

KMI分野横断セミナー

「時空の漸近構造、赤外発散、重力波」

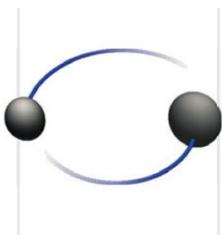
2022年12月18日

於 名古屋大学

重力波のメモリー効果 と時空の漸近対称性

石橋 明浩
近畿大理工

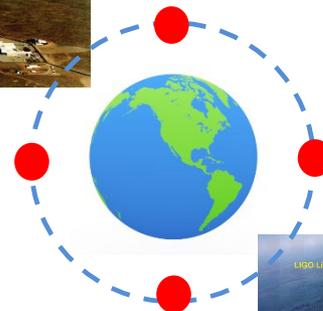
重力波源



重力波の伝播



重力波検出器
(自由粒子の系)

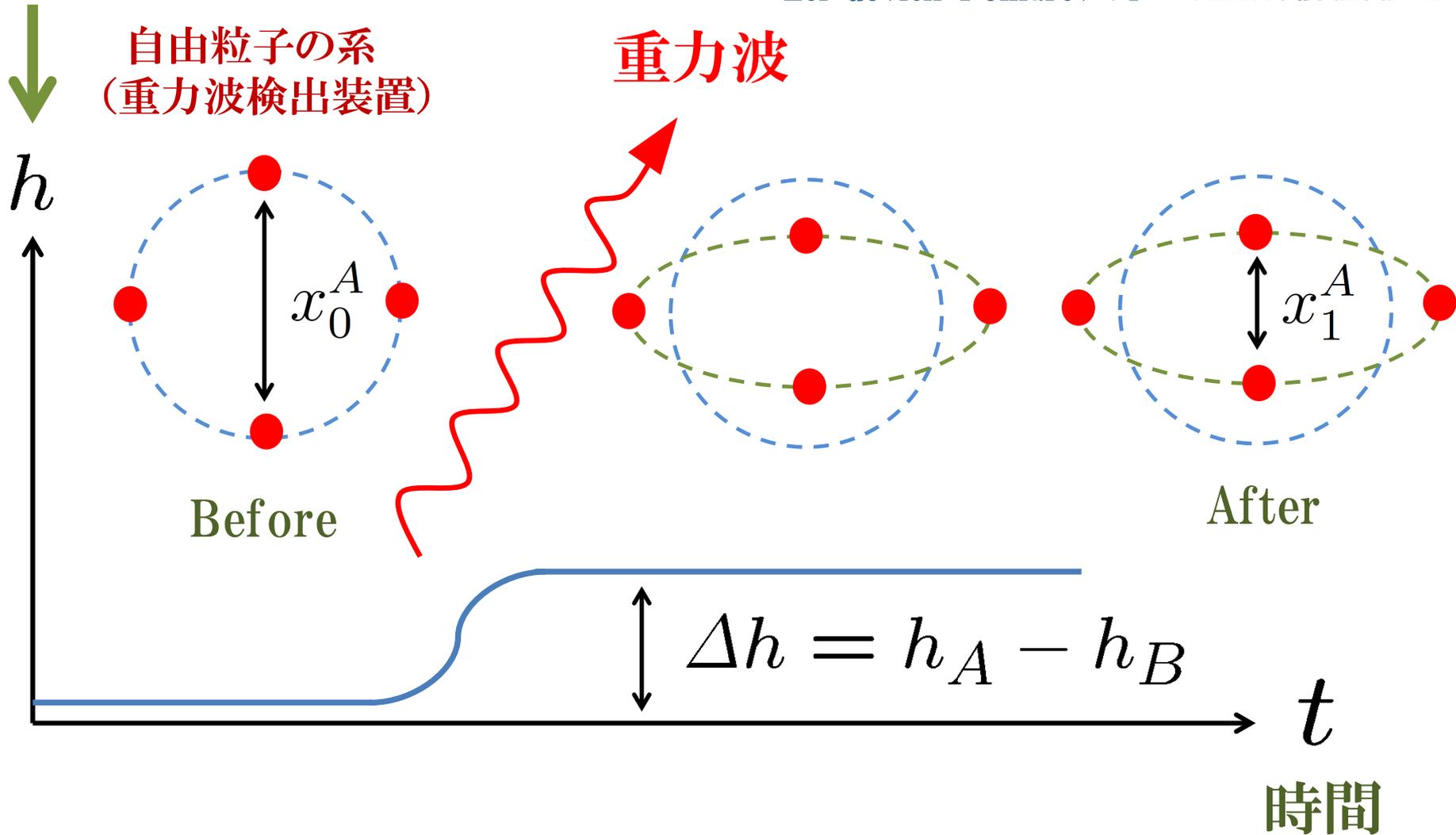


メモリー効果：重力波の「非振動的」振舞い

輻射バーストの通過に伴う自由粒子系の配置変化が元に戻らずいつまでも残る現象

Zel'dovich-Polnarev 74 Christodoulou 91

計量摂動
(時空のゆらぎ)



メモリー効果の楽しみ 1

I. メモリー効果 \Rightarrow 検出可能性

LISA

超大質量ブラックホールの
合体からの重力波 $z \leq 2$

e.g. Favata '10

DECIGO

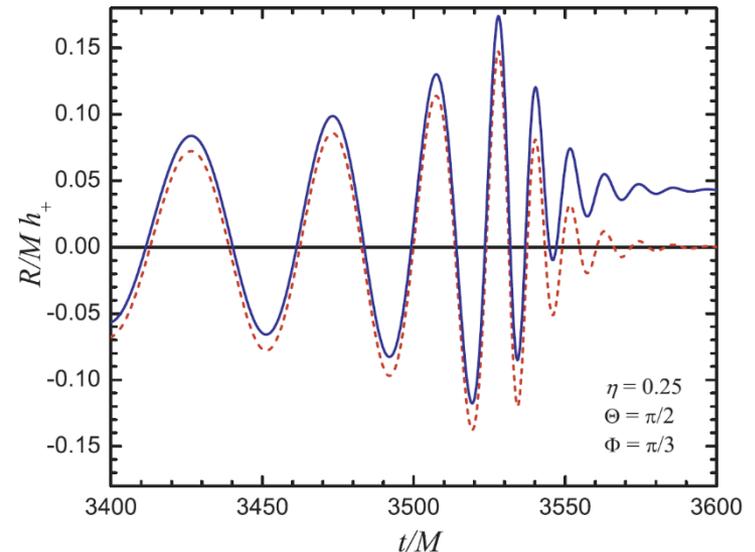
GRBjet からの重力波

e.g. Sago Ioka Nakamura Yamazaki '04

Pulsar Timing Array

による制限

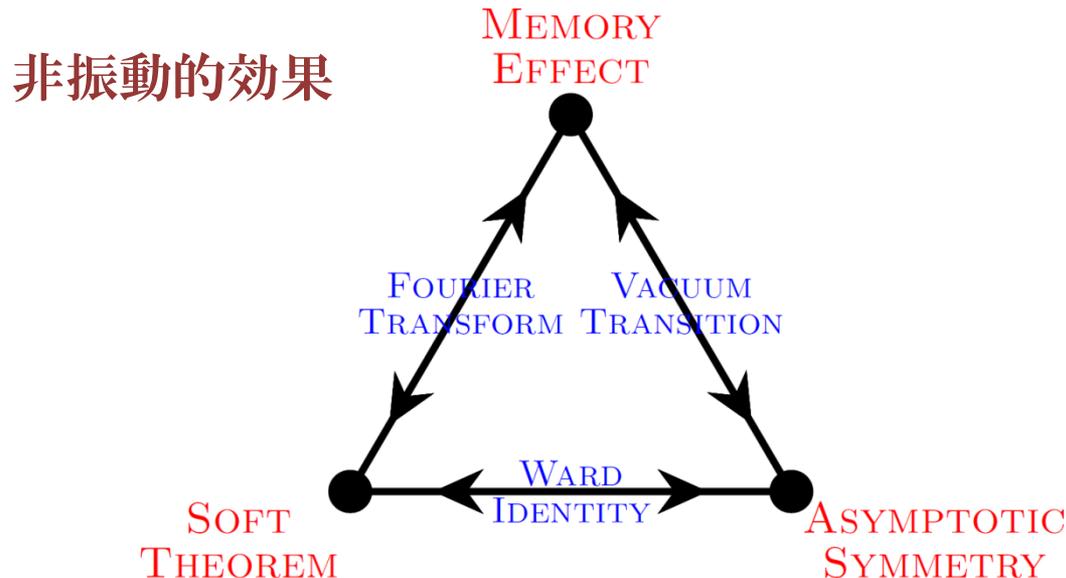
e.g. Wang et. al. '15



メモリー効果の楽しみ 2

II. 理論的側面

場の量子論との関係： 漸近対称性と軟粒子



軟(赤外)光子、軟重力子

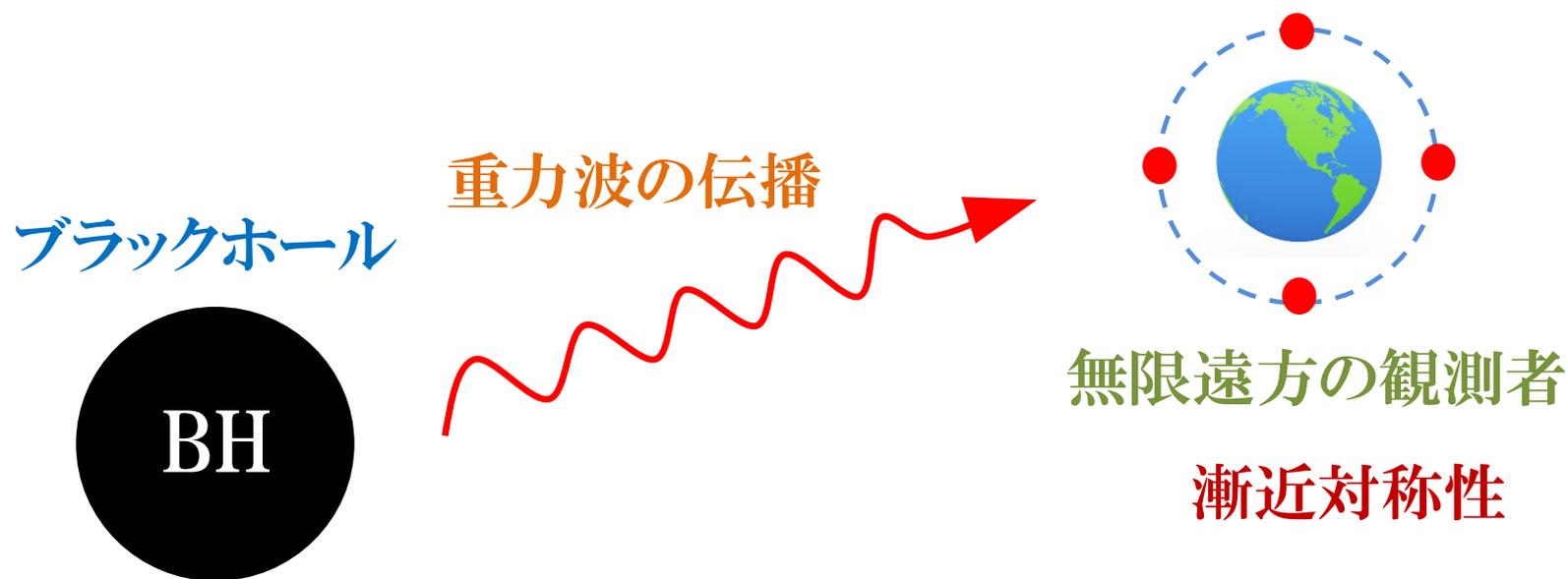
$$\omega \rightarrow 0$$

Bondi-Metzner-Sachs
(BMS) 対称性

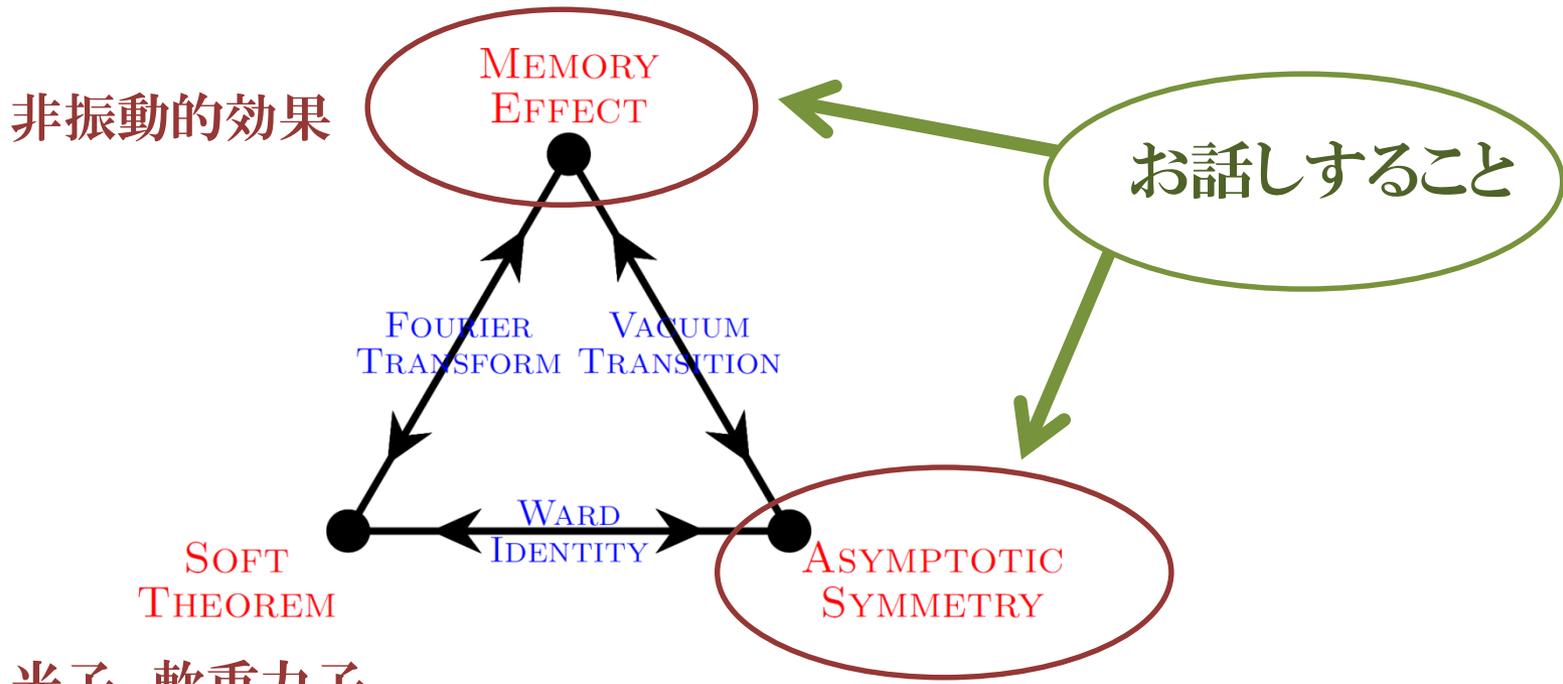
メモリー効果の楽しみ 2

II. 理論的側面

ブラックホールの情報問題との関連性



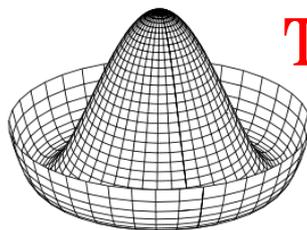
漸近対称性が、ブラックホールのもつ自由度を、軟重力子として記述する可能性。



軟(赤外)光子、軟重力子

$$\omega \rightarrow 0$$

Bondi-Metzner-Sachs
(BMS) 対称性



Transitions between “vacua”

$$E \rightarrow 0$$

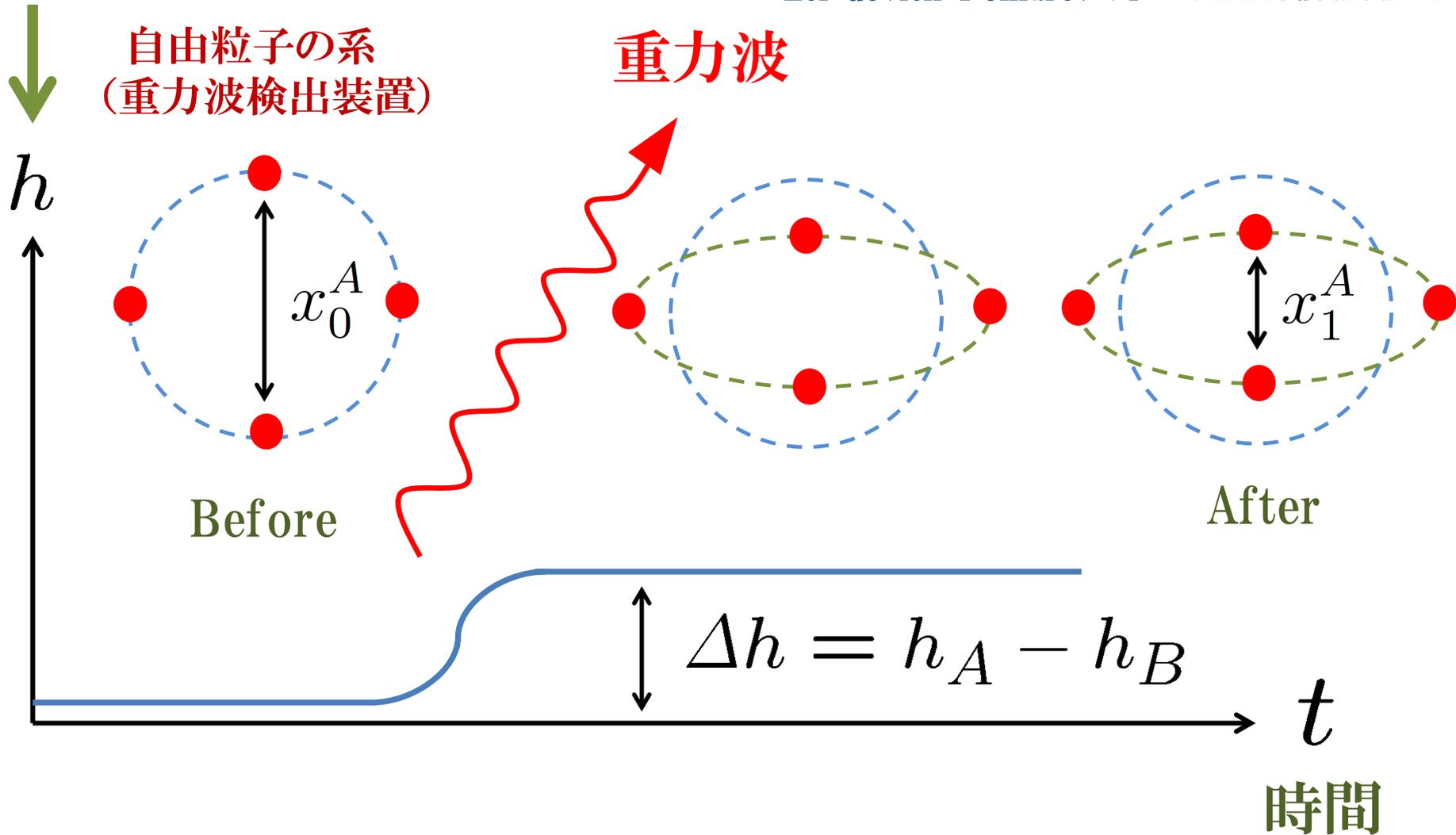
メモリー効果

メモリー効果：重力波の「非振動的」振舞い

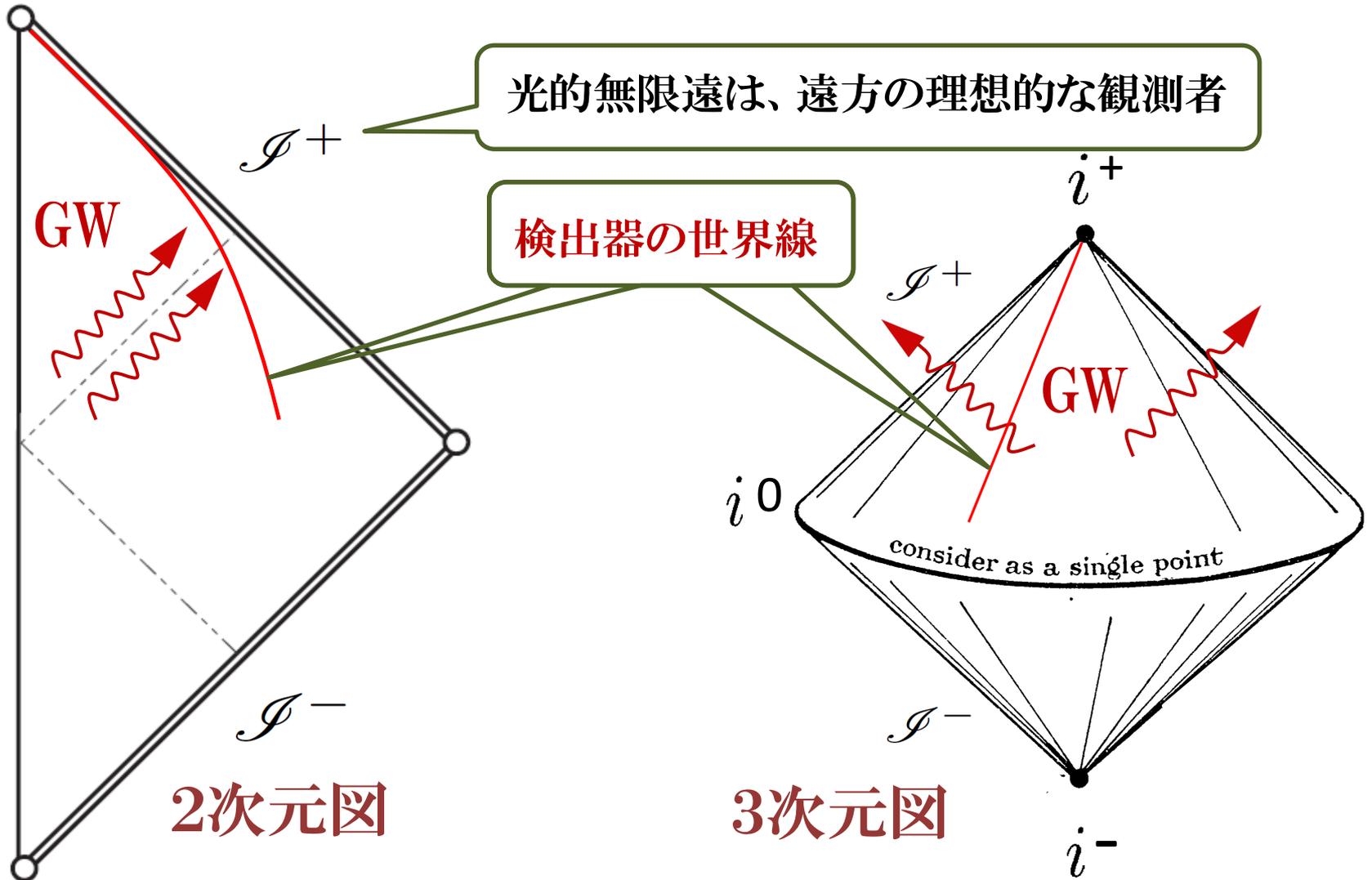
輻射バーストの通過に伴う自由粒子系の配置変化が元に戻らずいつまでも残る現象

Zel'dovich-Polnarev 74 Christodoulou 91

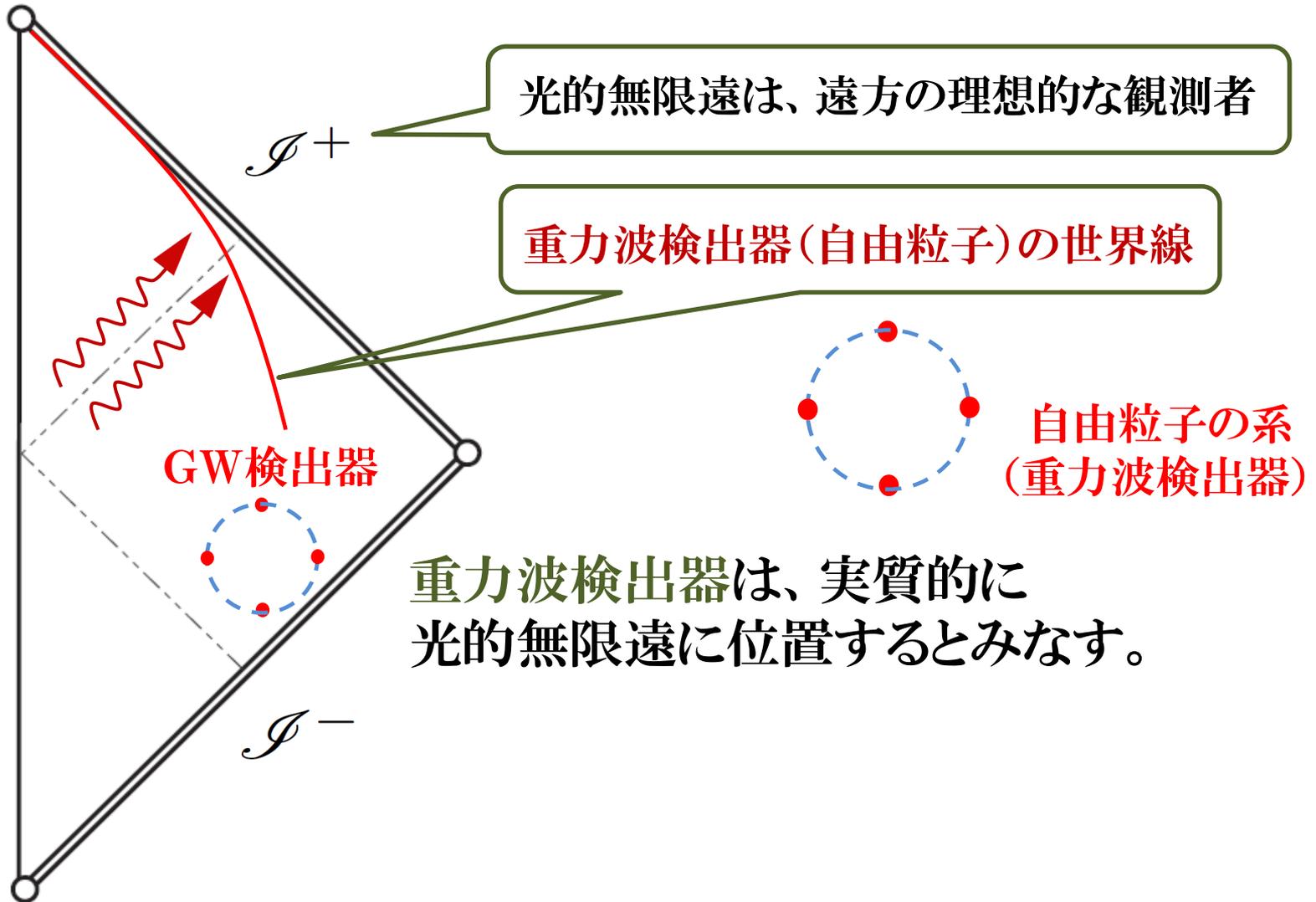
計量摂動
(時空のゆらぎ)



漸近平坦時空のペンローズ図



漸近平坦時空のペンローズ図



光的無限遠は、遠方の理想的な観測者

\mathcal{I}^+

重力波検出器 (自由粒子) の世界線

GW検出器

自由粒子の系
(重力波検出器)

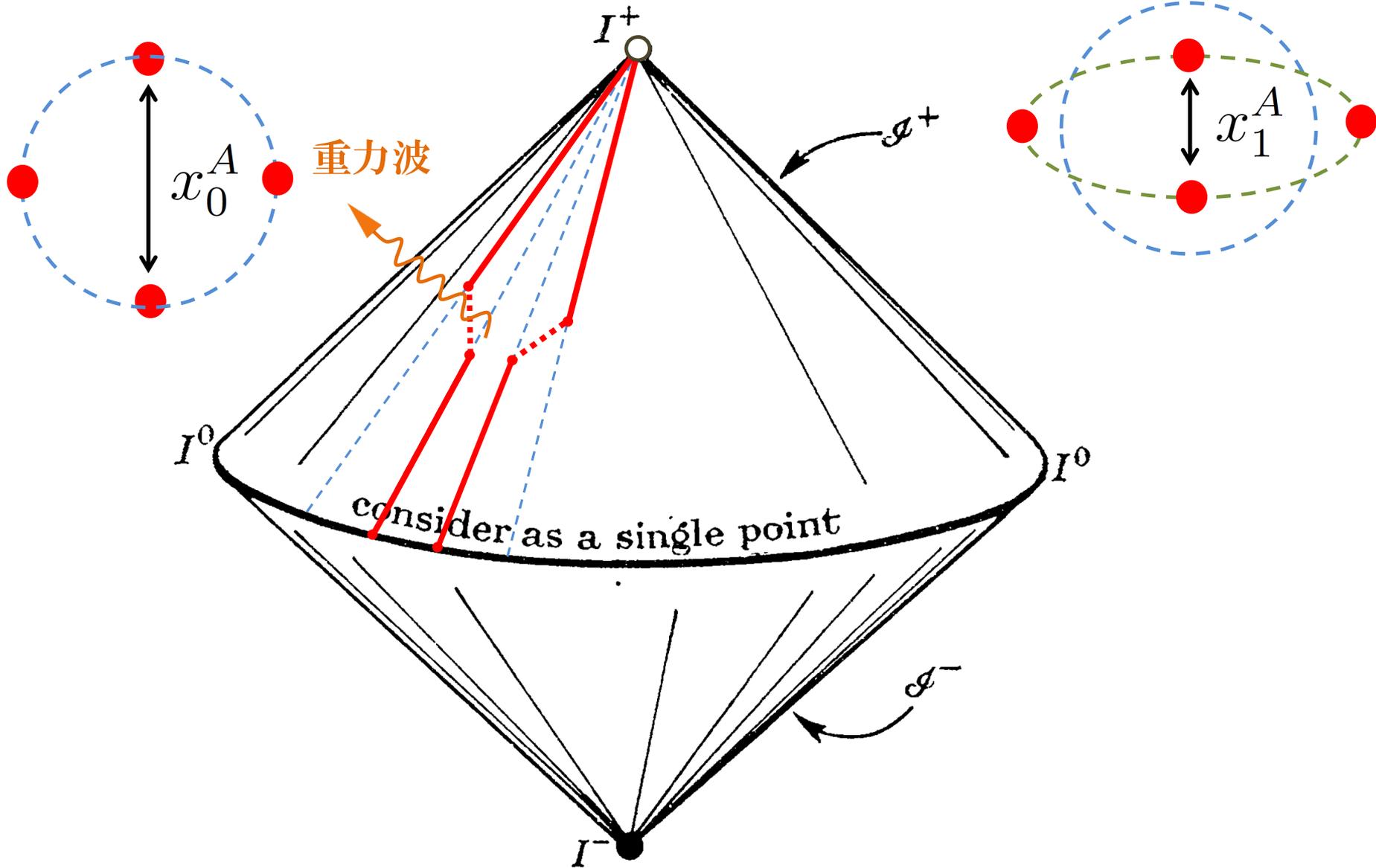
重力波検出器は、実質的に
光的無限遠に位置するとみなす。

\mathcal{I}^-

メモリー効果

$$x_1^B - x_0^B = \frac{1}{r} \Delta_A^B x_0^A$$

自由粒子の系



メモリー効果の具体的計算例

Minkowski 時空 + 重力波摂動 $g_{ab} = \eta_{ab} + h_{ab}$

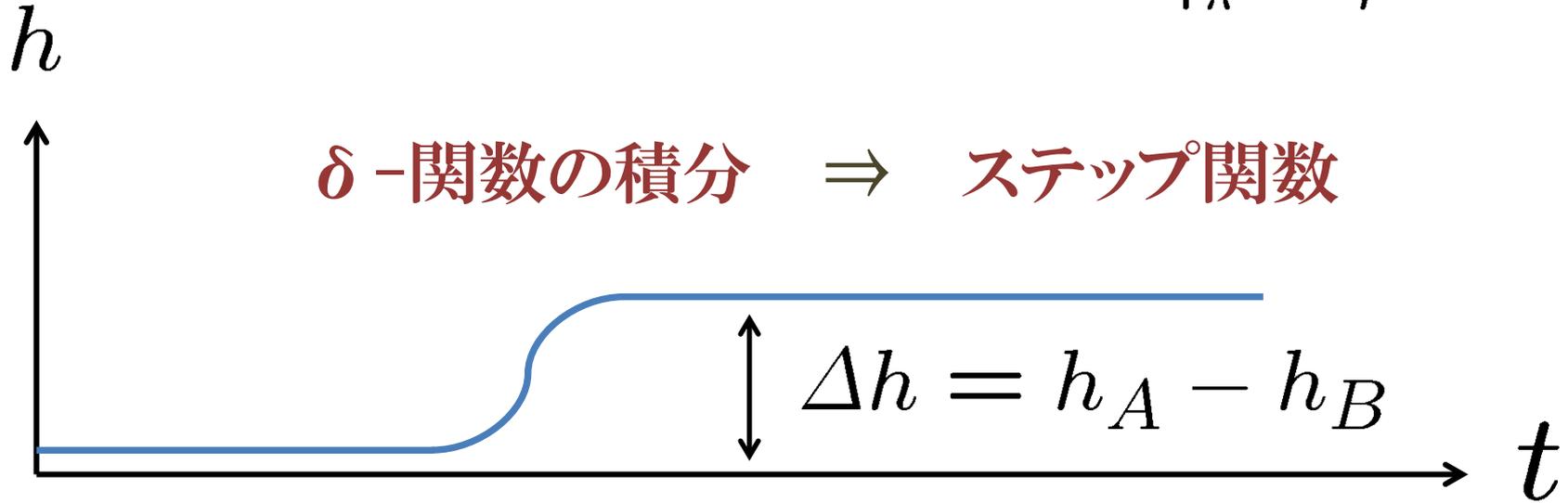
アインシュタイン方程式 + ゲージ条件

$$\nabla^c \nabla_c h_{ab} = 16\pi \underline{S_{ab}} \quad \text{源項}$$

$$h_{ab}(\mathbf{x}) = 16\pi \int d^4 \mathbf{x}' \underline{G(\mathbf{x} - \mathbf{x}') S_{ab}(\mathbf{x}')}$$

グリーン関数

グリーン関数の形 $G \sim \frac{1}{4\pi} \frac{\delta(t-r)}{r}$



測地線偏差の式 $\frac{d^2}{dt^2} x^A = \underline{R^A_{tBt}} x^B$

摂動 h_{ab} に対する曲率テンソル

\rightarrow 位置変化 $x_1^A - x_0^A = \frac{1}{2} \Delta h_{AB}^{\text{TT}} x^B$

$D > 4$ (偶数次元)

Leading-order term は δ -関数の微分.

$$D = 6 \quad G \sim \frac{\delta'(u)}{r^2} + \frac{\delta(u)}{r^3} \quad (\text{ここで } u = t - r)$$

$$D = 8 \quad G \sim \frac{\delta''(u)}{r^3} + 3\frac{\delta'(u)}{r^4} + 3\frac{\delta(u)}{r^5}$$

積分をしても、輻射と同じオーダーでは
ステップ関数は現れない。

 メモリー効果はない

4D と $D > 4$ の違い

輻射の振る舞い: $\sim \frac{1}{r^{(D-2)/2}}$

静的(クーロンの)部分の振る舞い: $\sim \frac{1}{r^{D-3}}$

$D = 4$	➡	どちらも	$\sim \frac{1}{r}$	➡	輻射と同じ オーダーでの メモリー効果
$D > 4$	➡		$1 < \frac{D-2}{2} < D-3$	➡	メモリー効果なし

c.f. subleading メモリー

Pate-Raclariu-Strominger 1712.01204

Scalar wave

E.O.M $\square\varphi = -4\pi S$

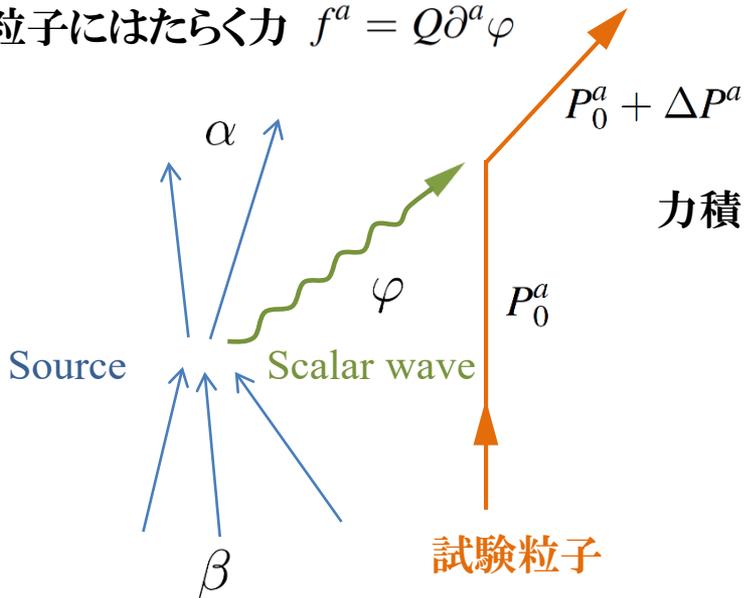
Source $S(x) = \sum_{(i)\text{in}} q_{(i)} \frac{d\tau_{(i)}}{dt} \delta_{d-1}(\mathbf{x} - \mathbf{y}_{(i)}(t)) \Theta(-t) + \sum_{(j)\text{out}} q_{(j)} \frac{d\tau_{(j)}}{dt} \delta_{d-1}(\mathbf{x} - \mathbf{y}_{(j)}(t)) \Theta(t)$

Solution (Lienard-Wiechert)

$$\varphi_S(x) = \frac{2\pi}{(2\pi r)^{d/2-1}} \frac{\partial^{d/2-2}}{\partial U^{d/2-2}} (\Theta(U)\alpha(\hat{\mathbf{r}}) + \Theta(-U)\beta(\hat{\mathbf{r}}))$$

$$\alpha = \sum_{(i),\text{out}} \frac{d\tau_{(i)}}{dt} \frac{q_{(i)}}{1 - \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{v}_{(i)}} \quad \beta = \sum_{(j),\text{in}} \frac{d\tau_{(j)}}{dt} \frac{q_{(j)}}{1 - \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{v}_{(j)}}$$

試験粒子にはたらく力 $f^a = Q\partial^a\varphi$



力積 $\Delta P^a(U) = \int_{-\infty}^U dU' f^a(U', \mathbf{x})$

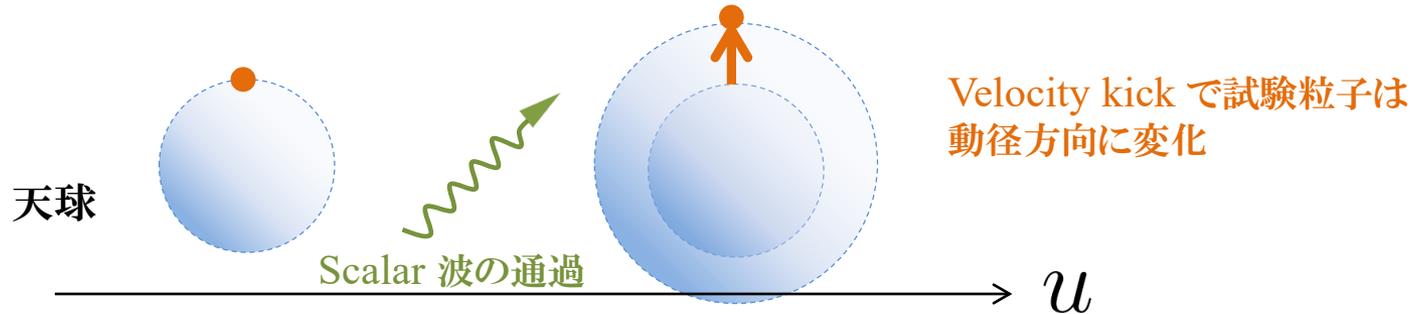
$$= -2\pi Q \frac{\alpha - \beta}{(2\pi r)^{d/2-1}} \frac{d^{d/2-2}}{dU^{d/2-2}} \Theta(U) K^a$$

$$K^a = -\partial^a U$$

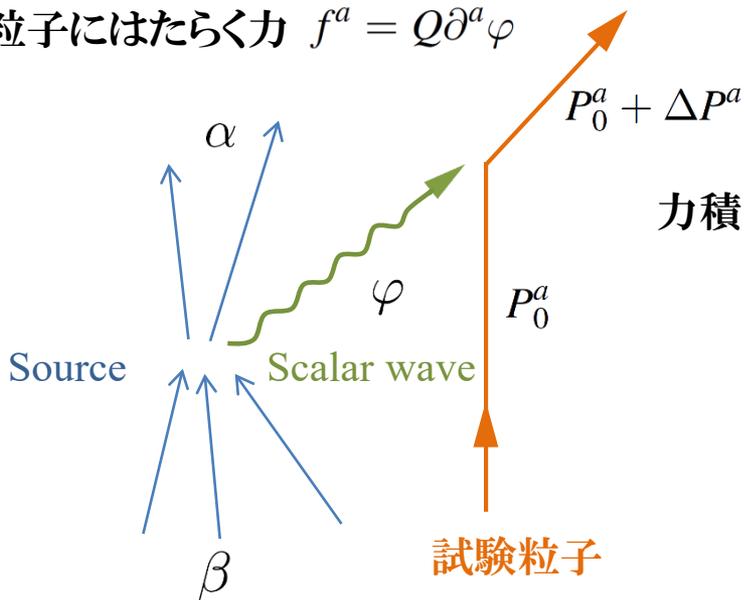
Scalar memory

$$d = 4 \quad \Delta P^a \sim -\frac{Q(\alpha - \beta)}{r} \underline{\Theta(u)} K^a + O\left(\frac{1}{r^2}\right) \quad \begin{array}{l} \text{“Momentum(velocity) kick”} \\ \text{“Change of mass”} \end{array}$$

$$d = 6 \quad \Delta P^a \sim -\frac{Q(\alpha - \beta)}{r^2} \delta(u) K^a + O\left(\frac{1}{r^3}\right) \quad \begin{array}{l} \text{No velocity kick,} \\ \text{No change of mass in leading order} \end{array}$$



試験粒子にはたらく力 $f^a = Q\partial^a\varphi$



力積 $\Delta P^a(U) = \int_{-\infty}^U dU' f^a(U', \mathbf{x})$

$$= -2\pi Q \frac{\alpha - \beta}{(2\pi r)^{d/2-1}} \frac{d^{d/2-2}}{dU^{d/2-2}} \Theta(U) K^a$$

$$K^a = -\partial^a U$$

Electromagnetic wave

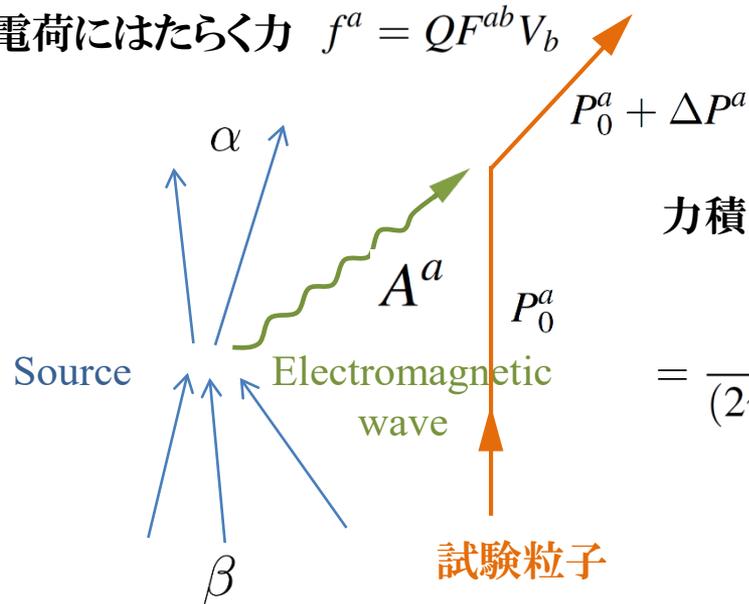
E.O.M $\square A^b = -4\pi J^b \quad \partial_a A^a = 0$

Solution (Lienard-Wiechert) $A^a(x) = \frac{2\pi}{(2\pi r)^{d/2-1}} \frac{\partial^{d/2-2}}{\partial U^{d/2-2}} (\Theta(U)\alpha^a + \Theta(-U)\beta^a)$

$$\alpha^a(\hat{\mathbf{r}}) = \sum_{(i)\text{out}} \frac{d\tau_{(i)}}{dt} \frac{q_{(i)}u_{(i)}^a}{1 - \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{v}_{(i)}} \quad \beta^a(\hat{\mathbf{r}}) = \sum_{(j)\text{in}} \frac{d\tau_{(j)}}{dt} \frac{q_{(j)}u_{(j)}^a}{1 - \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{v}_{(j)}}$$

Electromagnetic field $F^{ab} = \frac{4\pi}{(2\pi r)^{d/2-1}} K^{[a}(\alpha^{b]} - \beta^{b]}) \frac{d^{d/2-2}}{dU^{d/2-2}} \delta(U)$

試験電荷にはたらく力 $f^a = QF^{ab}V_b$



力積 $\Delta P^a(U) = \int_{-\infty}^U dU' f^a(U', \mathbf{x})$

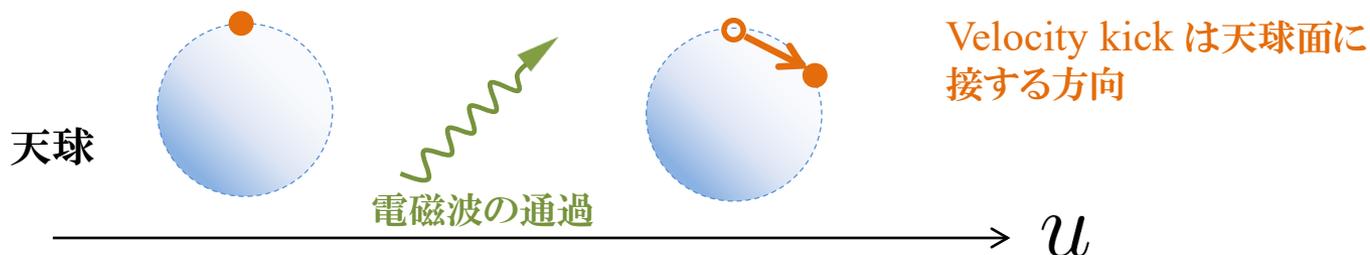
$$= \frac{2\pi Q}{(2\pi r)^{d/2-1}} \left[\sum_{(i)\text{in,out}} \frac{\eta_{(i)}q_{(i)}}{1 - \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{v}_{(i)}} \frac{d\tau_{(i)}}{dt} \underline{q^{ab}u_{(i)b}} \right] \frac{d^{d/2-2}}{dU^{d/2-2}} \Theta(U)$$

天球面への射影テンソル

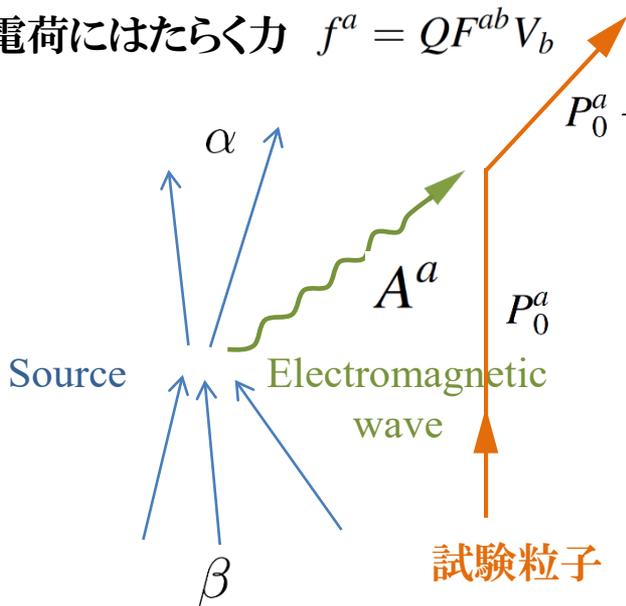
Electromagnetic memory

$d = 4$: 天球面に接する方向に位置が変化し, そのまま残る

$d > 6$: No memory effect



試験電荷にはたらく力 $f^a = QF^{ab}V_b$



$$\text{力積 } \Delta P^a(U) = \int_{-\infty}^U dU' f^a(U', \mathbf{x})$$

$$= \frac{2\pi Q}{(2\pi r)^{d/2-1}} \left[\sum_{(i)\text{in,out}} \frac{\eta_{(i)} q_{(i)}}{1 - \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{v}_{(i)}} \frac{d\tau_{(i)}}{dt} \underline{q^{ab} u_{(i)b}} \right] \frac{d^{d/2-2}}{dU^{d/2-2}} \Theta(U)$$

天球面への射影テンソル

渐近对称性：BMS对称性

Bondi-van der Burg-Metzner 62

Sachs 62

漸近平坦時空の漸近対称性 Asymptotic Symmetry

$$\tilde{g}_{ab} = \Omega^2 g_{ab} \quad \Omega \sim \frac{1}{r} \rightarrow 0 \quad \text{於 } \mathcal{I}$$

時空内部の対称性

$$\mathcal{L}_X g_{ab} = 0$$

X^a Killing vector

光的無限遠方での漸近対称性

$$\Omega^2 \mathcal{L}_X g_{ab} = 0 \quad \text{於 } \mathcal{I}$$

$\tilde{X}^a = X^a$ は、Killing ベクトルである必要はない。

どの様な速さで $\Omega^2 \mathcal{L}_X g_{ab} \rightarrow 0$ となるべきかは、 \mathcal{I} での境界条件で決まる。

光的無限遠での漸近平坦性をどのように定義すべきか？

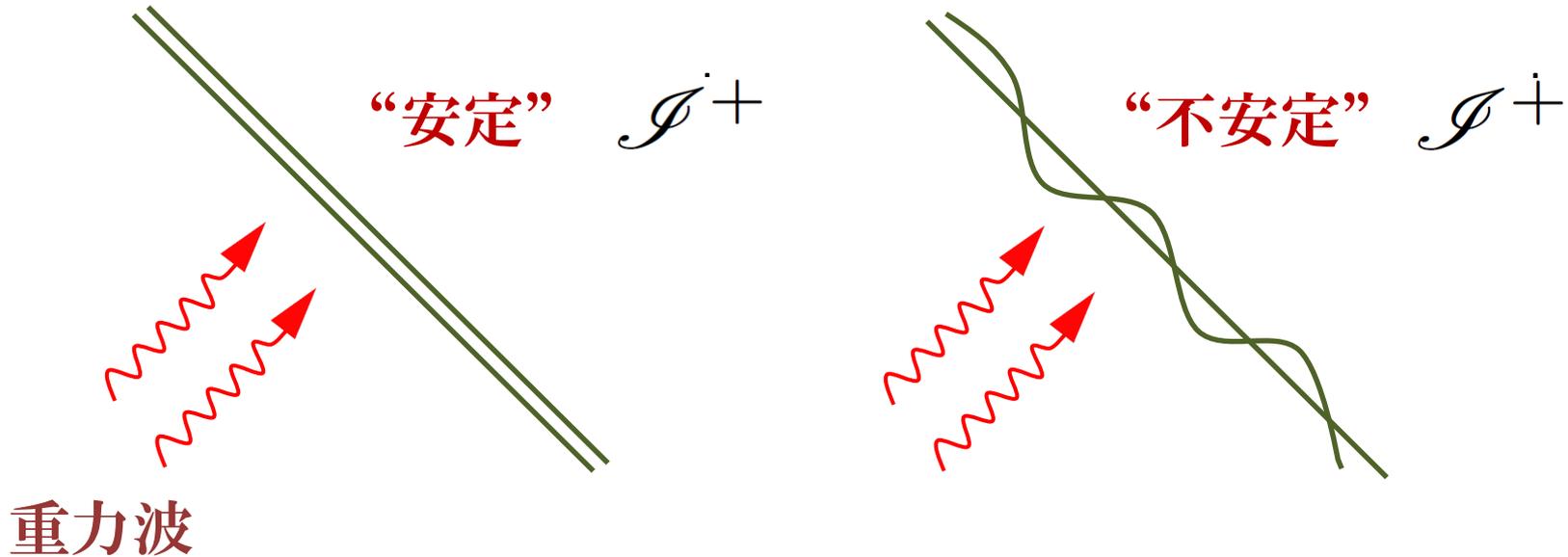
I. 漸近条件(境界条件)は十分に一般的であるべき

➡ 重力波などのダイナミクスを許す程度
には一般的な条件設定にする

II. 漸近条件(境界条件)は十分に強いものであるべき

➡ エネルギーなどの物理量が良設定となる
ようにある程度の対称性を許す程度には
強い条件設定にする

光的無限遠での境界条件



境界条件: \mathcal{I}^+ は、輻射のもとでも正則かつ光的で安定であれ

$$\delta \tilde{g}_{ab} = \tilde{g}^{ab} \delta \tilde{g}_{ab} = O(\Omega) \quad \delta \tilde{g}_{ab} \tilde{\nabla}^a \Omega = O(\Omega^2)$$

$$\delta \tilde{g}_{ab} \tilde{\nabla}^a \Omega \tilde{\nabla}^b \Omega = O(\Omega^3)$$

$$\Omega \sim \frac{1}{r} \rightarrow 0$$

漸近平坦性と整合

漸近平坦時空の漸近対称性 Asymptotic Symmetry

$D = 4$ Minkowski 時空の例: $\tilde{g}_{ab} = \Omega^2 \eta_{ab}$

時空内部の対称性

Poincare 対称性

10 パラメーター

• 並進対称性

4

• ローレンツ変換

6

光的無限遠方での漸近対称性

BMS 対称性

無限次元の群

• Super translations (超並進)

$$X = \underline{T(\theta, \phi)} \cdot \frac{\partial}{\partial u} + \dots \quad u = t - r$$

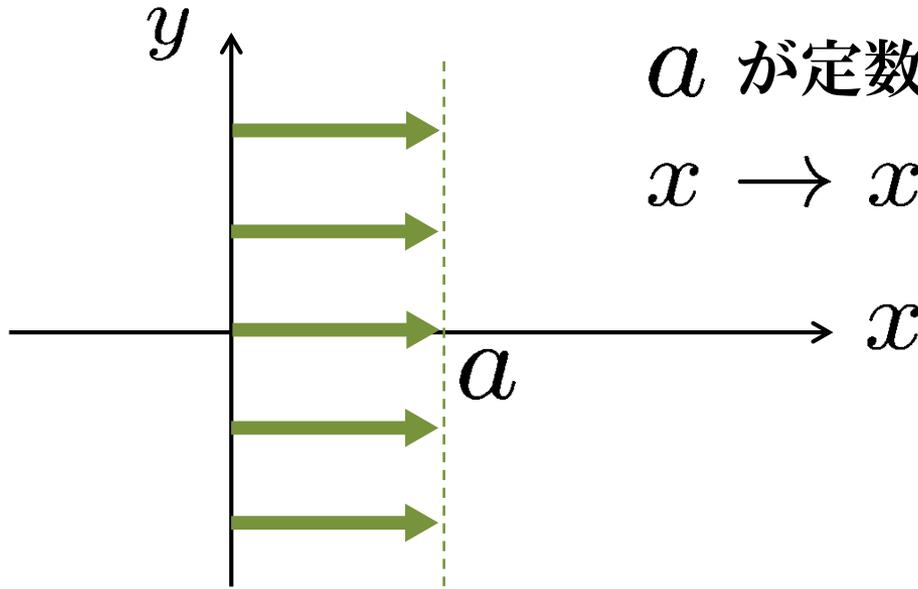
- \mathcal{I} の光的生成子を上へ移す

- 角度依存並進

• ローレンツ群

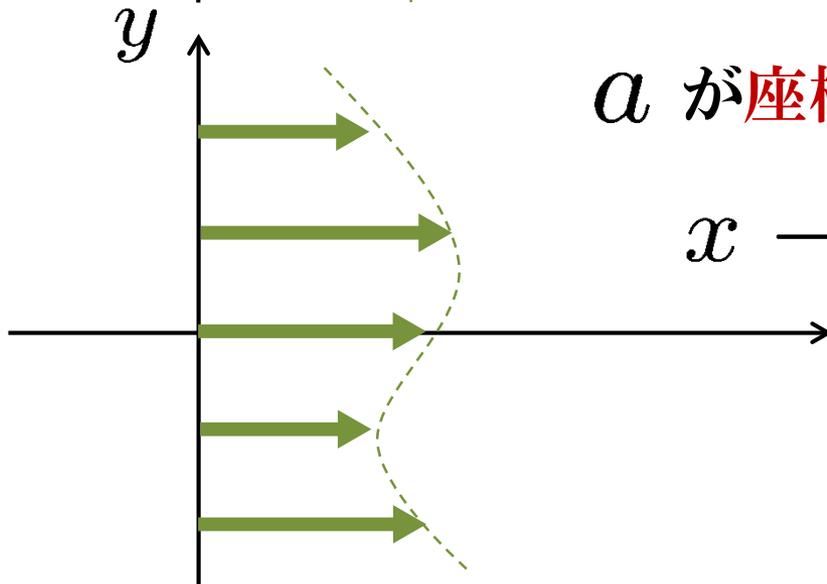
~ BMS/supertranslations

2次元平面の例



a が定数のとき

$x \rightarrow x + a$ は並進対称性



a が座標の関数のとき, 一般に

$x \rightarrow x + a$ は対称性にならない

Minkowski symmetry \longrightarrow Asymptotic symmetry at null infinity

Poincare symmetry $d = 4$

$$\text{SO}(3, 1) \ltimes \mathbb{R}^4$$

Lorentz transf. Translations



BMS symmetry $d = 4$

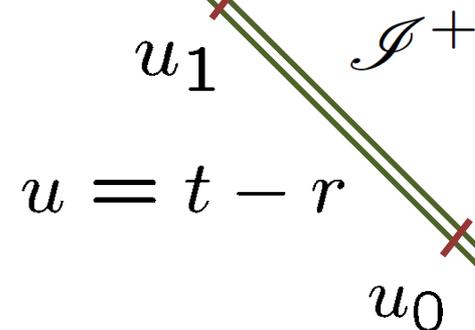
$\text{SO}(3, 1) \ltimes$ Supertranslations
無限次元角度依存並進

光的ガウス (Bondi-型) 座標

$$ds^2 = -2du(dr + \alpha du + r\beta_A dz^A) + r^2 \gamma_{AB} dz^A dz^B$$

Supertranslations (超並進対称性) の生成子

$$X = T(z) \left(\frac{\partial}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{1}{r} s^{AB} D_B T(z) \frac{\partial}{\partial z^A} + \dots,$$



$$u = t - r$$

$T(z)$: \mathcal{I}^+ の断面 S^{d-2} 上の任意関数 (z^A 角度座標)

(ただし、 $\ell = 0$ $\ell = 1$ 球面調和関数の場合 \Rightarrow 通常の並進対称性)

空間回転対称性の生成子

$$X = \xi^A \frac{\partial}{\partial z^A} + \dots,$$

ξ^A : S^{d-2} 上の Killing vector

Lorentz 対称性の生成子

$$X = C(z) \left[u \left(\frac{\partial}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial r} \right) - r \frac{\partial}{\partial r} \right] - s^{AB} D_B C(z) \frac{\partial}{\partial z^A} + \dots,$$

$Y^A = s^{AB} D_B C$ C : $\ell = 1$ の球面調和関数 $\Rightarrow Y^A$: Conf. Killing

(c.f. C : より一般の関数 $\Rightarrow Y^A$: Superrotations (Virasoro) や Diff. 生成子)

光的無限遠での境界条件

近傍でGNC成分 $\alpha, \beta_A, \gamma_{AB}$ を $r = 1/\Omega$ についてべき展開

$$\alpha \sim \sum_{n \geq 0} \alpha^{(n)} r^{-n} \quad \beta_A \sim \sum_{n \geq 0} \beta_A^{(n)} r^{-n} \quad \gamma_{AB} \sim \sum_{n \geq 0} \gamma_{AB}^{(n)} r^{-n}$$

アインシュタイン方程式に代入し、係数間の関係を得る

高次も含めた境界条件

$$\alpha^{(0)} = 1/2 \quad \beta_A^{(0)} = 0 \quad \gamma_{AB}^{(0)} = s_{AB}$$

$$0 = \alpha^{(n)}, \quad 0 = \beta_A^{(n)}, \quad 0 = \gamma_{AB}^{(n)} \quad \text{for } 1 \leq n \leq (d-4)/2$$

$$\beta_A^{(n)} = -\frac{n}{(n+1)(d-2-n)} D^B \gamma_{AB}^{(n)} \quad \text{for } 1 \leq n \leq d-3$$

$$\alpha^{(n)} = \frac{n-1}{2n(d-3-n)} D^A \beta_A^{(n)} \quad \text{for } 1 \leq n \leq d-4$$

$$\gamma^{(n)} \equiv s^{AB} \gamma_{AB}^{(n)} = 0 \quad \text{for } 1 \leq n \leq d-3$$

メモリー効果と Supertranslations ($d = 4$)

べき展開解析より

$$\gamma_{AB}^{(1)} \Big|_{u < u_0}^{u > u_1} = 2 \left(D_A D_B T - \frac{1}{2} s_{AB} D^C D_C T \right)$$

曲率テンソルは

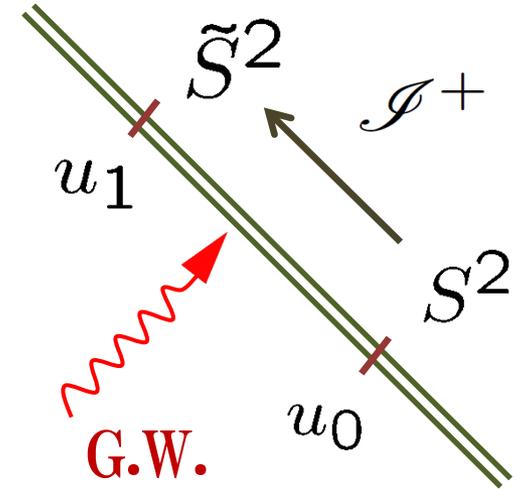
$$R_{uAuB} = -\frac{1}{2} r^{3-d/2} \partial_u^2 \gamma_{AB}^{(d/2-1)} + O(r^{2-d/2})$$

測地線偏差の方程式 $(\tau^a \nabla_a)^2 \xi^b = -R_{acd}{}^b \tau^a \tau^d \xi^c$ を積分

$$\xi \Big|_{u < u_0}^{u > u_1} = r^{-d/2+1} \Delta(\xi) \Big|_{u < u_0} + O(r^{-d/2})$$

ここで displacement テンソルは

$$\Delta_{AB} = \left(D_A D_B T - \frac{1}{2} s_{AB} D^C D_C T \right)$$



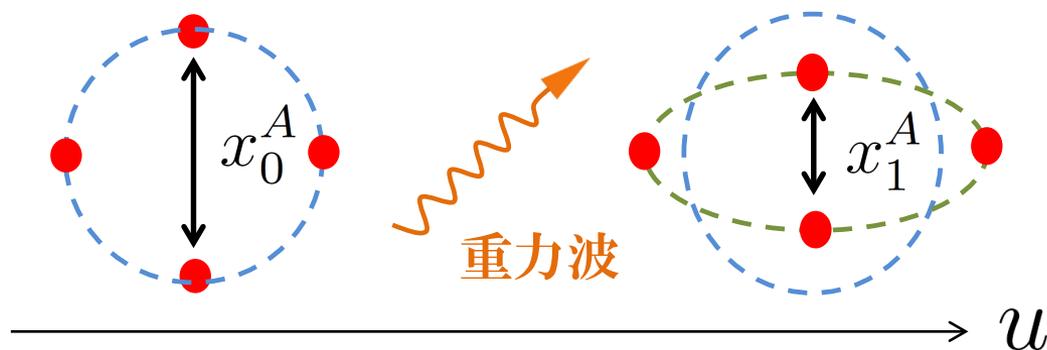
メモリー効果と Supertranslations ($d = 4$)

偏移テンソル：
$$\Delta_A^B = - \left(D_A D^B - \frac{1}{2} \delta_A^B D^c D_c \right) T(z)$$

D_A : S^2 上の微分演算子

偏移：
$$x_1^A - x_0^A = \frac{1}{r} \Delta_B^A x_0^B$$

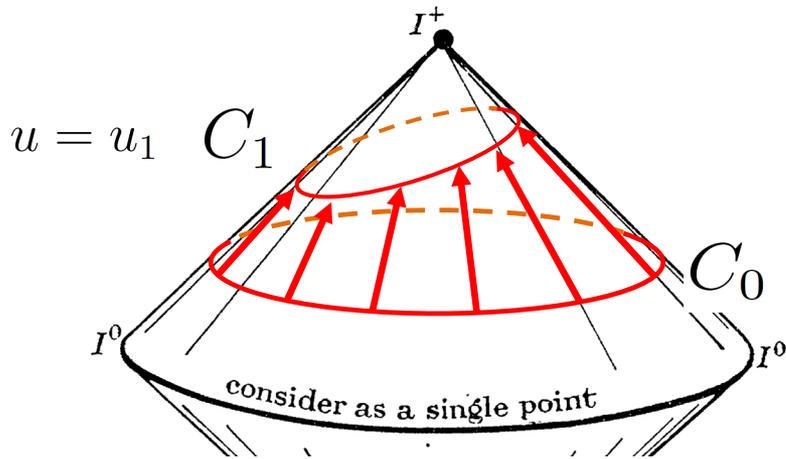
$T(z)$ は、メモリー効果の“ポテンシャル”



BMS超並進対称性と縮退した真空

(1) \mathcal{I}^+ 生成子の通常の並進

$$u_1 = u + \{Y_{lm} (l = 0, 1) \text{ の線形結合}\}$$



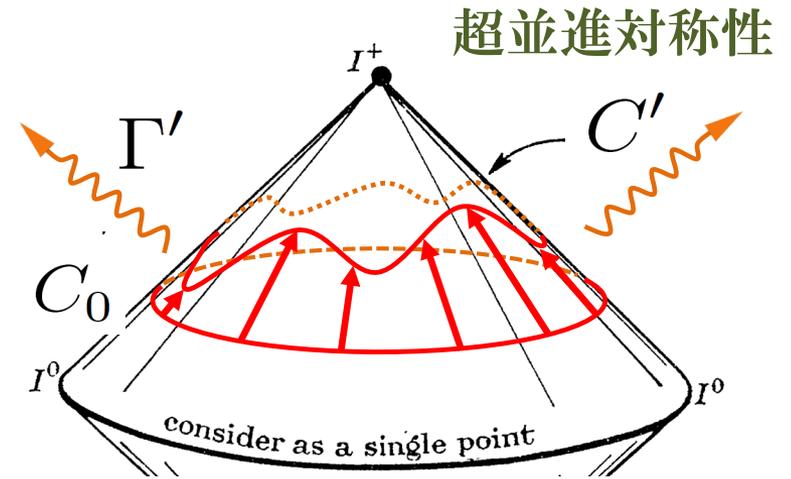
通常の並進で結びつく断面 C_0 C_1

共に接続(共変微分) Γ_0 について
“ひずみ”なし (shear-free): 「同じ真空」

真空: Γ_0 についての曲率が自明
 $\mathcal{I}^+ \cong \mathbb{R} \times S^2$

(2) \mathcal{I}^+ の生成子の**角度依存並進**

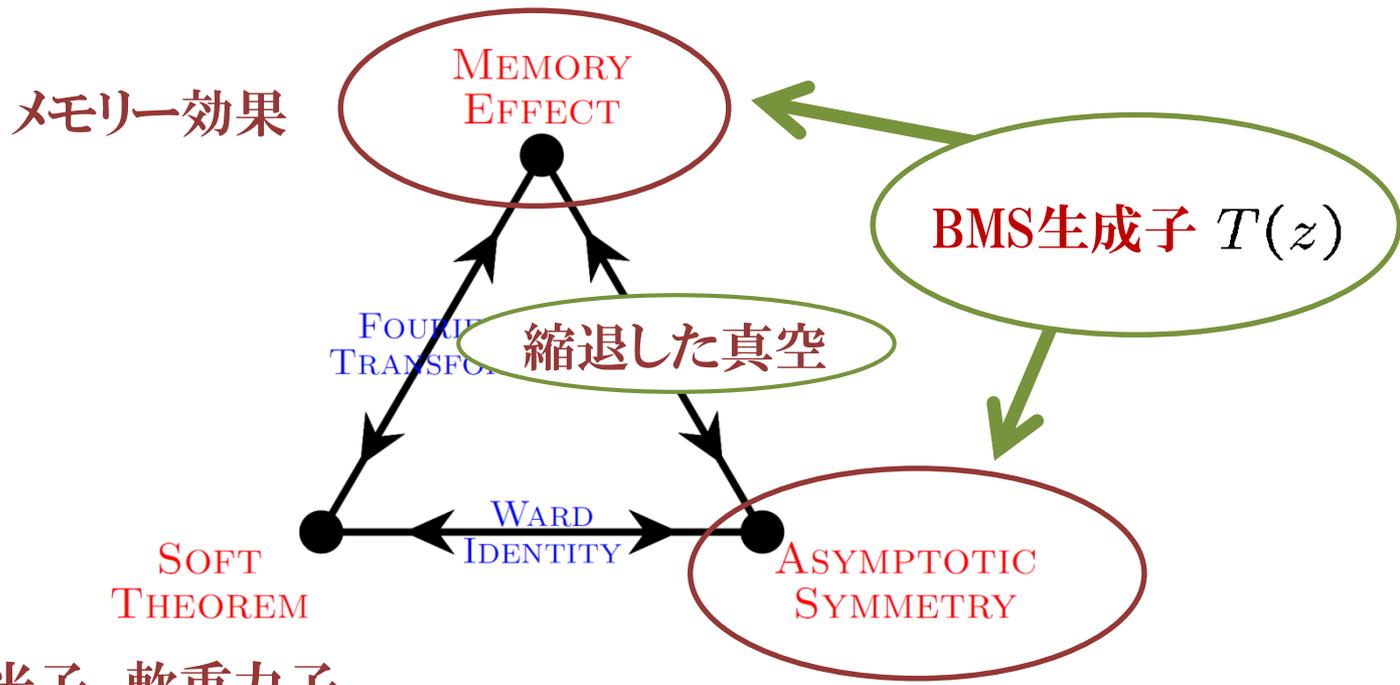
$$u' = u + T(z)$$



BMS超並進で結びつく断面 C_0 C'

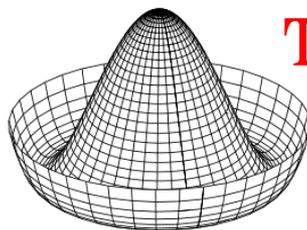
C' は**新しい接続** Γ' について
ひずみのない断面: 「異なる真空」

BMS生成子 $T(z)$ による真空の縮退



軟(赤外)光子、軟重力子

$$\omega \rightarrow 0$$



Transitions between “vacua”

$$E \rightarrow 0$$

輻射のエネルギー流と News

輻射のエネルギー流

輻射

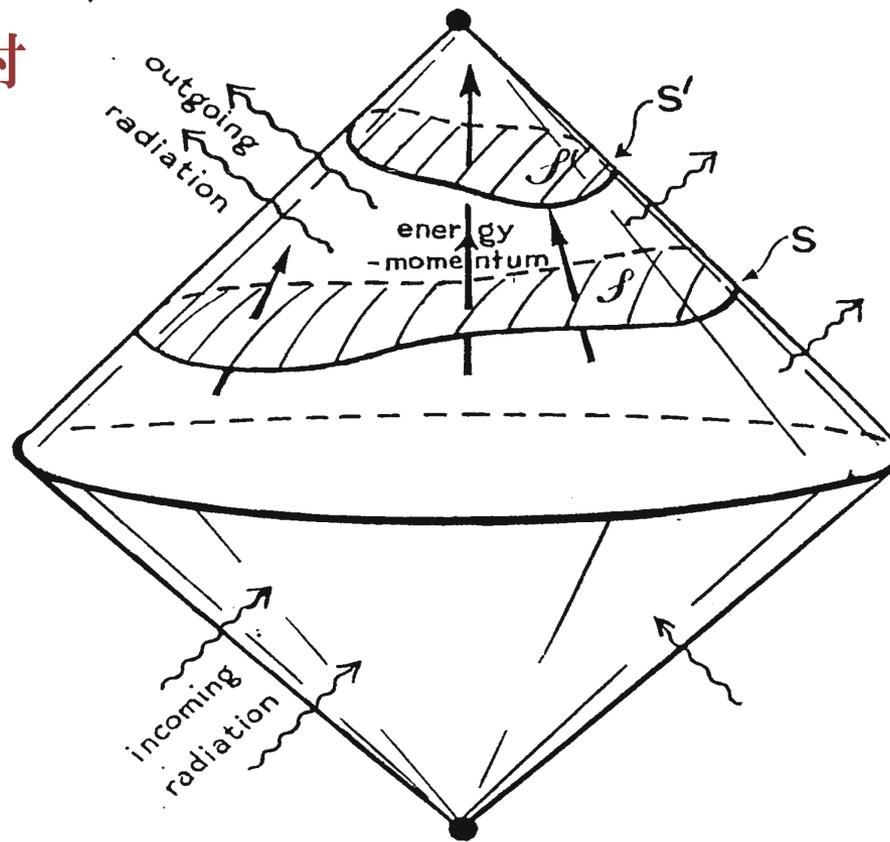


Fig. 5. The energy-momentum intercepted by \mathcal{S} is measured by an integral over S . The corresponding integral over S' is less by an amount equal to the energy-momentum carried away by the radiation which escapes between S and S' .

R. Penrose
“Relativity, groups and
topology” 1964

光的ガウス (Bondi-型) 座標

$$ds^2 = -2du(dr + \alpha du + r\beta_A dz^A) + r^2\gamma_{AB}dz^A dz^B$$

News tensor

$$N_{AB} = -\partial_u \gamma_{AB}^{(1)}$$

$$\gamma_{AB} \sim \sum_{n \geq 0} \gamma_{AB}^{(n)} r^{-n}$$

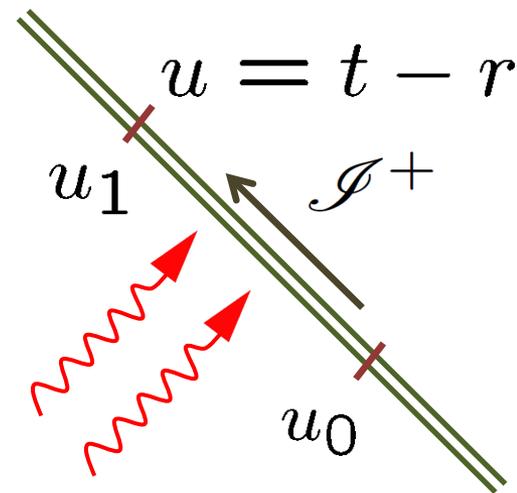
輻射のエネルギー流 $u \rightarrow u+T$

$$\mathcal{F} = -\frac{1}{32\pi} \int du T N_{AB} N^{AB}$$

Bondi flux = “hard” charge

$$+ \frac{1}{8\pi} \int_{S_\infty^2} T D^A D^B \Delta_{AB}$$

“soft” charge



重力波

BMS対称性の拡張

Minkowski symmetry \longrightarrow Asymptotic symmetry at null infinity

Poincare symmetry $d = 4$

$$\text{SO}(3, 1) \ltimes \mathbb{R}^4$$

Lorentz transf. Translations



BMS symmetry $d = 4$

$$\text{SO}(3, 1) \ltimes \text{Supertranslations}$$

無限次元角度依存並進

Poincare symmetry $d > 4$

$$\text{SO}(d - 1, 1) \ltimes \mathbb{R}^d$$

- 漸近構造の安定性とHamiltonian の存在
 \Rightarrow No Supertranslations
- Conserved charges : well-defined

Extended BMS 1 $d > 4$

$$\text{SO}(d - 1, 1) \ltimes \text{Supertranslations}$$

- $d > 4$ Soft-theorem との整合性を重視
 \Rightarrow 緩い漸近条件 ($d=4$ の条件と実質同じ)
- Conserved charges : ill-defined

Extended BMS 2 $d = 4$

$$\text{Superrotations} \ltimes \text{Supertranslations}$$

- Y^A : Locally defined Virasoro vector on S^2
 \Rightarrow Singular, Infinite dim.
- $d > 4$ への拡張は不可
- Conserved charges : ill-defined

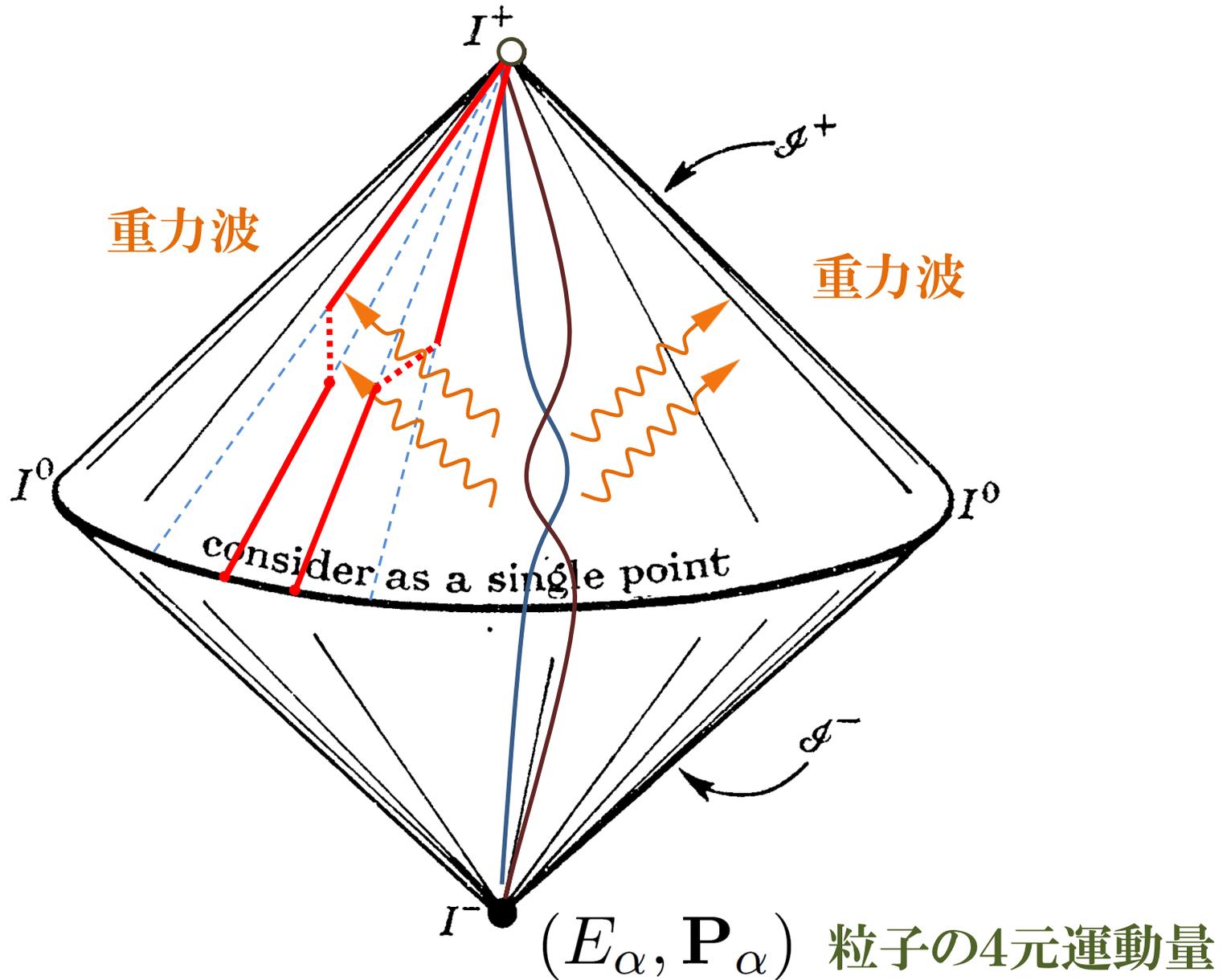
Extended BMS 3 $d = 4$

$$\text{Diff}(S^2) \ltimes \text{Supertranslations}$$

- Y^A : CKVでなくともよい
- $d > 4$ へ拡張可 (漸近条件を緩める必要有)
 $\text{Diff}(S^2) \longrightarrow \text{Diff}(S^{d-2})$
 \Rightarrow $d > 4$ Soft-theorem と整合可能
- Conserved charges : ill-defined
 \Rightarrow (add counter-terms?)

メモリー効果と重力波のエントロピー

粒子の散乱による重力波放射



粒子の散乱による重力波放射

$$p_\alpha = \frac{E_\alpha - \mathbf{P}_\alpha \cdot \mathbf{z}}{E} \quad \sum_\alpha p_\alpha = 1$$

散乱粒子の“確率分布”！？

$$S = - \sum_\alpha p_\alpha \log p_\alpha$$

↓ c.f. von Neumann エントロピー

BMS 超並進の生成ポテンシャル

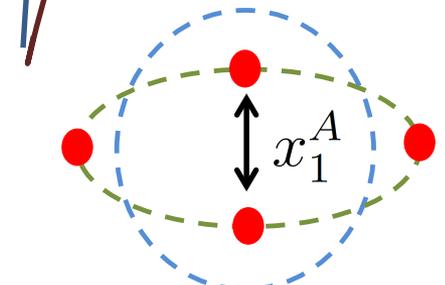
$$T(z) \propto ES - 8\pi (\mathcal{F} \text{ からなる項})$$

偏移テンソル：情報量(?)

$$\Delta_A^B = - \left(D_A D^B - \frac{1}{2} \delta_A^B D^c D_C \right) T(z)$$

重力波

重力波





まとめ

まとめ：重力波メモリーと漸近対称性

- 一般相対論の孤立系 = 漸近平坦時空と光的無限遠 \mathcal{I}
- 漸近対称性 $\mathcal{I} =$ BMS超並進を含む無限次元の対称性
 - $T(z) = S^2$ (\mathcal{I}^+ の断面)上の任意関数
 - = BMS超並進対称性の生成“ポテンシャル”
 - = 重力波メモリー効果の“ポテンシャル”
 - No Supertranslations \Rightarrow No memory
 - = 重力波の“エントロピー”
 - \Rightarrow 情報理論的な考察も必要(?)

まとめ：重力波メモリーと漸近対称性

- 一般相対論の孤立系 = 漸近平坦時空と光的無限遠 \mathcal{I}
- 漸近対称性 \mathcal{I} = BMS超並進を含む無限次元の対称性
- 場の量子論における軟(赤外)粒子やブラックホールの情報問題との示唆的關係。
- 重力波の物理は、観測・理論の深まりとともに、天文天体物理や一般相対論の枠組みを越えた視界の拡がりも見せ始めている。

A large green X shape is centered on a white background. The X is formed by two overlapping triangles that meet at the center. The text "Back up" is written in a red, serif font, centered within the intersection of the X.

Back up

光的無限遠での境界条件 1 (線形摂動)

高次元 (偶数) $D > 4$

線形摂動に対する条件

$$\delta \tilde{g}_{ab} = O(\Omega^{(d-2)/2})$$

$D = d$

$$\delta \tilde{g}_{ab} \tilde{\nabla}^a \Omega = O(\Omega^{d/2})$$

$$\delta \tilde{g}_{ab} \tilde{\nabla}^a \Omega \tilde{\nabla}^b \Omega = O(\Omega^{(d+2)/2}) \leftarrow \text{光的}$$

$$\tilde{g}^{ab} \delta \tilde{g}_{ab} = O(\Omega^{d/2}) \leftarrow D > 4 \text{ に特有}$$

Hollands-AI 05

c.f. $\tilde{g}^{ab} \delta \tilde{g}_{ab} = O(\Omega^{(d-2)/2}) = O(\Omega) \text{ in } D = 4$

$D > 4$ BMS Supertranslations?

$D > 4$ に特有の境界条件 $\tilde{g}^{ab} \delta \tilde{g}_{ab} = O(\Omega^{d/2})$ を考えよう:

$X^a = T(z) \tilde{\nabla}^a \Omega - \Omega \tilde{\nabla}^a T(z)$ により生成される摂動が
上の境界条件を満たすためには

$$\tilde{g}^{ab} (\Omega^2 \mathcal{L}_X g)_{ab} \sim \Omega (D^A D_A + d - 2) T \stackrel{!}{=} O(\Omega^{d/2})$$



$D_A : S^{D-2}$ 上の微分演算子

$$D > 4 \quad (D^A D_A + d - 2) T = O(\Omega^{(d-2)/2}) \rightarrow 0 \quad \text{右辺は零}$$

$$D = 4 \quad (D^A D_A + 2) T = O(\Omega^{(d-4)/2}) = O(1) \quad \text{零でなくてよい!}$$

S^2 上の任意の球面調和関数 $\ell \geq 0$ が許される

\Rightarrow 無限次元の並進対称性 super-translations

$D > 4$ BMS Supertranslations?

$D > 4$ に特有の境界条件 $\tilde{g}^{ab}\delta\tilde{g}_{ab} = O(\Omega^{d/2})$ を考えよう:

$X^a = T(z)\tilde{\nabla}^a\Omega - \Omega\tilde{\nabla}^aT(z)$ により生成される摂動が
上の境界条件を満たすためには

$$\tilde{g}^{ab}(\Omega^2 \mathcal{L}_X g)_{ab} \sim \Omega(D^A D_A + d - 2)T \stackrel{!}{=} O(\Omega^{d/2})$$



$D_A : S^{D-2}$ 上の微分演算子

$$D > 4 \quad (D^A D_A + \underline{d - 2})T = O(\Omega^{(d-2)/2}) \rightarrow 0 \quad \text{右辺は零}$$

$\ell = 1$ のみ満たす!

S^{d-2} 上の球面調和関数の方程式と比較

$$(D^A D_A + \underline{\ell(\ell + d - 3)})Y = 0$$

$D > 4$ BMS Supertranslations?

$D > 4$ に特有の境界条件 $\tilde{g}^{ab}\delta\tilde{g}_{ab} = O(\Omega^{d/2})$ を考えよう:

$X^a = T(z)\tilde{\nabla}^a\Omega - \Omega\tilde{\nabla}^aT(z)$ により生成される摂動が
上の境界条件を満たすためには

$$\tilde{g}^{ab}(\Omega^2\mathcal{L}_Xg)_{ab} \sim \Omega(D^A D_A + d - 2)T \stackrel{!}{=} O(\Omega^{d/2})$$

$D_A: S^{D-2}$ 上の微分演算子

$D > 4$ $T(z)$: $\ell = 1$ の球面調和関数でなければならない
($\ell = 0$: $T = const.$ は通常的时间並進対称性に対応)

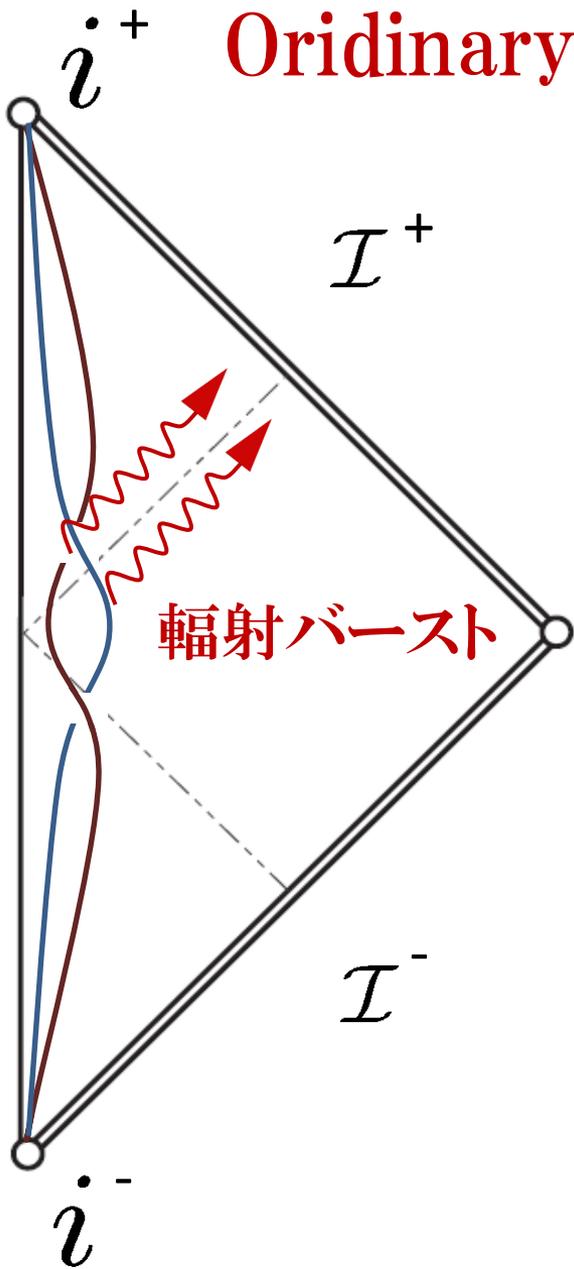
角度依存 $\ell \geq 2$ は許さない

$\ell = 0, 1$: d 個の独立な並進対称性のみ

2種類のメモリー効果

Ordinary Memory (c.f. 線形メモリー)

Zel'dovich-Polnarev 74

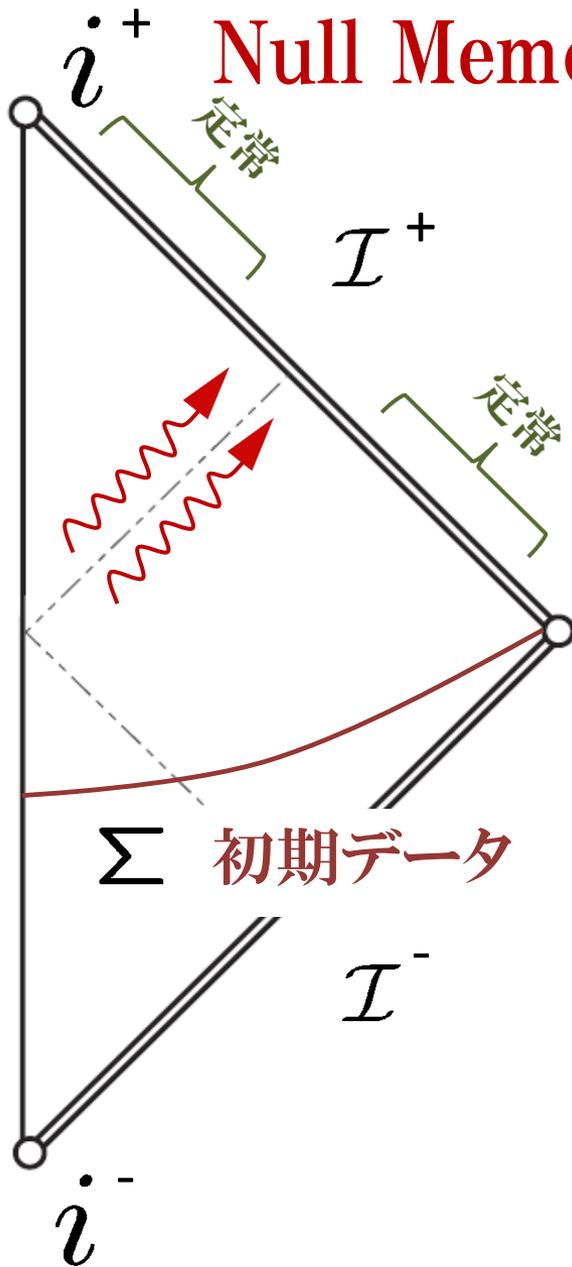


エネルギー・運動量の殆ど
時間的過去 i^- から未来 i^+ へ
物体・粒子により運ばれる

Null Memory

(c.f. 非線形メモリー)

Christodoulou 91

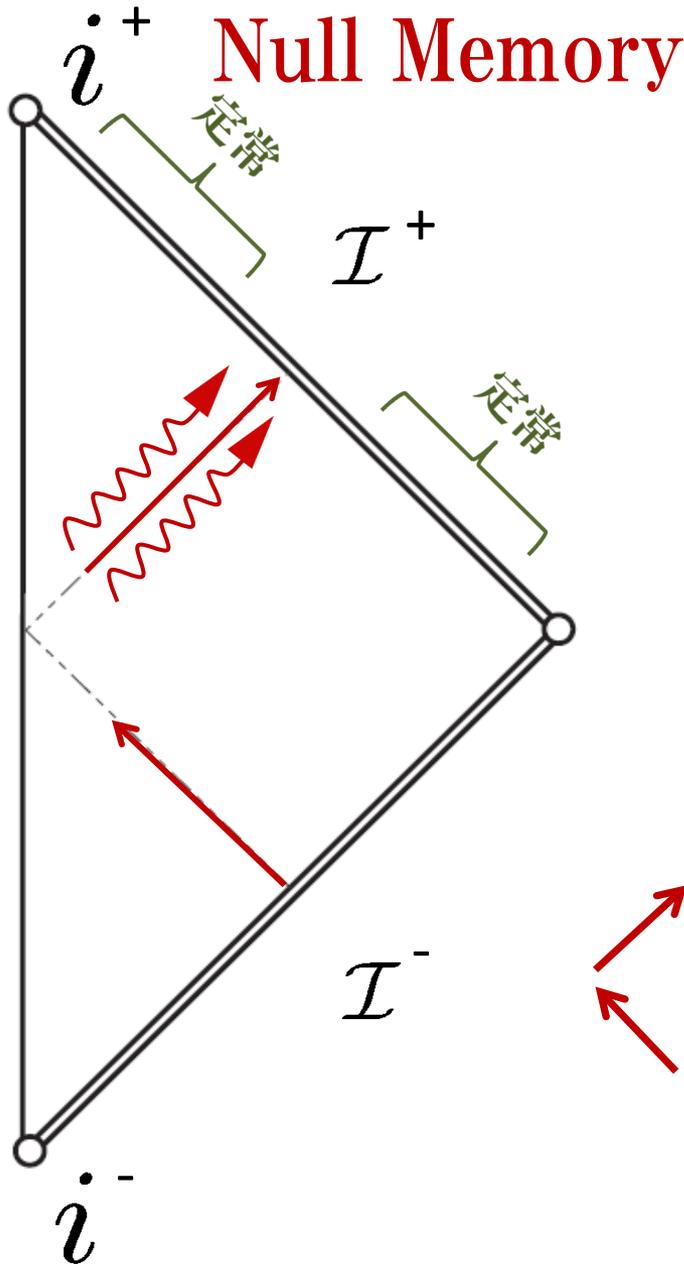


エネルギー・運動量は主に
輻射(光的粒子)により
光的未来 \mathcal{I}^+ へ運ばれる

i^+ Null Memory

(c.f. 非線形メモリー)

Christodoulou 91



エネルギー・運動量は主に
輻射(光的粒子)により
光的未来 \mathcal{I}^+ へ運ばれる

光的粒子

