2\bar{\varphi} - 2\bar{r}^a \bar{D}_a \bar{k} - \frac{3}{2}\bar{k}^2 - \tilde{\bar{k}}_{ab}^2$$

接続面において $\underbrace{{}^{(2)}\bar{R} = {}^{(2)}R \quad \bar{\varphi}^{-1}\bar{\mathcal{D}}^2\bar{\varphi} = \varphi^{-1}\mathcal{D}^2\varphi \quad \bar{k}^2 = k^2}_{\text{これらの値に影響を与える}}$ $\underbrace{\bar{r}^a \bar{D}_a \bar{k} \neq r^a D_a k \quad \tilde{\bar{k}}_{ab}^2 = 0}_{\text{不連続}}$

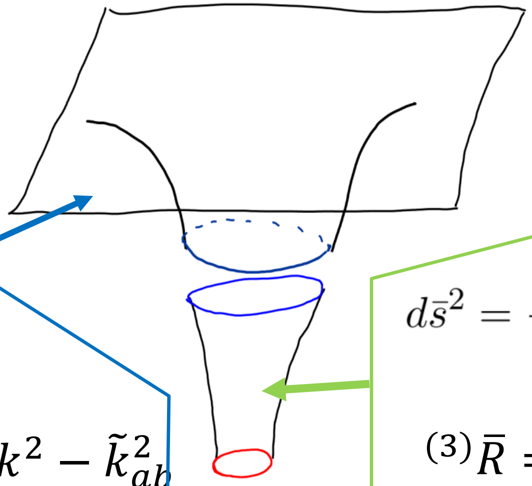
これらの値に影響を与える

不連続



単調に滑らかに接続する

大雑把な見積もり



$r \geq 0$

$$ds^2 = \varphi^2 dr^2 + g_{ab} dx^a dx^b$$

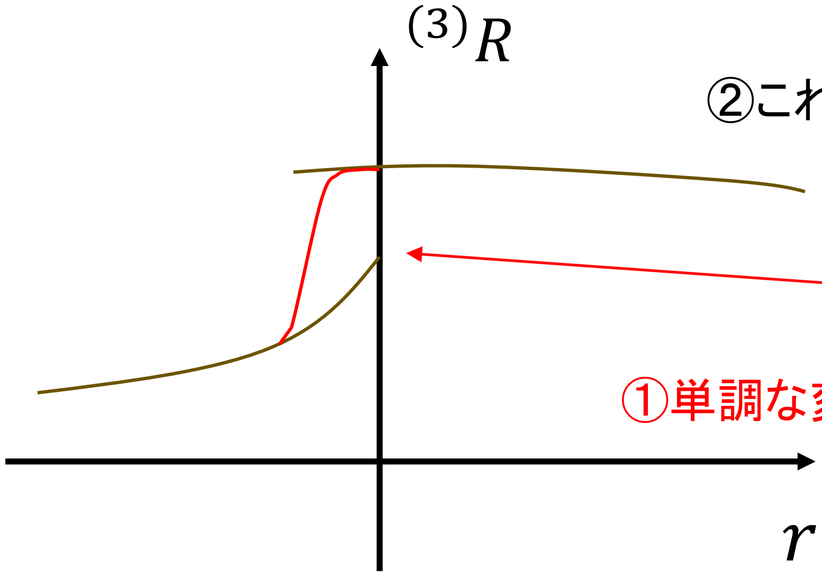
$${}^{(3)}R = {}^{(2)}R - 2\varphi^{-1}\mathcal{D}^2\varphi - 2r^a D_a k - \frac{3}{2}k^2 - \tilde{k}_{ab}^2$$

$r < 0$

$$d\bar{s}^2 = \frac{1 - 2\exp\left(-\frac{r_0}{2}\right)}{1 - 2\exp\left(-\frac{r+r_0}{2}\right)} \exp(r)\, \varphi_0^2(x^a) dr^2 + \exp(r)\, g_{0,ab}(x^a) dx^a dx^b$$

$${}^{(3)}\bar{R} = {}^{(2)}\bar{R} - 2\bar{\varphi}^{-1}\bar{\mathcal{D}}^2\bar{\varphi} - 2\bar{r}^a \bar{D}_a \bar{k} - \frac{3}{2}\bar{k}^2 - \tilde{\bar{k}}_{ab}^2$$

接続面において $\underbrace{{}^{(2)}\bar{R} = {}^{(2)}R \quad \bar{\varphi}^{-1}\bar{\mathcal{D}}^2\bar{\varphi} = \varphi^{-1}\mathcal{D}^2\varphi \quad \bar{k}^2 = k^2}_{\text{②これらの値に影響を与える}}$ $\underbrace{\bar{r}^a \bar{D}_a \bar{k} \neq r^a D_a k \quad \tilde{\bar{k}}_{ab}^2 = 0}_{\text{不連続}}$



①単調に滑らかに接続する

①単調な変化 ＋ ②の変化

大雑把な見積もり

$\bar{r}^a \bar{D}_a \bar{k} \neq r^a D_a k$

$\tilde{k}_{ab} \to \tilde{\tilde{k}}_{ab} = 0$

$r = 0$ から$r = -\epsilon$ で
滑らかに単調に変化させる

$$k_{ab} = \frac{1}{2\varphi}\frac{\partial}{\partial r} g_{ab}$$

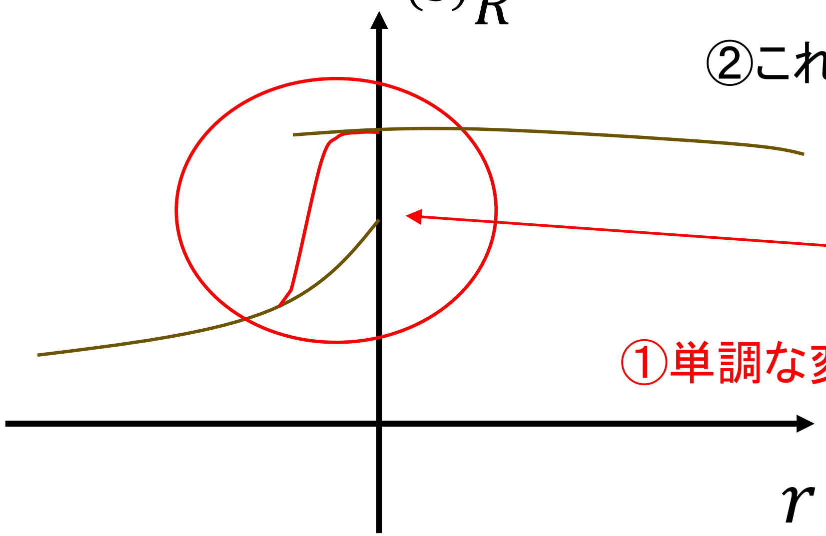
kの変化
g_{ab}の変化
は $\mathcal{O}(\epsilon)$

k^2の変化
$^{(2)}R$ の変化
$\varphi^{-1}\mathcal{D}^2\varphi$の変化
は $\mathcal{O}(\epsilon)$

接続面において $^{(2)}\bar{R} = {}^{(2)}R$ $\bar{\varphi}^{-1}\bar{\mathcal{D}}^2\bar{\varphi} = \varphi^{-1}\mathcal{D}^2\varphi$ $\bar{k}^2 = k^2$ $\bar{r}^a \bar{D}_a \bar{k} \neq r^a D_a k$ $\tilde{\tilde{k}}^2_{ab} = 0$

②これらの値に影響を与える

不連続



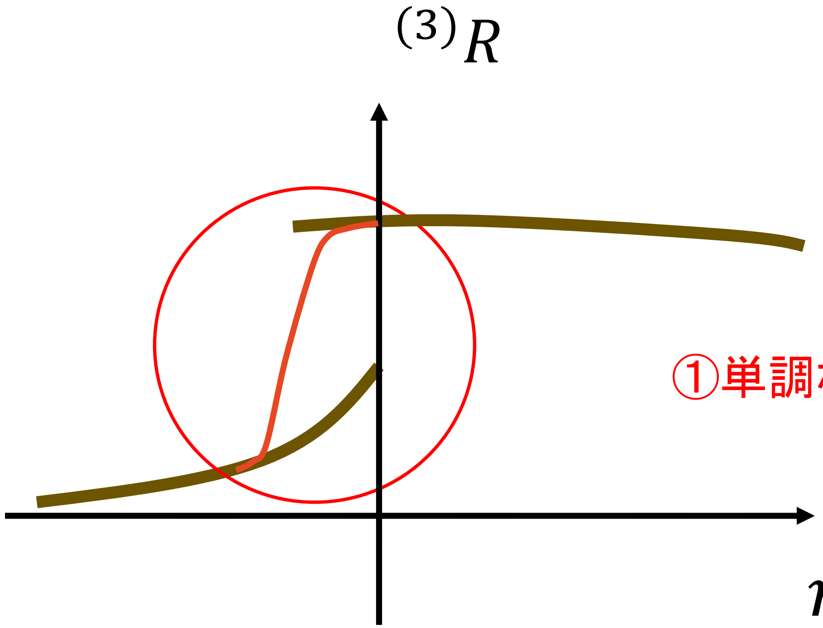
①単調に滑らかに接続する

①単調な変化 ＋ ②の変化

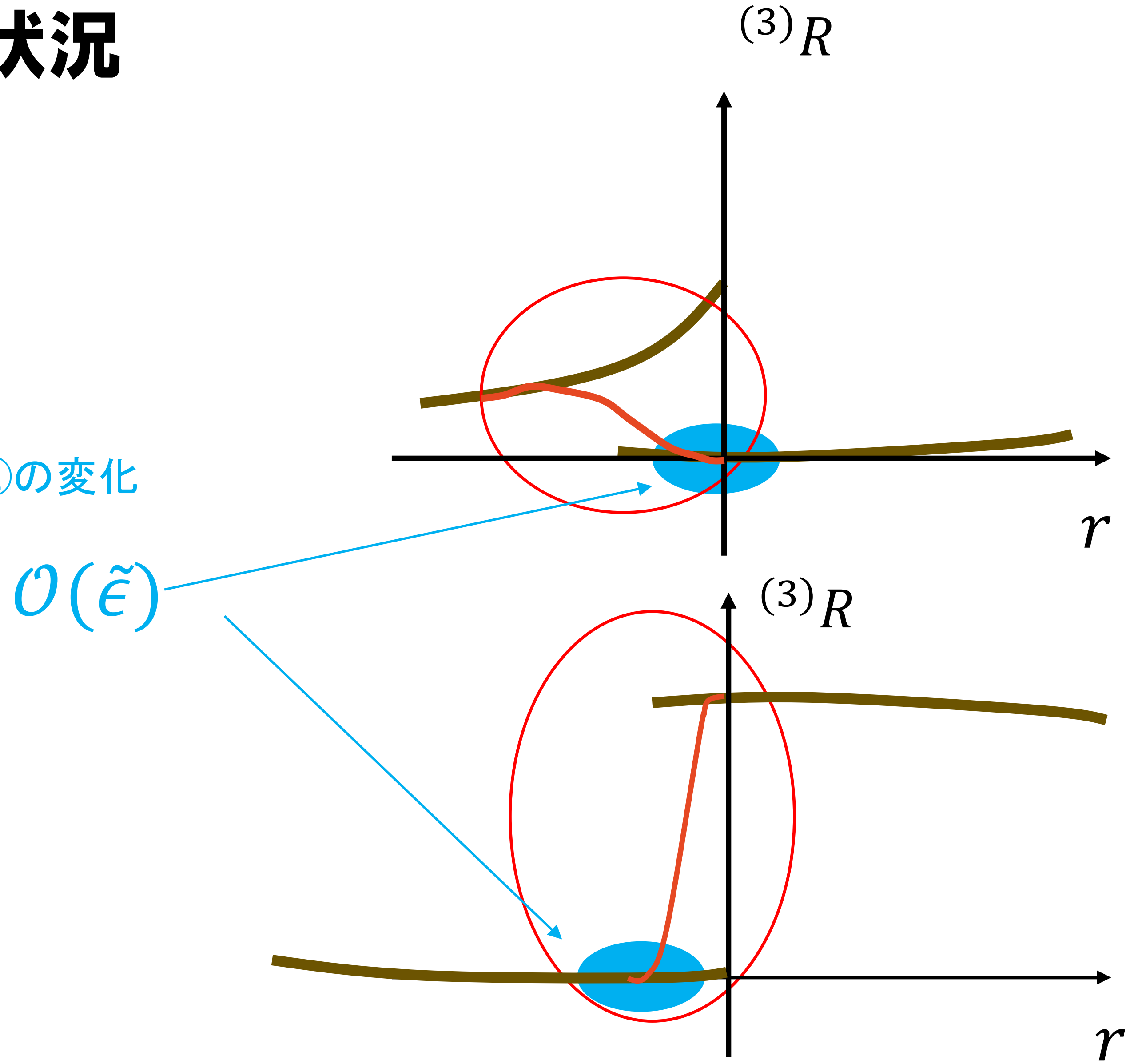
$\mathcal{O}(\tilde{\epsilon})$

接続前後で $^{(3)}R$が strict に正であれば、
$\tilde{\epsilon}$ を十分小さくとることで接続領域でも $^{(3)}R > 0$とできる

曲率が負になってしまう状況

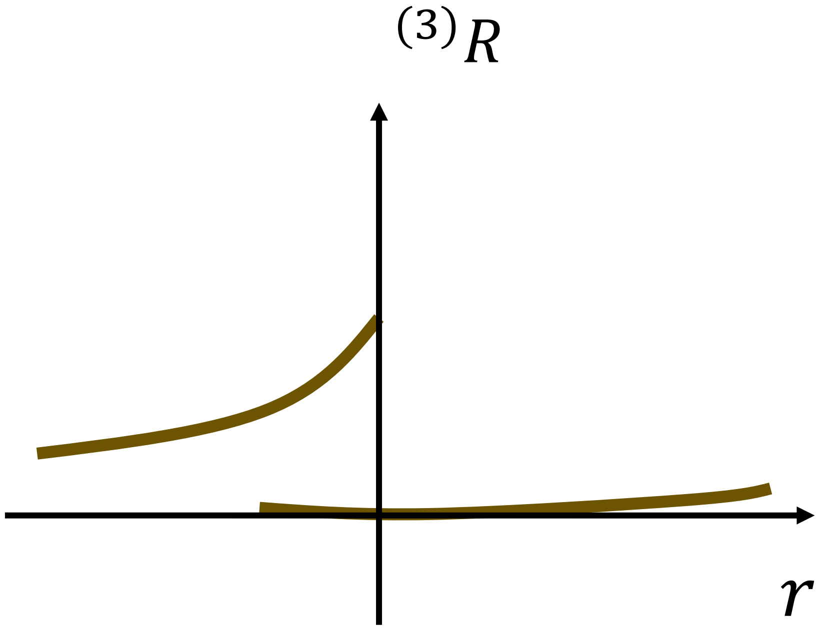


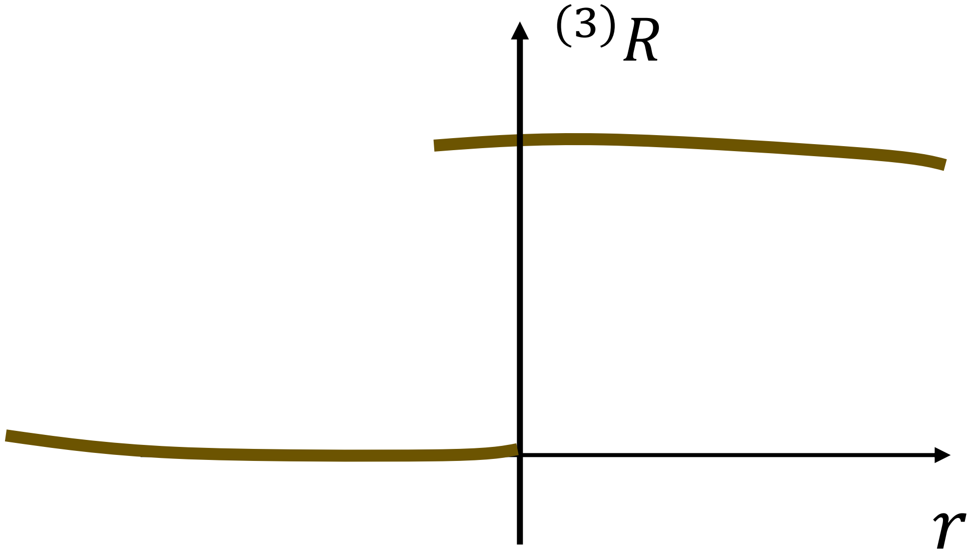
①単調な変化 ＋ ②の変化



$^{(3)}R$ が0のところでは
$\mathcal{O}(\tilde{\epsilon})$の効果で、接続領域で
$^{(3)}R$が負になる可能性あり。

解決策





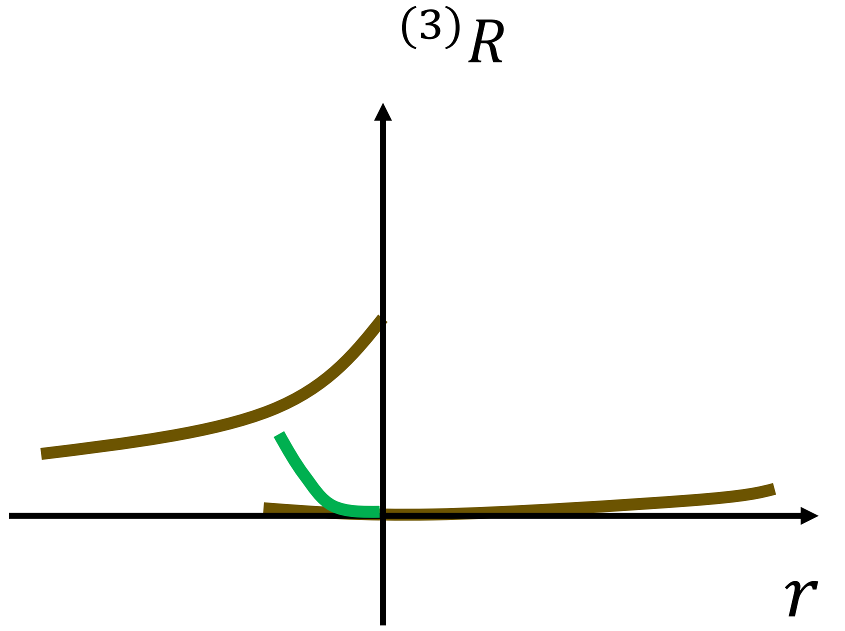
解決策

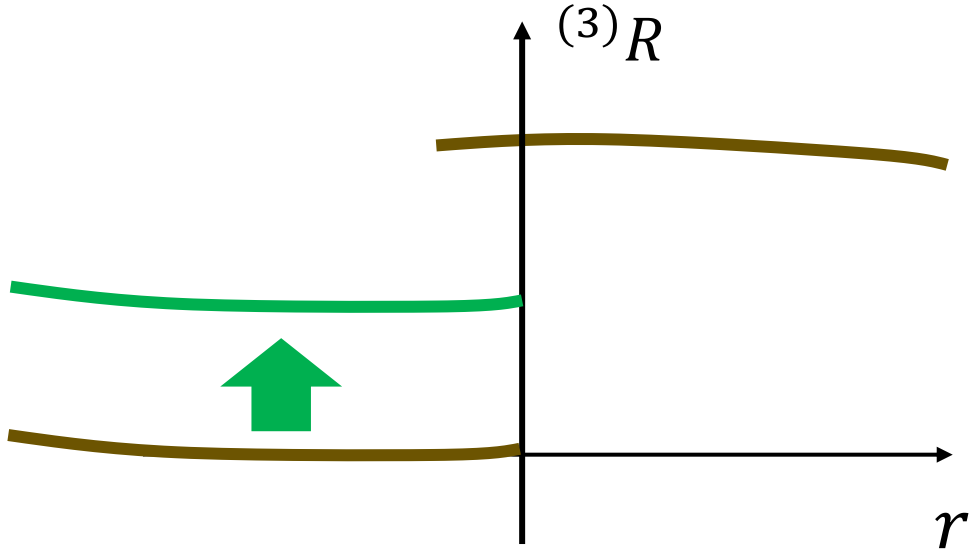
①元の多様体において$r < 0$のところを変形させて
$r < 0$ では必ず ${}^{(3)}R > 0$ となるようにする。

②人工的にくっつける多様体は ${}^{(3)}R > 0$ となるものを用意する。

③$r < 0$ で接続する

④ ①の変形や②のリフトアップ、③の接続点のr座標が
0 になる極限をとる





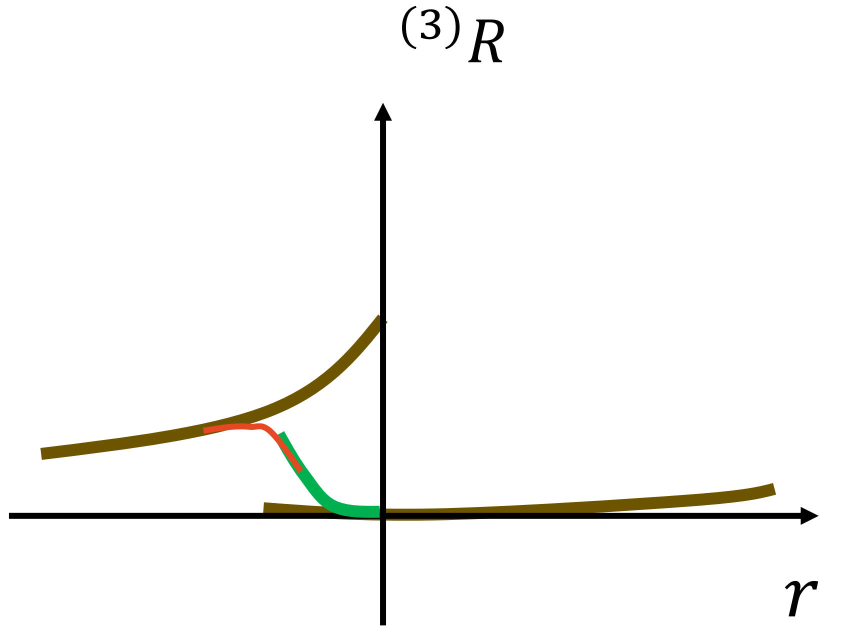
解決策

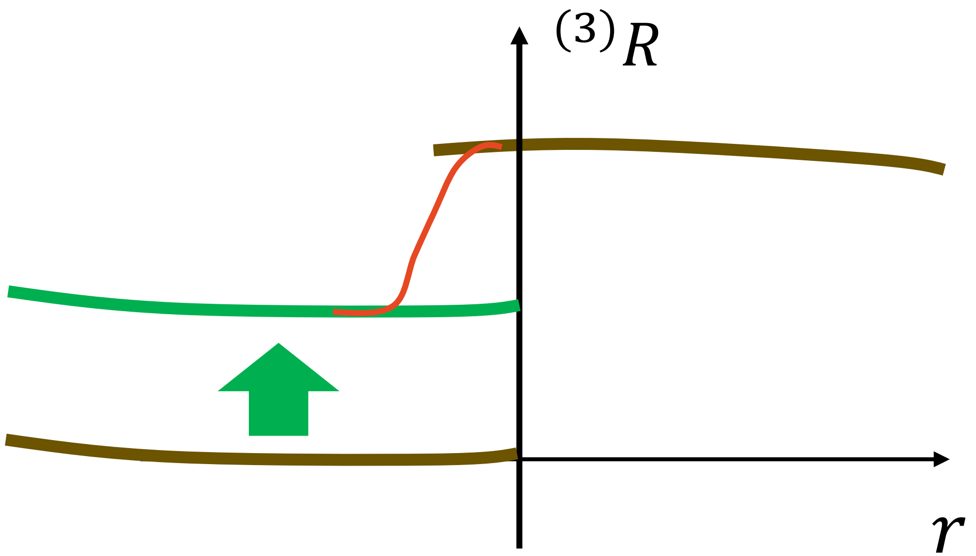
①元の多様体において$r<0$のところを変形させて
$r<0$では必ず${}^{(3)}R>0$となるようにする。

②人工的にくっつける多様体は${}^{(3)}R>0$となるものを用意する。

③$r<0$で接続する

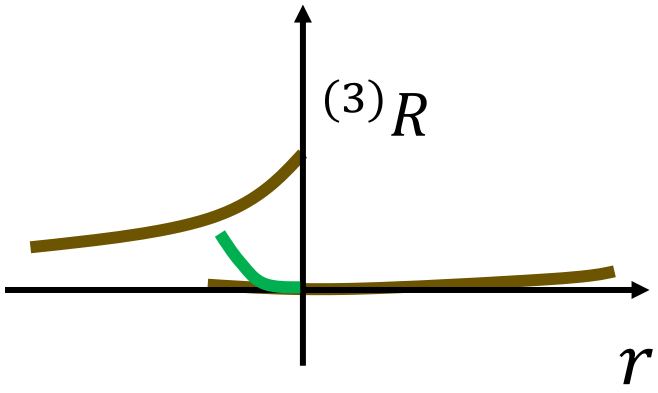
④ ①の変形や②のリフトアップ、③の接続点のr座標が
0になる極限をとる

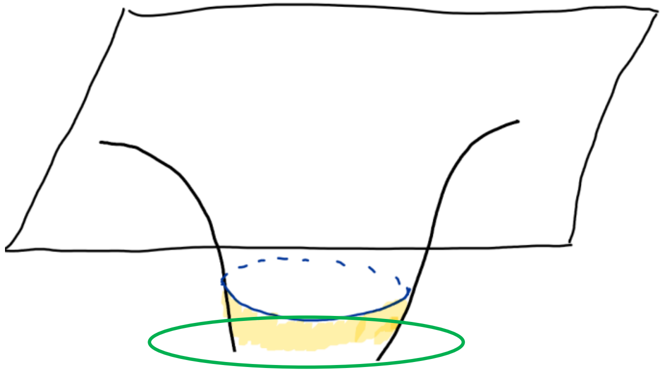




具体的な構成①

①元の多様体において$r<0$のところを変形させて
$r<0$では必ず${}^{(3)}R>0$となるようにする。





ここの部分を無理やり曲げて、正曲率を作り出す。

$r=0$で$k>0$であるから

区間 $-\hat{\delta}<r<0$ を十分小さくとると

この区間でも$k>0$となるので、

$$2r^a D_a k + k^2 + k_{ab}^2 < \beta k^2$$

$$\varphi^{-1}k > \hat{\beta}k^2$$

となる$\beta>0$、$\hat{\beta}>0$が存在する。

この区間 $-\hat{\delta}<r<0$ で空間計量を

$$d\hat{s}^2 = \hat{\varphi}^2 dr^2 + g_{ab}dx^a dx^b,$$

$$\hat{\varphi} := u(r)\varphi, \qquad C > \hat{\delta}\beta/\hat{\beta}.$$

$$u(r) := 1 - \exp\left(\frac{C\hat{\delta}}{r}\right),$$

と変形する

このとき ${}^{(3)}\hat{R} > {}^{(3)}R + 2\frac{k^2}{u^2}\left(\frac{C\hat{\beta}}{\hat{\delta}} - \beta\right)\exp\left(\frac{C\hat{\delta}}{r}\right) > 0$

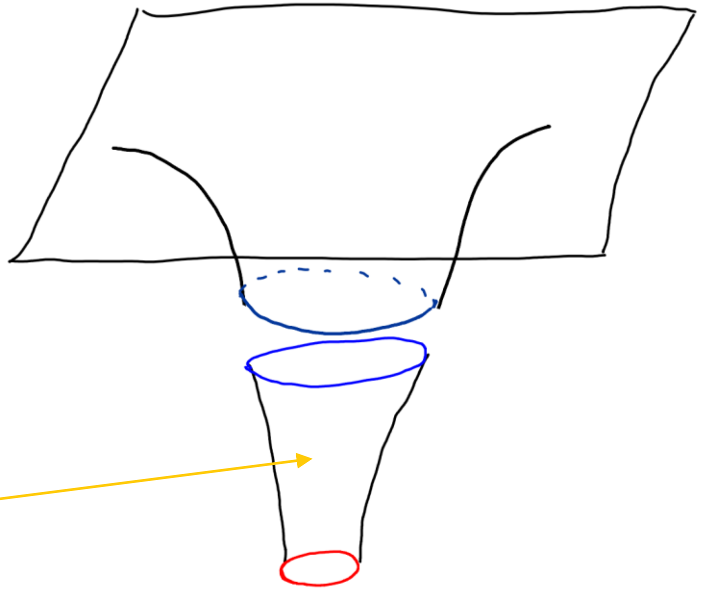
$r=0$ではなく$-\hat{\delta}<r<0$で空間を接続すればよい

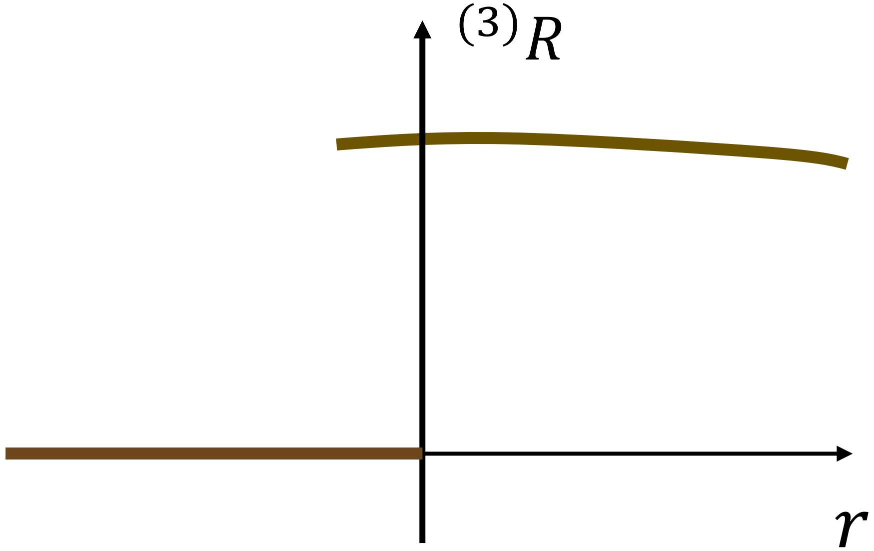
具体的な構成②

$$ {}^{(3)}\bar{R} = \exp(-r)\left\{ \underline{{}^{(2)}R_0 - 2\,k\,\mathcal{D}^2 k^{-1} - \left(2\alpha + \frac{3}{2}\right) k^2} \right\} $$

精査された重力検知面の条件

$$\geq 0$$





具体的な構成②

αの値をずらした多様体を付ける

$\alpha \to \alpha - \gamma\,\epsilon \quad (\gamma > 0, \epsilon > 0)$

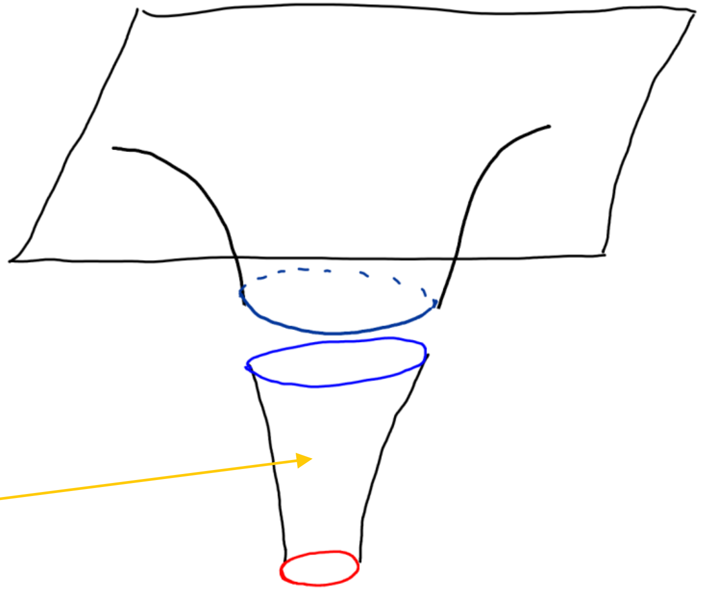
$$\left(2(\alpha - \gamma\,\epsilon) + \frac{3}{2}\right)$$

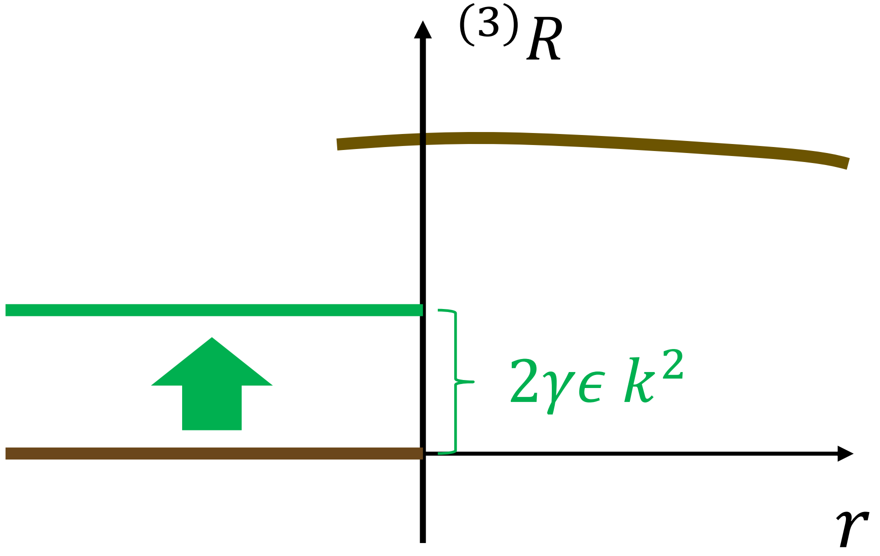
$$ {}^{(3)}\bar{R} = \exp(-r)\left\{ {}^{(2)}R_0 - 2\,k\,\mathcal{D}^2 k^{-1} - \cancel{\left(2\alpha + \frac{3}{2}\right)}\,k^2 \right\} $$

精査された重力検知面の条件

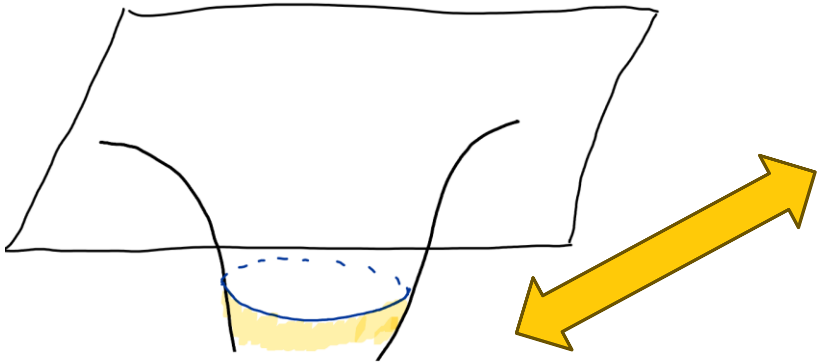
$$\cancel{\geq 0}$$

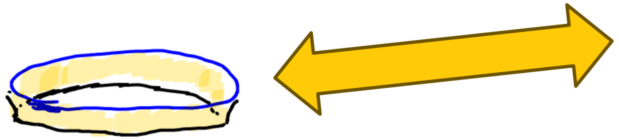
$$2\gamma\epsilon\,k^2$$

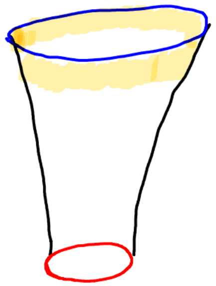




スムースな接続 with Positive ${}^{(3)}R$





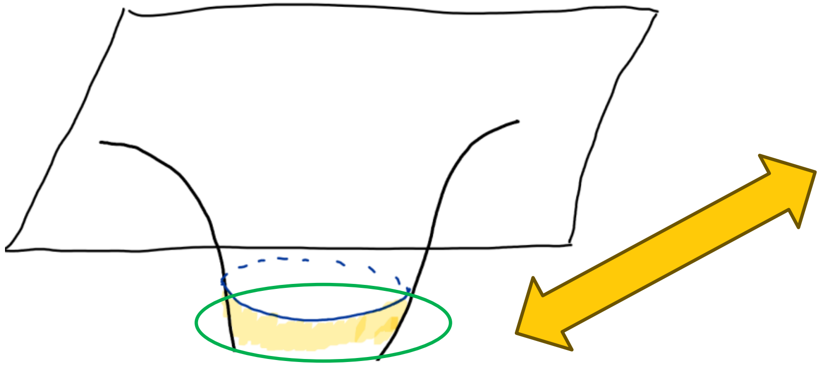


張り付けた空間の計量($r < 0$

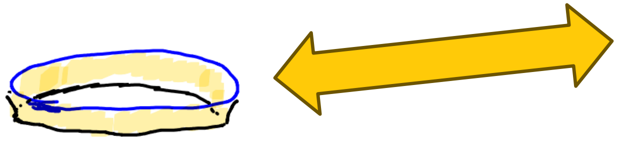
$$d\bar{s}^2 = \frac{1 - 2\exp\left(-\frac{r_0}{2}\right)}{1 - 2\exp\left(-\frac{r+r_0}{2}\right)} \exp(r)\, \varphi_0^2(x^a) dr^2 + \exp(r)\, g_{0,ab}(x^a) dx^a dx^b$$

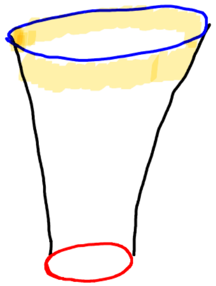
$$\exp\left(\frac{r_0}{2}\right) = \frac{3 + 4\alpha}{1 + 2\alpha}$$

スムースな接続 with Positive ${}^{(3)}R$



ここの部分を無理やり曲げて、
正曲率を作り出す。



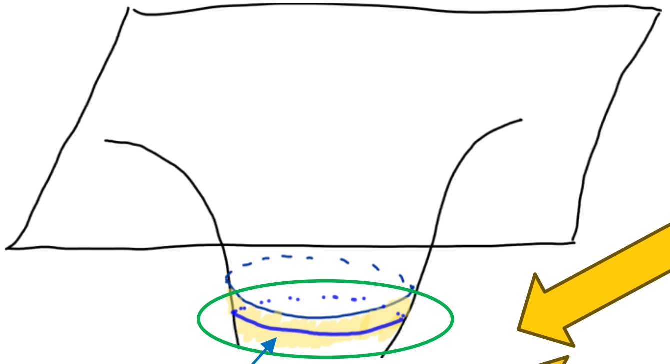


張り付けた空間の計量（$r < 0$

$$d\bar{s}^2 = \frac{1 - 2\exp\left(-\frac{r_0}{2}\right)}{1 - 2\exp\left(-\frac{r+r_0}{2}\right)} \exp\left(r\right) \varphi_0^2(x^a) dr^2 + \exp\left(r\right) g_{0,ab}(x^a) dx^a dx^b$$

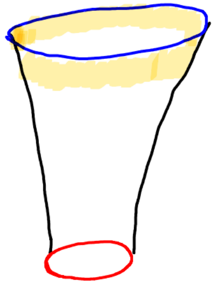
$$\exp\left(\frac{r_0}{2}\right) = \frac{3+4\alpha}{1+2\alpha}$$

スムースな接続 with Positive $^{(3)}R$



ここの部分を無理やり曲げて、
正曲率を作り出す。

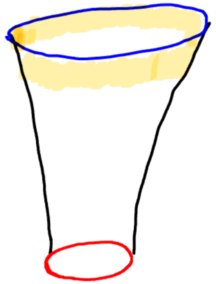
$r=-\epsilon$で接続



張り付けた空間の計量($r<0$

$$d\bar{s}^2=\frac{1-2\exp\left(-\frac{r_0}{2}\right)}{1-2\exp\left(-\frac{r+r_0}{2}\right)}\exp(r)\,\varphi_0^2(x^a)dr^2+\exp(r)\,g_{0,ab}(x^a)dx^adx^b$$

$$\exp\left(\frac{r_0}{2}\right)=\frac{3+4\alpha}{1+2\alpha}$$



重力検知面の条件

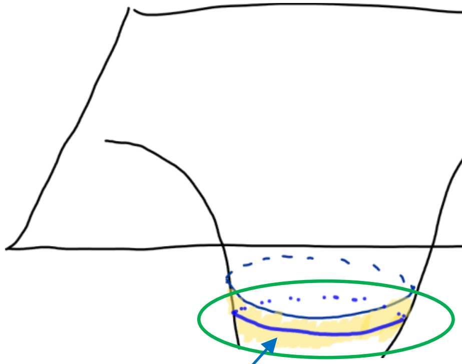
$$^{(2)}R+2\,k\mathcal{D}^2k^{-1}\geq\left(2\alpha+\frac{3}{2}\right)k^2$$

$r=-\epsilon$では、

$\alpha\to\alpha+\tilde{\gamma}\,\epsilon\ (=:\tilde{\alpha})$

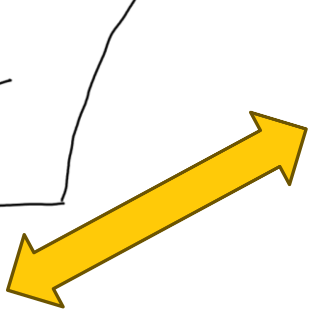
とりスケールすればよい

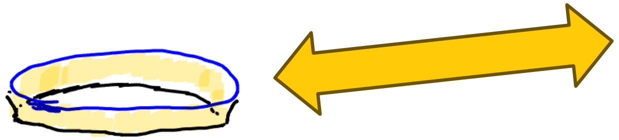
スムースな接続 with Positive ${}^{(3)}R$

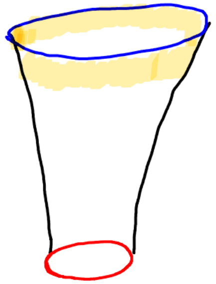


ここの部分を無理やり曲げて、
正曲率を作り出す。

$r = -\epsilon$で接続



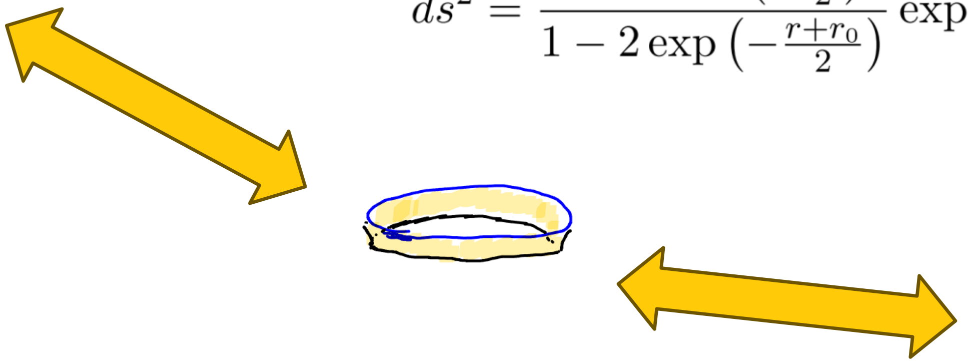




張り付けた空間の計量($r < 0$

$$d\bar{s}^2 = \frac{1 - 2\exp\left(-\frac{r_0}{2}\right)}{1 - 2\exp\left(-\frac{r+r_0}{2}\right)} \exp(r)\, \varphi_0^2(x^a) dr^2 + \exp(r)\, g_{0,ab}(x^a) dx^a dx^b$$

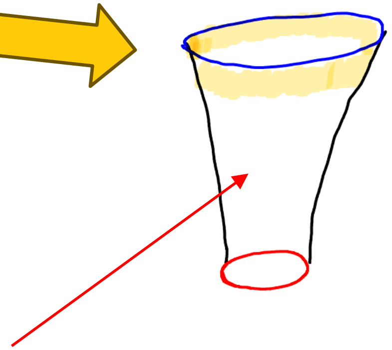
$$\exp\left(\frac{r_0}{2}\right) = \frac{3+4\alpha}{1+2\alpha}$$



重力検知面の条件

$${}^{(2)}R + 2\, k\mathcal{D}^2 k^{-1} \geq \left(2\alpha + \frac{3}{2}\right) k^2$$

$r = -\epsilon$では、
$\alpha \to \alpha + \tilde{\gamma}\,\epsilon\ (=: \tilde{\alpha})$
とりスケールすればよい



$\tilde{\alpha} \to \tilde{\alpha} - \gamma\,\epsilon$ と変更した空間を張り付ければよい

二つの計量の違い

$r=-\epsilon$ が $\tilde{r}=0$ と一致して、この座標で
$\tilde{r}=0$ のとき $\varphi k=1$ となるように座標を取り直す

重力検知面S近傍で面直交に座標を取る

$$ds^2=\varphi^2 d\tilde{r}^2+g_{ab}dx^a dx^b$$

張り付けた空間の計量($r<0$)

$$d\bar{s}^2=\underbrace{\frac{1-2\exp\left(-\frac{r_0}{2}\right)}{1-2\exp\left(-\frac{\tilde{r}+r_0}{2}\right)}\exp(\tilde{r})\,\varphi_0^2(x^a)}_{=:\,\bar{\varphi}^2}dr^2+\underbrace{\exp(\tilde{r})\,g_{0,ab}(x^a)}_{=:\,\bar{g}_{ab}}dx^a dx^b$$

$\tilde{r}=0$(接続面)において　$\varphi=\bar{\varphi}\ (\coloneqq\varphi_0)$　$g_{ab}=\bar{g}_{ab}\ (\coloneqq g_{0,ab})$　$k=\bar{k}$

⇒ $\tilde{r}=0$近傍において滑らかな関数Φ, Tと滑らかなテンソルh_{ab}を用いて　(ただし、$g^{ab}h_{ab}=0$)

$\varphi-\bar{\varphi}\ =:2\tilde{r}\,\varphi\,\Phi$　　$g_{ab}-\bar{g}_{ab}=\tilde{r}^2\,T\,g_{ab}+\tilde{r}h_{ab}$　　と表せる。

二つの計量の違い

$r=-\epsilon$ が $\tilde{r}=0$ と一致して、この座標で
$\tilde{r}=0$ のとき $\varphi k=1$ となるように座標を取り直す

重力検知面S近傍で面直交に座標を取る

$$ds^2=\varphi^2 d\tilde{r}^2+g_{ab}dx^a dx^b$$

張り付けた空間の計量（$r<0$）

$$d\bar{s}^2=\underbrace{\frac{1-2\exp\left(-\frac{r_0}{2}\right)}{1-2\exp\left(-\frac{\tilde{r}+r_0}{2}\right)}\exp(\tilde{r})\,\varphi_0^2(x^a)}_{=:\bar{\varphi}^2}dr^2+\underbrace{\exp(\tilde{r})\,g_{0,ab}(x^a)}_{=:\bar{g}_{ab}}dx^a dx^b$$

$\tilde{r}=0$（接続面）において　$\varphi=\bar{\varphi}\ (\coloneqq\varphi_0)$　$g_{ab}=\bar{g}_{ab}\ (\coloneqq g_{0,ab})$　$k=\bar{k}$

$\tilde{r}=0$近傍において滑らかな関数Φ, Tと滑らかなテンソル h_{ab}を用いて　（ただし、$g^{ab}h_{ab}=0$）

$$\varphi-\bar{\varphi}\ =:2\tilde{r}\,\varphi\,\Phi \qquad g_{ab}-\bar{g}_{ab}=\tilde{r}^2\,T\,g_{ab}+\tilde{r}h_{ab}$$

と表せる。

ここで、のりしろの計量として

$$d\check{s}^2=\check{\varphi}^2 d\tilde{r}^2+\check{g}_{ab}\,dx^a dx^b \qquad \check{\varphi}=\bar{\varphi}\left(1+\frac{d}{d\tilde{r}}F_1^2(\tilde{r})\Phi\right) \qquad \check{g}_{ab}=\bar{g}_{ab}\left(1+TF_1^2(\tilde{r})\right)+F_2(\tilde{r})h_{ab}$$

$$F(\tilde{r})\coloneqq\tilde{r}f(\tilde{r}) \quad \lim_{\tilde{r}\nearrow 0}f(\tilde{r})=1,\quad \lim_{\tilde{r}\searrow-\tilde{\epsilon}}f(\tilde{r})=0,\quad \lim_{\tilde{r}\nearrow 0}f^{(n)}(\tilde{r})=\lim_{\tilde{r}\searrow-\epsilon}f^{(n)}(\tilde{r})=0,$$

$\mathcal{O}(\tilde{\epsilon})<(F_1^2)''\leq 2$　$\mathcal{O}(\tilde{\epsilon})\leq 2(F_2^2)''-(F_2')^2$　$\tilde{\epsilon}\ll\epsilon$　としておくと　$r\fallingdotseq 0$で元の空間に
$r=-\epsilon$で作った空間に滑らかに接続される
（fは具体的な関数を示すことでその存在が示せる）

のりしろ部分の曲率

$\tilde{\epsilon} \ll \epsilon$

$$d\check{s}^2 = \check{\varphi}^2 d\tilde{r}^2 + \check{g}_{ab}\, dx^a dx^b \qquad \check{\varphi} = \bar{\varphi}\left(1 + \frac{d}{d\tilde{r}} F_1^2(\tilde{r})\Phi\right) \qquad \check{g}_{ab} = \bar{g}_{ab}\left(1 + T F_1^2(\tilde{r})\right) + F_2(\tilde{r}) h_{ab}$$

$$\mathcal{O}(\tilde{\epsilon}) < (F_1^2)'' \leq 2 \qquad \mathcal{O}(\tilde{\epsilon}) \leq 2(F_2^2)'' - (F_2')^2$$

$\tilde{r}$は$-\tilde{\epsilon} \leq \tilde{r} \leq 0$

曲率を計算すると

$$ {}^{(3)}\check{R} = \frac{(F_1^2)''}{2}\, {}^{(3)}R|_{\tilde{r}=0} + \underbrace{[2(F_2^2)'' - (F_2')^2 - \tfrac{3}{2}(F_1^2)'']}_{\geq 0} \underbrace{\left(\frac{1}{2\varphi} h_{ab}\right)^2_{\tilde{r}=0}}_{\geq 0} + [2 - (F_1^2)'']\gamma\epsilon k^2|_{\tilde{r}=0} + O(\tilde{r})$$

$$\geq \min\left({}^{(3)}R\Big|_{\tilde{r}=0},\quad 2\gamma\epsilon k^2\Big|_{\tilde{r}=0}\right) + O(\tilde{\epsilon})$$

$\mathcal{O}(\epsilon)$ のstrictに正な量

十分小さい ϵ に対し ${}^{(3)}\check{R}$ は常に正。

まとめ（リーマン・ペンローズ不等式の一般化）

極小曲面が非連結
の場合にも適用可能

Thm: リーマン-ペンローズ不等式（Huisken, Ilmanen(2001), Bray(2001)）　高次元化（Bray, Lee(2009)）

３次元多様体 (M, g): 完備、滑らか、非負曲率（$R \geq 0$）、漸近平坦、ADM質量m

∂Mは漸近平坦な無限遠と一番外にある極小曲面Sからなる。

このとき、極小曲面Sの面積Aは $A \leq 4\pi\,(2m)^2$を満たす。

等号成立は空間が
シュバルツシルト解
（球対称ブラックホール解）
の時間一定面に等しいときのみ

Thm: 重力検知面の面積不等式（**Izumi**, Tomikawa, Shiromizu, Yoshino (2021)）

３次元多様体 (M, g): 完備、滑らか、非負曲率（$R \geq 0$）、漸近平坦、ADM質量m

∂Mは漸近平坦な無限遠といくつかの境界Nからなる
すべての境界Nは、パラメータαの重力検知面で囲われる

以下のような面が存在しない

1、重力検知面の外に存在する境界を持たないコンパクトな極小曲面
2、重力検知面に境界を持ち、面積が$4\pi(2m)^2$以下になる極小曲面

このとき、重力検知面の面積Aは $A \leq 4\pi\left(\frac{3+4\alpha}{1+2\alpha}\,m\right)^2$を満たす。

等号成立は空間が
シュバルツシルト解（球対称ブラックホール解）
の時間一定面に等しいときのみ