# null測地線の無限遠近傍の漸近的振る舞い

天羽 将也　基礎物理学研究所 D１ （2023年1月～7月@U. Barcelona）

# 現代物理学の発展は微少量での展開による

と言っても過言でないだろう

- large N
- 結合定数での展開
- …

厳密に解けないものがあるとき → 物理量の大きさの階層を利用する

というのは自然な考え.

What else?

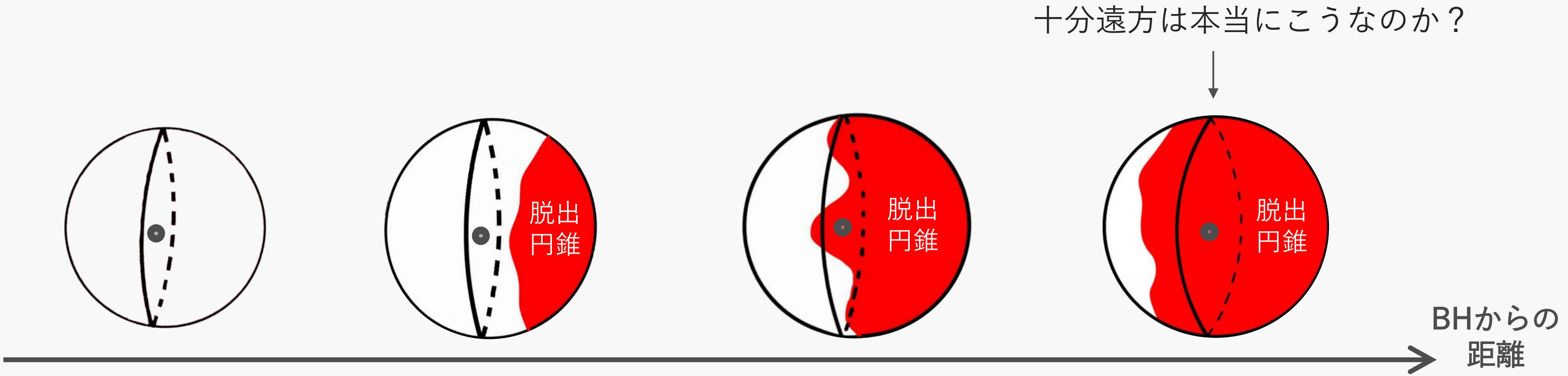
# null測地線の$r^{-1}$展開

- 一見，自明．遠方で重力は効かない気がする．
- 本当だろうか？
- 実は，4次元ではnull測地線の軌道の$r^{-1}$展開の主要項に重力の寄与がある．

# null測地線の$r^{-1}$展開

なんでこんなことを考えるのか？

元々の動機は別にあった（BH, photon sphereの一般化）



# 主題

null測地線の軌道の$r^{-1}$展開を議論し,

十分遠方から角度方向に放った光が

$\mathscr{I}^+$に到達するかどうか調べる.

1. 導入
2. **null測地線の$r^{-1}$展開**
3. 外的曲率の$r^{-1}$展開

# セットアップ

- **十分遠方**から「**動径座標一定方向**」に出した光が$\mathscr{I}^+$**に到達するか調べる.**
- 測地線方程式をその都度解かなくても済む判定条件を求める.

$n$次元漸近的平坦時空．十分遠方の計量： [Bondi *et al.* (1962), Sachs (1962), Tanabe *et al.* (2011)]

ステップ1：

放射直後の振る舞いを解析

$$ds^2 = g_{uu}du^2 - 2g_{ur}dudr - 2g_{uI}dudx^I + g_{IJ}dx^I dx^J$$ [$I,J$: 角度座標]

但し，$g_{uu} = -1 + mr^{-(n-3)} + Ar^{-(n/2-1)}$ +(高次)，$g_{ur} = -1 + O\left(r^{-(n-2)}\right)$,

ステップ2：

$g_{uu} = O\left(r^{-(n/2-2)}\right)$, $g_{IJ} = \omega_{IJ}r^2 + h_{IJ}r^{-(n/2-3)}$ + (高次)，　$\mathscr{I}^+$: $u$有限かつ $r$ 無限大

放射から有限affine parameter後の振る舞いを解析

# $\mathscr{I}^+$への到達条件（結論）

[Bondi *et al.* (1962), Sachs (1962), Tanabe *et al.* (2011)]

十分遠方の計量：

$$g_{uu} = -1 + mr^{-(n-3)} + Ar^{-(n/2-1)} + (\text{高次}),\ \ g_{ur} = -1 + O\left(r^{-(n-2)}\right),$$

$$g_{uu} = O\left(r^{-(n/2-2)}\right),\ g_{IJ} = \omega_{IJ} r^2 + h_{IJ} r^{-(n/2-3)} + (\text{高次}).$$

を考える.

[Amo, Izumi, Tomikawa, Yoshino, Shiromizu Phys. Rev. D (2021)]

十分遠方から$\frac{dr}{d\lambda} \geq 0$で放ったヌル測地線について,

$n = 4$：$\Omega_{IJ} \coloneqq \omega_{IJ} - \frac{1}{2}\dot{h}_{IJ} + \dot{m}\,\omega_{IJ}$が正定値かつ$\dot{m} \leq 0$ならば 到達.

$n \geq 5$：常に到達.

物質の流束や重力波の放射が外向きに十分弱い（典型的な時空）

Null Energy Condition に対応

( $\bullet$ : 遅延時間 $u$での 微分

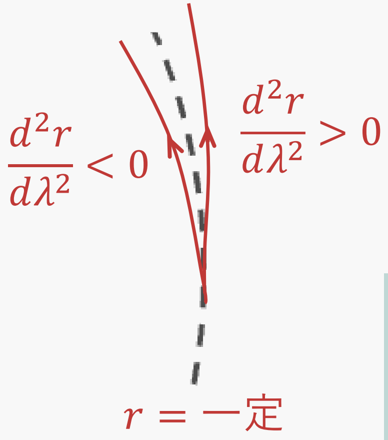
$\omega_{IJ}$ : 平坦時空における半径一定面上の計量 )

( ′ : affine parameter微分)

# 角度方向 $(r' = 0)$ に放射した直後の振る舞い

光的条件 &$r' = 0$ & 測地線方程式：

$$r'' = -\Gamma^{r}_{\mu\nu}(x^{\mu})'(x^{\nu})' = r\,\Omega_{IJ}(x^{I})'(x^{J})' + (r^{-1}\text{展開の高次})$$




$$\Omega_{IJ} \coloneqq \begin{cases} \omega_{IJ} - \frac{1}{2}\dot{h}_{IJ} + \dot{m}\,\omega_{IJ} & (n = 4) \\ \omega_{IJ} & (n \geq 5) \end{cases}$$

$\left(\begin{array}{l} \dot{\ } \text{ : 遅延時間 } u \text{ での 微分} \\ \omega_{IJ} \text{ : 平坦時空における半径一定面上の計量} \end{array}\right)$

- $\Omega_{IJ}$が正定値のとき，十分遠方で$r'' > 0$
- 4次元時空でのみ $r \to \infty$でも重力が軌道に影響

$\mathscr{I}^+$: $u$有限かつ $r$ 無限大

# $r' \geq 0$で出した光の$\mathscr{I}^+$到達：証明の流れ 1(/5)

$\lim_{\lambda\to\infty} r = \infty$ および $\lim_{\lambda\to\infty} u < \infty$ を示す.

null条件 + $r$ の測地線方程式

$$\longrightarrow r'' = \underbrace{-\dot{m}r^{-1}u'r'}_{>0} + \underbrace{\left[\Omega_{IJ}r + O(r^0)\right](x^I)'(x^J)'}_{>0} + \underbrace{O(r^{-2})r'^2}_{>-C_1 r^{-2}r'^2}$$

(for some $C_1 = \text{const.} > 0$)

$$> -C_1 r^{-2} r'^2$$

$r'(>0)$で割って,

$$\frac{r''}{r'} > -C_1 r^{-2} r'$$

整理

$$[\log(r')]' > C_1 (r^{-1})'$$

積分

$$\log(r') > C_1 r^{-1} + C_2$$

積分定数 $C_2$

# $r' \geq 0$で出した光の$\mathscr{I}^+$到達：証明の流れ 2(/5)

$\lim_{\lambda \to \infty} r = \infty$ および $\lim_{\lambda \to \infty} u < \infty$ を示す.

両辺 exp

$r' > \exp(C_1 r^{-1} + C_2) > \exp(C_2)$

積分

$r > \exp(C_2)\lambda + C_3$　　積分定数 $C_3$

$\therefore \lim_{\lambda \to \infty} r = \infty$

$\log(r') > C_1 r^{-1} + C_2$

# $r' \geq 0$で出した光の$\mathscr{I}^+$到達：証明の流れ 3(/5)

$\lim_{\lambda\to\infty} r = \infty$ および $\lim_{\lambda\to\infty} u < \infty$ を示す.

null条件 + $u$ の測地線方程式

$$\longrightarrow \quad u'' = \underbrace{-[r^{-1} + O(r^{-2})]u'^2}_{<0} - [2r^{-1} + O(r^{-2})]u'r'$$

$$> -[2r^{-1} - C_4 r^{-2}]u'r' \qquad \text{for some } C_4 = \text{const.} > 0$$

$$U := r^2 \exp(C_4 r^{-1})u' \longrightarrow U' = \exp(C_4 r^{-1})r^2\,[\underbrace{(2r^{-1} - C_4 r^{-2})u' + r^2 u''}_{<0}] < 0$$

# $r' \geq 0$で出した光の$\mathscr{I}^+$到達：証明の流れ 4(/5)

$\lim_{\lambda\to\infty} r = \infty$ および $\lim_{\lambda\to\infty} u < \infty$ を示す.

積分

$U < C_5$

積分定数 $C_5$

$U \coloneqq r^2 \exp(C_4 r^{-1}) u'$

$r^2 \exp(C_4 r^{-1}) u' < C_5$

整理

$U' = \exp(C_4 r^{-1}) r^2 \left[\left(2r^{-1} - C_4 r^{-2}\right) u' + r^2 u''\right] < 0$

$u' < C_5 r^{-2} \exp(-C_4 r^{-1}) < C_5 r^{-2}$

# $r' \geq 0$で出した光の$\mathscr{I}^+$到達：証明の流れ 5(/5)

$\lim_{\lambda\to\infty} r = \infty$ および $\lim_{\lambda\to\infty} u < \infty$ を示す.

$r > \exp(C_2)\lambda + C_3$

$u' < C_5(\exp(C_2)\lambda + C_3)^{-2}$

$[u_0(\lambda_0), u(\lambda)]$で積分

$u - u_0 < -\exp(-C_2)C_5[(\exp(C_2)\lambda + C_3)^{-1} - (\exp(C_2)\lambda_0 + C_3)^{-1}]$

$< \exp(-C_2)(\exp(C_2)\lambda_0 + C_3)^{-1} < \infty$

$u' < C_5 r^{-2}\exp(-C_4 r^{-1}) < C_5 r^{-2}$

$\therefore \lim_{\lambda\to\infty} u < \infty$

# [結果] 光の無限遠到達の判定条件

十分遠方から $\frac{dr}{d\lambda} \geq 0$で出した光の無限遠への到達について：

計量の$r^{-1}$展開の係数で定義される$\Omega_{IJ}$と$\dot{m}$に対して,

$\Omega_{IJ}$が正定値 かつ $\dot{m} \leq 0$ ならば無限遠に到達

物質の外向き流束や重力波の外向き放射が（Planck光度に比べて）十分弱い & NEC

cf). Brans-Dicke理論のfall-off： See Cao-Li-Wu [2109.05973]

# $\Omega_{IJ}$について

[再掲] $\dfrac{d^2r}{d\lambda^2} = r\,\Omega_{IJ}\dfrac{dx^I}{d\lambda}\dfrac{dx^J}{d\lambda}$ +(高次の項)

- 極端な状況でなくとも，4次元では$\Omega_{IJ}$次第で $r\to\infty$でも重力の影響が見られる
- $\Omega_{IJ}$はどんな物理/幾何を意味しているのか？

物質の外向き流束があると軌道を内向きに曲げる寄与 具体例：Vaidya時空

$$\Omega_{IJ} \coloneqq \begin{cases} \omega_{IJ} - \frac{1}{2}\dot{h}_{IJ} + \frac{1}{2}\dot{m}\omega_{IJ} & (n=4) \\ \omega_{IJ} & (n\geq 5) \end{cases}$$

遠心力
（重力ではない）

外向き重力波があると
軌道を曲げる寄与 具体例：平面重力波

$n=4$で$\Omega_{IJ}$の各項の意味を具体例を通して見てみる

## $\Omega_{IJ} \coloneqq \omega_{IJ} - \frac{1}{2}\dot{h}_{IJ} + \dot{m}\,\omega_{IJ}$ の解釈①： $\omega_{IJ}$の項

厳密にflatな時空 $ds^2 = -du^2 - 2dudr + \omega_{IJ}dx^I dx^J$

を考える． $\frac{dr}{d\lambda} = 0$で出したヌル測地線について，

$$\frac{d^2r}{d\lambda^2} = r\omega_{IJ}\frac{dx^I}{d\lambda}\frac{dx^J}{d\lambda}$$ （単なる遠心力）

対応

$n\ (\geq 4)$ 次元

$$\frac{d^2r}{d\lambda^2} = r\Omega_{IJ}\frac{dx^I}{d\lambda}\frac{dx^J}{d\lambda} + (\text{高次の項})$$

$$r\Omega_{IJ} = \begin{cases} r\omega_{IJ} - \frac{1}{2}r\dot{h}_{IJ} + r\dot{m}\,\omega_{IJ} & (n=4) \\ r\omega_{IJ} & (n \geq 5) \end{cases}$$

# $\Omega_{IJ} \coloneqq \omega_{IJ} - \frac{1}{2}\dot{h}_{IJ} + \dot{m}\,\omega_{IJ}$ の解釈 ②： $-\frac{1}{2}\dot{h}_{IJ}$ の項

Minkowski背景時空

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$$

$z$方向に進む平面重力波を考える $(g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu})$.

$r \to \infty$で外向きの重力波は
平面重力波に漸近.
i.e., $r$と$z$が同じ役割.

$\frac{dz}{d\lambda} = 0$で出したヌル測地線について，
$$\frac{d^2 z}{d\lambda^2} = -\frac{1}{2}h_{AB,t}\frac{dx^A}{d\lambda}\frac{dx^B}{d\lambda} \qquad (A, B \in \{x, y\})$$

$n = 4$で対応

<u>$n\ (\geq 4)$ 次元</u>

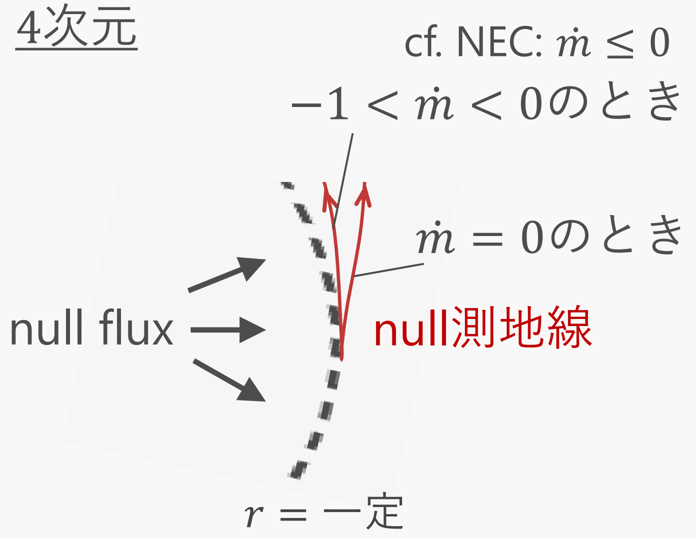
$$\frac{d^2 r}{d\lambda^2} = r\Omega_{IJ}\frac{dx^I}{d\lambda}\frac{dx^J}{d\lambda} + (\text{高次の項})$$

$$r\Omega_{IJ} = \begin{cases} r\omega_{IJ} - \frac{1}{2}r\dot{h}_{IJ} + r\dot{m}\,\omega_{IJ} & (n = 4) \\ r\omega_{IJ} & (n \geq 5) \end{cases}$$

cf,) $g_{IJ} = \omega_{IJ}r^2 + h_{IJ}r^{-(n/2-3)} + (\text{高次})$

## $\Omega_{IJ} \coloneqq \omega_{IJ} - \frac{1}{2}\dot{h}_{IJ} + \dot{m}\,\omega_{IJ}$ の解釈 ③： $\dot{m}\,\omega_{IJ}$の項

4次元




外向きVaidya時空で$\frac{dr}{d\lambda} = 0$で出したヌル測地線を考える.

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2m}{r^{n-3}}\right) du^2 - 2du dr + r^2 \omega_{IJ} dx^I dx^J$$

$$\longrightarrow \quad \frac{d^2 r}{d\lambda^2} = \left(r + \dot{m} r^{-(n-5)} + O\left(r^{-(n-4)}\right)\right) \omega_{IJ} \frac{dx^I}{d\lambda}\frac{dx^J}{d\lambda}$$

$n$ = 4で対応

$n\ (\ge 4)$ 次元

$$\frac{d^2 r}{d\lambda^2} = r\Omega_{IJ} \frac{dx^I}{d\lambda}\frac{dx^J}{d\lambda} + (\text{高次の項}) \qquad r\Omega_{IJ} = \begin{cases} r\omega_{IJ} - \frac{1}{2} r\dot{h}_{IJ} + r\dot{m}\,\omega_{IJ} & (n = 4) \\ r\omega_{IJ} \cdots & (n \ge 5) \end{cases}$$

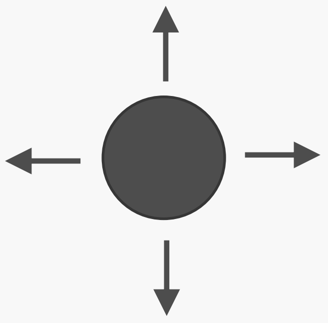
無限遠近傍で，軌道に外向きnull fluxが横切ることで
（有限の角度）内向きに曲げられる

$\Omega_{IJ} \coloneqq \omega_{IJ} - \frac{1}{2}\dot{h}_{IJ} + \dot{m}\,\omega_{IJ}$ の解釈 ③： $\dot{m}\,\omega_{IJ}$の項

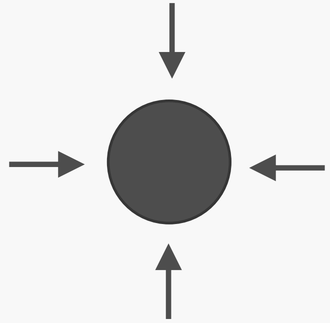
$\dot{m}\,\omega_{IJ}$は外向きfluxに対応するが,

この効果はnull測地線を内に曲げることを見た.

⟶ 内向きfluxではどうか？



外向きflux



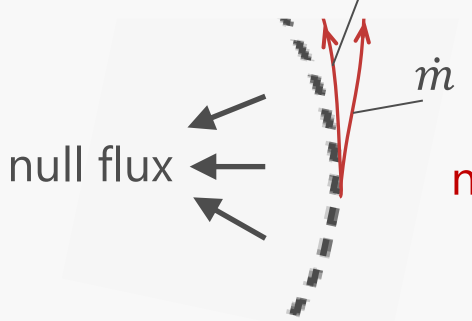
内向きflux

# 内向きVaidyaではどうか？

内向きVaidya時空で $\frac{dr}{d\lambda}=0$ で出したヌル測地線について

$$\frac{d^2r}{d\lambda^2}=\left(r-\dot{m}r^{-(n-5)}+O\left(r^{-(n-4)}\right)\right)\omega_{IJ}\frac{dx^I}{d\lambda}\frac{dx^J}{d\lambda}$$

Null Energy Condition: $\dot{m}\geq 0$




無限遠近傍で，軌道に動径方向のnull fluxが横切ることで
null fluxの向きによらず内向きに曲げられる

1. 導入
2. null測地線の$r^{-1}$展開
3. 外的曲率の$r^{-1}$展開

## $\boldsymbol{\Omega_{IJ}(r)}$ とphoton surfaceの対応

[Claudel et al. (2001)]

超曲面 $S$ がphoton surfaceであるとは，$S$に接する任意のヌル測地線が少なくとも有限時間 $S$ 内にとどまることをいう$\left(半径一定面では \frac{d^2r}{d\lambda^2} = 0 と対応\right)$

[再掲] 光的条件 & $\frac{dr}{d\lambda} = 0$ & 測地線方程式：

$$\frac{d^2r}{d\lambda^2} = -\Gamma^r_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda} = r\,\Omega_{IJ}\frac{dx^I}{d\lambda}\frac{dx^J}{d\lambda} + O\left(r^{-(n-5)/2}\right)\left|\frac{dx^I}{d\lambda}\right|^2$$

**$\Omega_{IJ} = 0$の条件は，半径一定面がphoton surfaceであることと近似的に対応していると期待**

# 近似的photon surface

$$\Omega_{IJ}=0$$

$\frac{d^2 r}{d\lambda^2} = r\Omega_{IJ}\frac{dx^I}{d\lambda}\frac{dx^J}{d\lambda}$ +(高次の項) $\longrightarrow$ 当初の予想

こっちを
確かめてみよう

$r$ =一定面が
photon surface

$\Longleftrightarrow$

$r$ =一定面の外的曲率の
トレースレス部 $\sigma_{ab}$ が0

Claudel et al. (2001),
Perlick (2005)

**$\boldsymbol{r}$ =一定面の外的曲率のトレースレス部 $\boldsymbol{\sigma_{ab}}$ の$\boldsymbol{r^{-1}}$展開の主要項が0のとき**

**$\boldsymbol{r}$ =一定面を近似的photon surfaceと呼ぶ**

# 近似的photon surfaceの条件

$\boldsymbol{r}$ =一定面の外的曲率のトレースレス部 $\boldsymbol{\sigma_{ab}}$ ：

Amo-Shiromizu-Izumi-Yoshino-Tomikawa *PRD* (2022)

[$n$ ($\geq 5$)次元]

$$\sigma_{uu} = \frac{n-2}{n-1} r^{-1} + O\left(r^{-(n/2-1)}\right)$$

$$\sigma_{uI} = \sigma_{Iu} = O\left(r^{-(n/2-1)}\right)$$

$$\sigma_{IJ} = \frac{1}{n-1} \omega_{IJ} r + O\left(r^{-(n/2-3)}\right)$$

→ $\sigma_{ab}$の$r^{-1}$展開の主要項はノンゼロ

[4次元]

$$\sigma_{uu} = \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\dot{m}\right) r^{-1} + O\left(r^{-2}\right)$$

$$\sigma_{uI} = \sigma_{Iu} = O\left(r^{-1}\right)$$

$$\sigma_{IJ} = \left(\frac{1}{3}\omega_{IJ} - \frac{1}{2}\dot{h}^{(1)}{}_{IJ} + \frac{1}{6}\dot{m}\omega_{IJ}\right) r + O\left(r^{0}\right)$$

→ $\sigma_{ab}$の$r^{-1}$展開の主要項が0

$$\Leftrightarrow \Omega_{IJ} \coloneqq \omega_{IJ} - \frac{1}{2}\dot{h}^{(1)}{}_{IJ} + \frac{1}{2}\dot{m}\omega_{IJ} = 0$$

**高次元とは異なり，4次元のときは近似的photon surfaceが存在しうる**

## 外向きVaidya時空で$\Omega_{IJ}$=0となる具体例

外向きVaidya計量：

Amo-Shiromizu-Izumi-Yoshino-Tomikawa *PRD* (2022)

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M(u)}{r}\right) du^2 - 2dudr + r^2 \omega_{IJ} dx^I dx^J.$$

特に

$$\frac{dM(u)}{du} = -\left(1 - \frac{2M(u)}{r_{\mathrm{PS}}}\right)\left(1 - \frac{3M(u)}{r_{\mathrm{PS}}}\right)$$

のとき，$r = r_{\mathrm{PS}}$は厳密なphoton surface． $r_{\mathrm{PS}}$は任意に大きく取れる．

**4次元のときは厳密なphoton surfaceが存在しうる（ただし有限時間）**

# まとめ

✓ $\mathscr{I}^+$へのnull測地線の到達の十分条件

✓ $\mathscr{I}^+$近傍のphoton surfaceの存在条件

外向き重力波　外向き物質流

$$\Omega_{IJ} := \begin{cases} \omega_{IJ} - \frac{1}{2}\dot{h}_{IJ} + \frac{1}{2}\dot{m}\omega_{IJ} & (4次元) \\ \omega_{IJ} & (高次元) \end{cases}$$

が重要な役割

4次元ではnull測地線の軌道の$r^{-1}$展開の主要項に重力の寄与！

# バックアップ

# ブラックホール（BH）

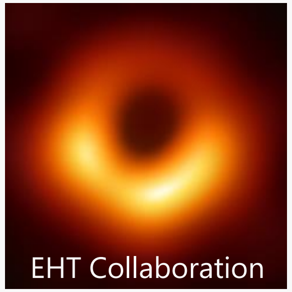
- 一般相対性理論で予言.
- future null infinityとcausal curveで結べない領域.
- 我々とcausal curveで結ばれないBHは，我々に影響を与えない.

**BH（のようなもの）を我々とcausal curveで結ばれる領域で再定義できないだろうか？（純粋な興味）**

# photon sphere

- 静的球対称時空で光の周回軌道を集めてできる球面
- Schwarzschildで $r = 3M$
- 実質的な観測限界を与える（BH shadowのふち）
- 数理的にもrichな構造


photon sphere




BH shadow

**photon sphereをより一般の時空で考えたい.**

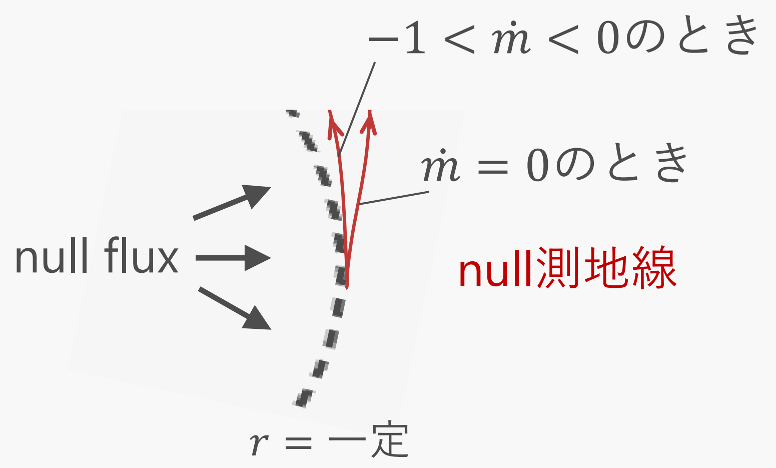
# Outgoing Vaidya（4次元）

Outgoing時空で $\frac{dr}{d\lambda}=0$で出したヌル測地線について,

$$\frac{d^2r}{d\lambda^2}=\left(\Omega_{IJ}r+O\left(r^0\right)\right)\frac{dx^I}{d\lambda}\frac{dx^J}{d\lambda}$$

$$=\left((1+\frac{1}{2}\dot{m})r\,\omega_{IJ}+O\left(r^0\right)\right)\omega_{IJ}\frac{dx^I}{d\lambda}\frac{dx^J}{d\lambda}$$

$$\Omega_{IJ}=\left(1+\frac{1}{2}\dot{m}\right)\omega_{IJ}-\frac{1}{2}\dot{h}_{IJ}^{(1)}$$



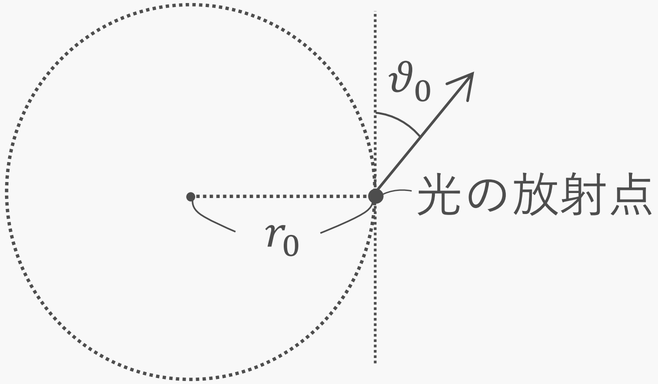

<u>到達の必要条件</u>を破る$\dot{m}$を考えて，到達しない例を作れないか？

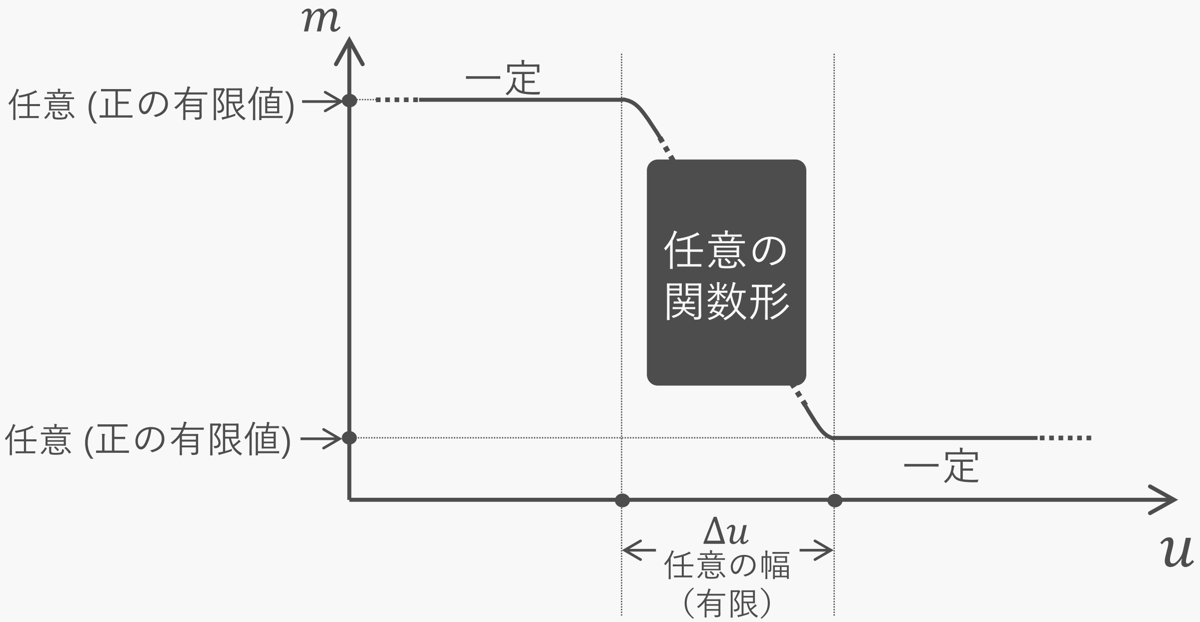
「$\Omega_{IJ}$が正定値 かつ $\dot{m}\leq 0$」 ⇔ 「$-1\leq\dot{m}\leq 0$」

# Outgoing Vaidya

Setup

- 十分遠方（$m, \Delta u \ll r_0$）から$\tan\vartheta_0 = O({r_0}^0)$で光(null測地線)を放射
- $m(u)$は下図（到達の必要条件を破る場合も許す）



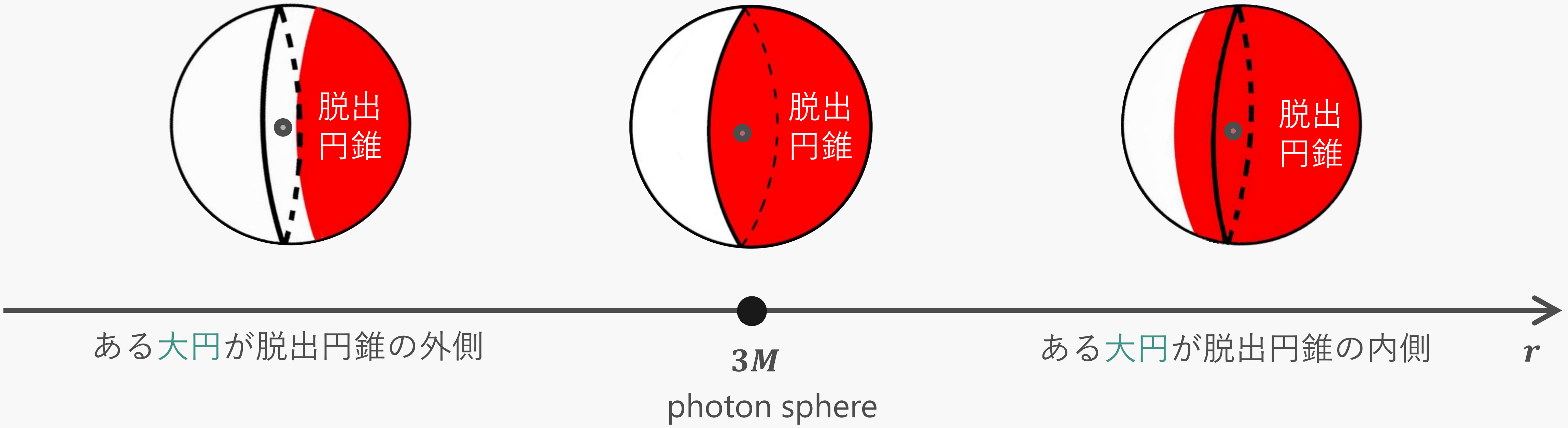

## 結果

$\mathscr{I}^+$への到達の十分条件

「$\Omega_{IJ}$が正定値 かつ $\dot{m} \le 0$」を

破る例でも，$\tan\vartheta_0 = O({r_0}^0)$なら常に到達.

# Schwarzschild時空における脱出円錐




※ 大円：球の中心を通る平面と球面との交線

# inner dark horizon・outer dark horizonの性質まとめ

従来の一般化の試み

| | 可視光子球面 | 横捕捉面 | 動的横捕捉面 | 黒集合 | 内部暗黒地平面 | 外部暗黒地平面 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| I. photon sphereの一般化であるか | ○ | ○ | ○ | × | ○ | ○ |
| II. 回転Kerr BHの周りの存在 | 未定義 | ○ | △ | ○ | ○ | ○ |
| III. 時空の対称性 | 必要 | 必要 | 不要 | 不要 | 不要 | 不要 |
| 空間的超曲面の導入 | 不要 | 必要 | 必要 | 不要 | 必要 | 必要 |

inner dark horizon・outer dark horizonは
空間的超曲面に依存した概念であるが，従来の課題を克服した．

# inner dark horizon・outer dark horizonの性質まとめ

従来の一般化の試み

| | photon sphere | 一般化① (横捕捉面) | 動的横捕捉面 | 黒集合 | **inner dark horizon** | **outer dark horizon** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| I. photon sphereの一般化であるか | ○ | ○ | ○ | × | ○ | ○ |
| II. 回転Kerr BHの周りの存在 | 未定義 | ○ | △ | ○ | ○ | ○ |
| III. 時空の対称性 | 必要 | 必要 | 不要 | 不要 | **不要** | **不要** |
| 空間的超曲面の導入 | 不要 | 必要 | 必要 | 不要 | **必要** | **必要** |

# photon sphereの一般化の従来の試み

赤字：課題点

| | 理想 | photon sphere | 「横捕捉面」 Yoshino et al. (2017) | 「動的横捕捉面」 Yoshino et al. (2020) | 「黒集合」 Siino (2020) |
|---|---|---|---|---|---|
| I. photon sphereの一般化であるか | ○ | (○) | ○ | ○ | × |
| II. 回転 Kerr BH の周りの存在 | ○ | 未定義 | ○ | △ | ○ |
| III. 時空の対称性 | 不要 | 必要 | 必要 | 不要 | 不要 |

高速回転のとき困難

課題点を克服した定義を構築したい（これまで定義されていない）

# photon sphereの一般化の動機（論理展開の補足）

物理学のこれまでの歴史を鑑みると，適切な概念の定式化により，
理論の理解が促進されてきた．

↓

一つの方向性として，「適切な概念を導入し，一般的な性質を数理的に導き，
何らかの形で観測に結びつくことを期待する」という方法が挙げられる．

↓

今後のBH観測に向けて，観測される「事象の地平面の少し外の領域」の理論的
な定式化を進めることは重要であろう．

# 面積不等式

[$A_P$: 最も外側の「photon sphere」の面積，$A_S$: シャドウの面積， $A_H$: ホライズンの面積，$M$: BH質量]

**① Penrose不等式（一般のブラックホール時空での予想．対称性のない時空で未解決予想．）**

[cf.) 宇宙検閲官仮説]

$$\left(\frac{3}{2}\right)^2 A_H \leq 4\pi(\mathbf{3}M)^2$$

**② photon sphereの面積不等式 (静的球対称)**

$$\left(\frac{3}{2}\right)^2 A_H \leq A_P \leq 4\pi(3M)^2$$

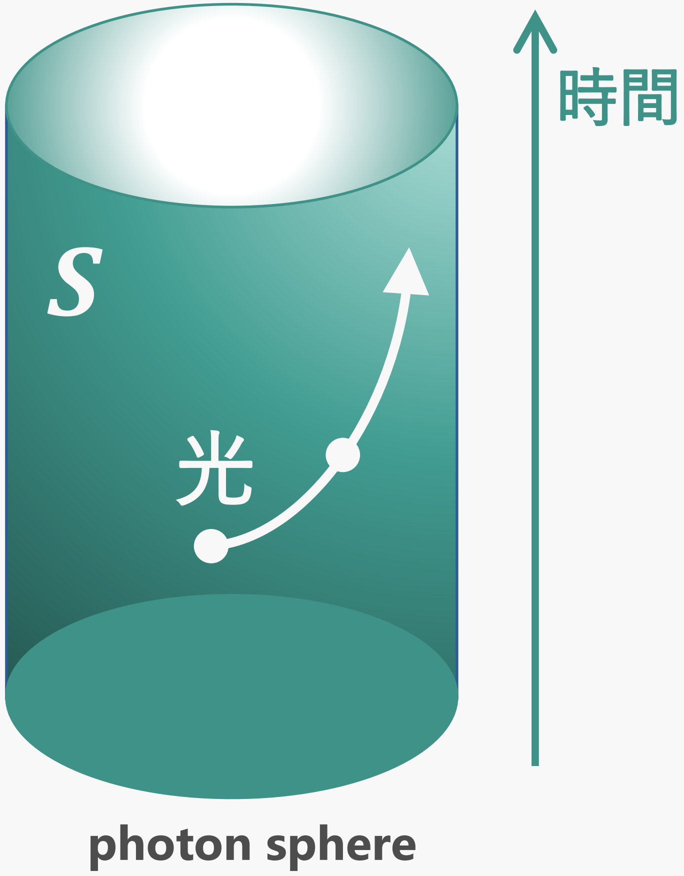
**より一般の時空で機能する定義を構成したい**

# photon sphere

**photon sphereとは，一言で言えば，静的球対称時空において「角度方向に放った光が半径一定であり続ける」面**

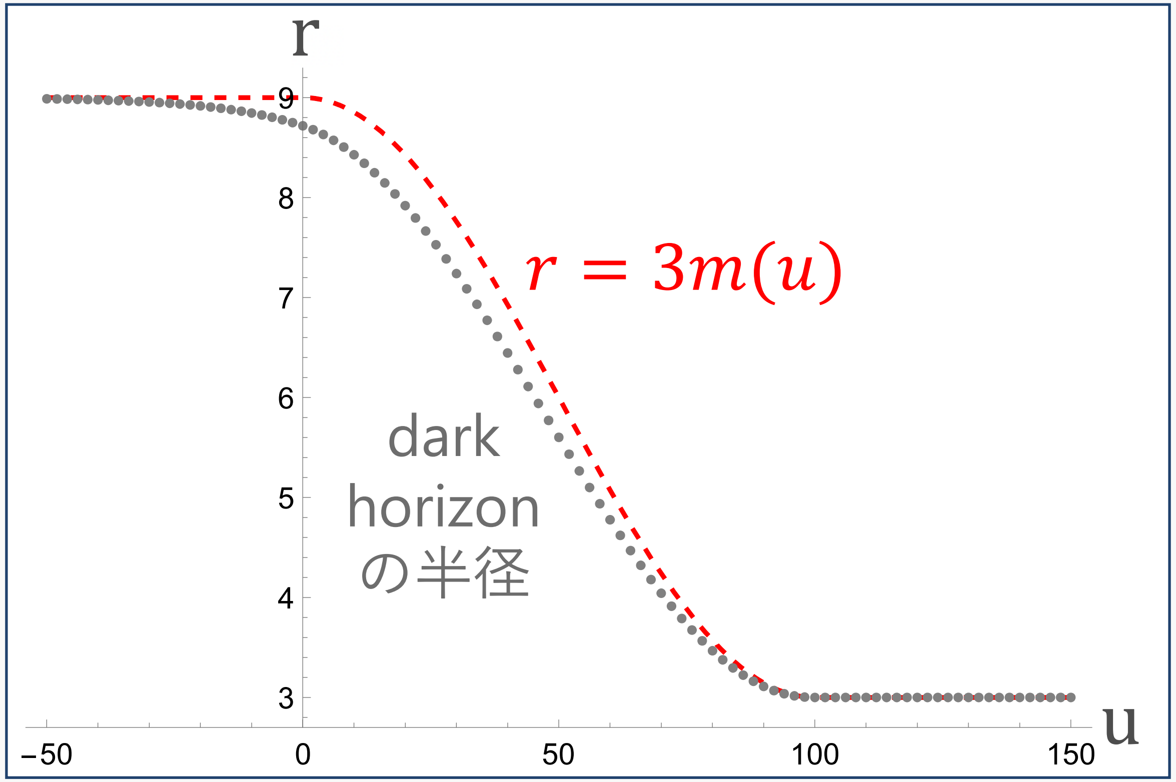
$S$がphoton sphereである条件:

1. $S$ に接する全ての光が$S$に乗り続ける
2. 時間並進・回転で不変
3. $S$に乗り続ける光の軌道に外向きの摂動を与えると無限遠に到達



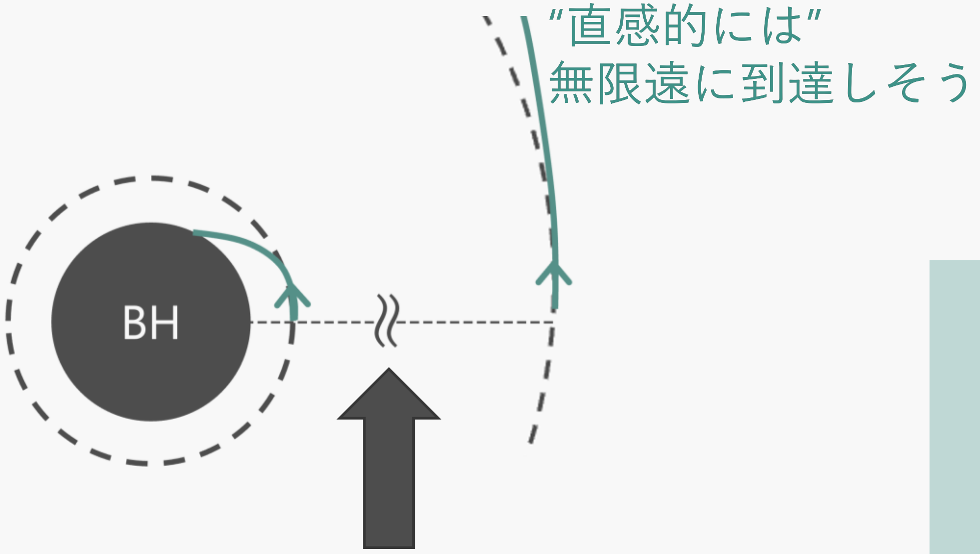

**例**：質量$M$のSchwarzschild時空では$r = 3M$の球面はphoton sphere

# Outgoing Vaidya時空での形状



# 可視光子球面の一般化に向けて

- 可視光子球面は，「角度方向に放射した光が半径一定であり続ける」




BHに落ちる放射点と
無限遠に到達する放射点の
境目の構造を捉えたい

**実際に正しいか調べる．**

十分遠方から
角度方向に出した光が
無限遠に到達するか調べる．

# 近似的photon surface

[Claudel et al. (2001), Perlick (2005)]

$S$ がphoton surface　⇔　$S$ の外的曲率のトレースレス部 $\sigma_{ab}$ が0

$\boldsymbol{r}$ =一定面の外的曲率のトレースレス部 $\boldsymbol{\sigma_{ab}}$ の $\boldsymbol{r^{-1}}$ 展開の主要項が0のとき

$\boldsymbol{r}$ =一定面を近似的photon surfaceと呼ぶ

$\boldsymbol{\sigma_{ab}}$ の主要項が0であることと
$\Omega_{IJ}(r)$ の主要項が0であることが，対応していると期待

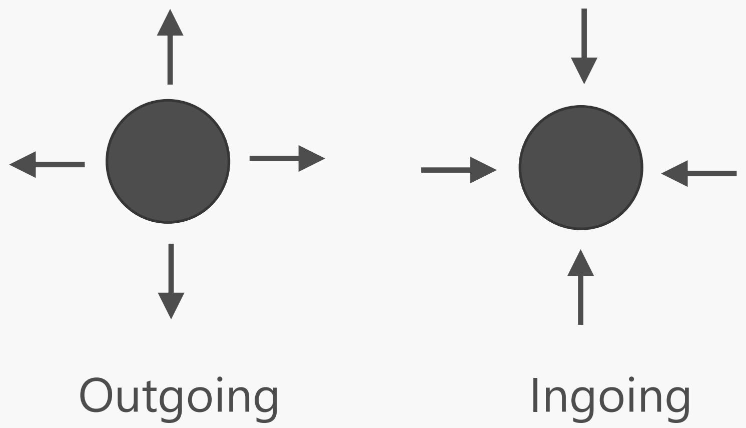
# Vaidya時空

- 動的球対称な解（Schwarzschildの拡張）
- 流束が外向き（Outgoing Vaidya）と内向き（Ingoing Vaidya）がある
- 流束の速さは光速

Outgoing Vaidya :

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2m}{r^{n-3}}\right) du^2 - 2dudr + r^2 \omega_{IJ} dx^I dx^J$$

Ingoing Vaidya :



# Vaidya時空の$\dot{m}$の項の解釈（雑記）

Outgoing： $T_{uu} = -\frac{m(u)_{,u}}{4\pi r^2}$ Ingoing： $T_{vv} = \frac{m(v)_{,v}}{4\pi r^2}$

fluxの向きによらず内に曲げられることの解釈 （まだ完全にはしっくりきていません．）

候補①：半径が小さい方が「密度」が大きい
候補②：Newton力学同様に球対称分布では，動径座標が大きいところからの引力同士が相殺して動径座標が小さいところからの引力のみが働いている？

十分遠方から角度方向に放った光の測地線方程式について，
Schwarzschildでも現れる寄与は高次であり，
null物質が流れる事による内向きに曲げる寄与がleading.
このことから何か面白いことが言えないだろうか？既知の何かと関係？

# photon sphereの一般化の従来の試み

ex.) Yoshino et al. (2017), Yoshino et al. (2019), Siino (2021).

状況によって，便利な定義が異なる．

- 動的な時空は扱えないが，定常な時空にも適用できる定義
- 高速回転するKerr BHは記述不可だが，動的な時空にも適用できる定義
- BHがない時空でのphoton sphereは記述できないが，高速回転するKerr BHも扱える定義

... 詳細はさておき，とにかくphoton sphereの一般化は一長一短！

**課題点を克服した定義を構築したい**

# 内向きVaidya時空で$\Omega_{IJ}$=0となる具体例

内向きVaidya計量：

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M(v)}{r}\right)dv^2 + 2dvdr + r^2\omega_{IJ}dx^I dx^J.$$

特に

$$\frac{dM(v)}{dv} = \left(1 - \frac{2M(v)}{r_{\mathrm{PS}}}\right)\left(1 - \frac{3M(v)}{r_{\mathrm{PS}}}\right)$$

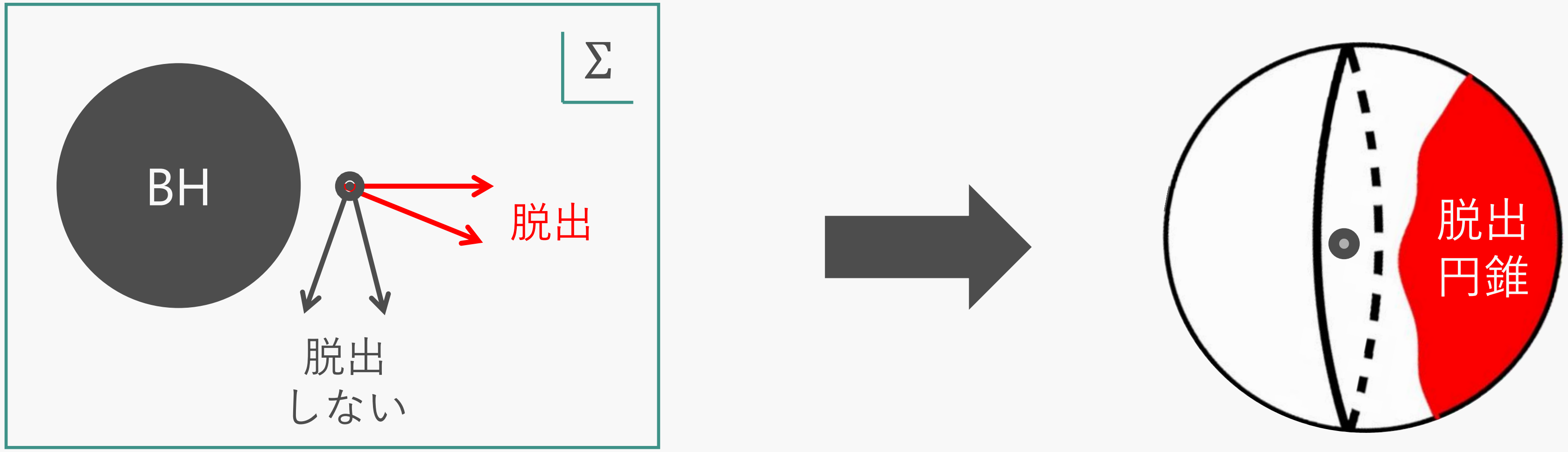
のとき，$r = r_{\mathrm{PS}}$は厳密なphoton surface.

**外向きの放射でも内向きの放射でも，photon surfaceが形成される**

# 脱出円錐

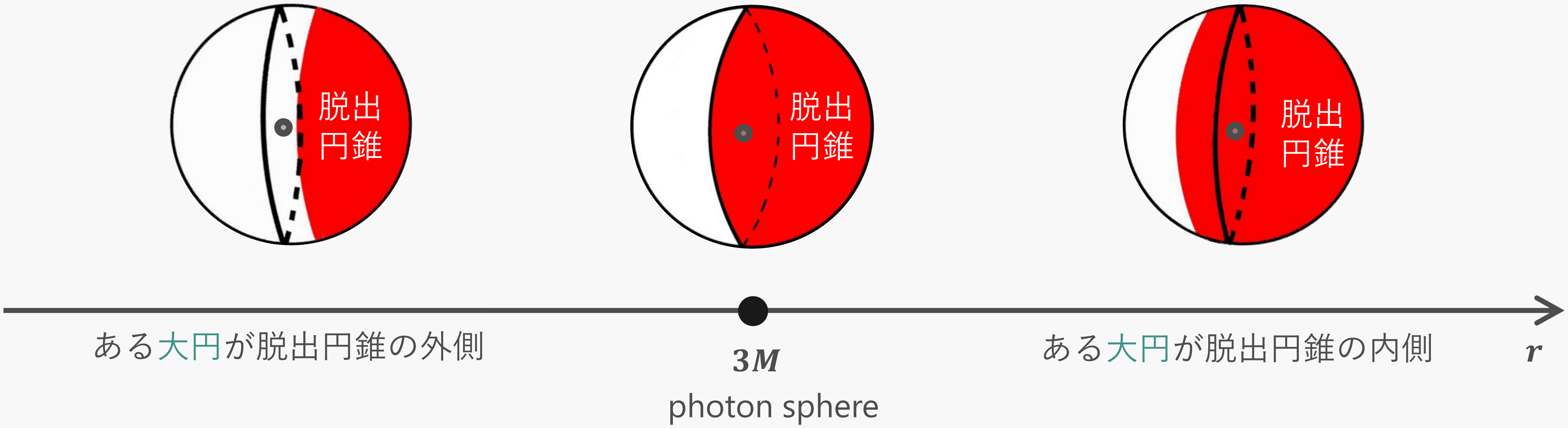
光的無限遠に到達する光の方向を，(接空間内の) 時間一定面に射影

→各点ごとにこの向きを2次元球面上に表したものを**脱出円錐**という．



# Schwarzschild時空における脱出円錐

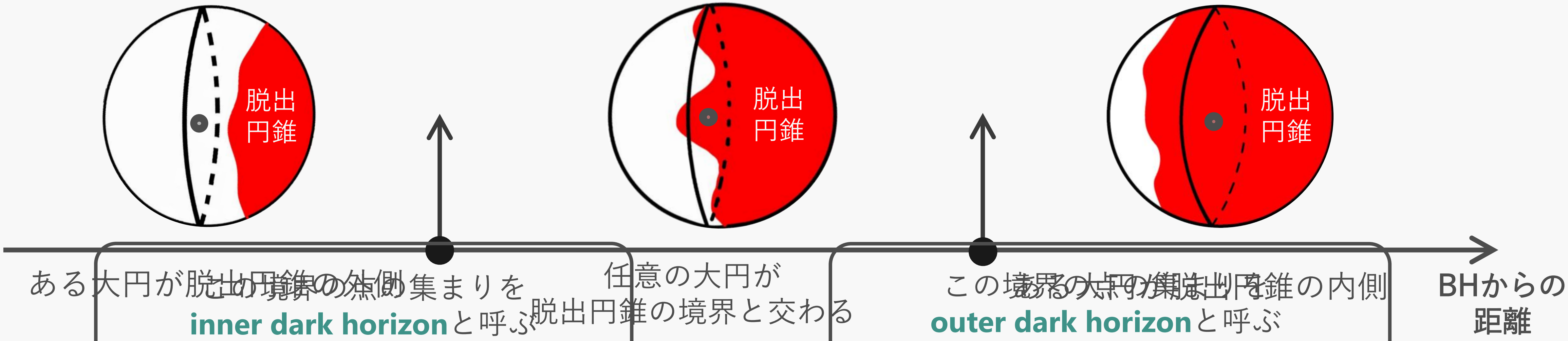
$\mathscr{I}^+$への到達を議論




※ 大円：球の中心を通る平面と球面との交線

## photon sphereの一般化：2種類のdark horizon

時空の各点を，その点での脱出円錐によって3つに分類：




ある大円が脱出円錐の外側

この境界の点の集まりを
**inner dark horizon**と呼ぶ

任意の大円が
脱出円錐の境界と交わる

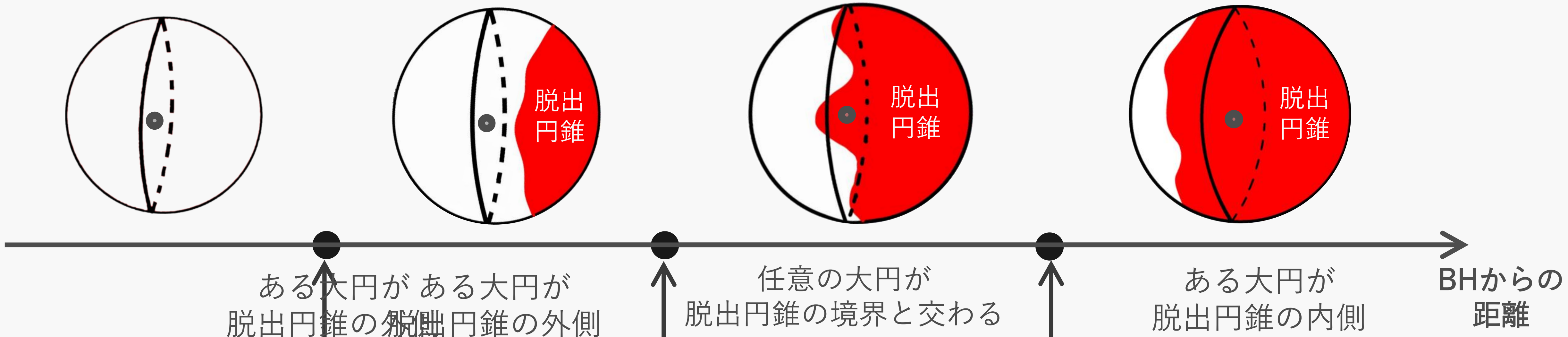
ある大円が脱出円錐の内側

この境界の点の集まりを
**outer dark horizon**と呼ぶ

2つの総称：**dark horizon**

※射影する空間的超曲面 Σ に依存

## event horizonとの比較




ある大円が
脱出円錐の外側

ある大円が
脱出円錐の外側

任意の大円が
脱出円錐の境界と交わる

ある大円が
脱出円錐の内側

この境界の点の集まりを
**event horizon**

この境界の点の集まりを
**inner dark horizon**と呼ぶ

この境界の点の集まりを
**outer dark horizon**と呼ぶ

2つの総称：**dark horizon**

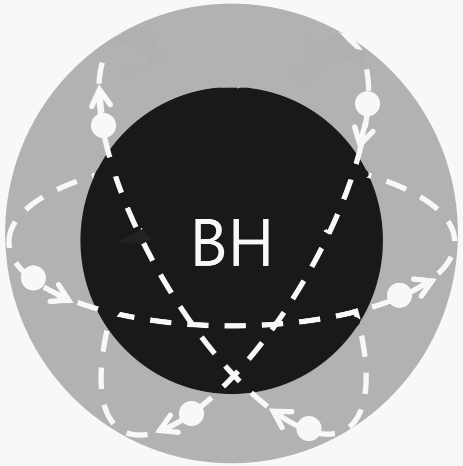
# Photon surface

[Claudel et al. (2001)]

超曲面$S$がphoton surfaceであるとは，　$S$に接する任意のヌル測地線が少なくとも有限時間$S$に接し続けることをいう

[再掲]　$\frac{dr}{d\lambda}=0$ の光的測地線方程式：

$$\frac{d^2 r}{d\lambda^2} = r\,\Omega_{IJ}(r)\,\frac{dx^I}{d\lambda}\frac{dx^J}{d\lambda} + O\left(r^{-(n-5)/2}\right)\left|\frac{dx^I}{d\lambda}\right|^2$$



photon surface

$\Omega_{IJ}=0$の条件は，半径一定面がphoton surfaceであることと近似的に対応していると期待

# 角度方向 $\left(\frac{dr}{d\lambda}=0\right)$ に放射した直後の振る舞い

光的条件 & $\frac{dr}{d\lambda}=0$ & 測地線方程式：

$$\frac{d^2r}{d\lambda^2}=-\Gamma^r_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda}=\Omega_{IJ}(r)\,r\,\frac{dx^I}{d\lambda}\frac{dx^J}{d\lambda}+O\left(r^{-(n-5)/2}\right)\left|\frac{dx^I}{d\lambda}\right|^2$$

$$\Omega_{IJ}(r):=\left(1+\frac{1}{2}\dot{\mu}r^{-(n/2-2)}\right)\omega_{IJ}-\frac{1}{2}\dot{h}^{[1]}_{IJ}r^{-(n/2-2)}$$

$n=4$のときのみ
主要項が異なる

計量の$r^{-1}$での展開係数

$\dot{}$ : 遅延時間 $u$での 微分

$\omega_{IJ}$ : 平坦時空における半径一定面上の計量

**4次元時空でのみ重力が$r^{-1}$展開の主要項に寄与**

# Weakly asymptotically simpleな時空（雑記）

weakly asymptotically simpleが成立するように漸近的平坦性を定義する場合が多い

$\mathscr{I}$ のある近傍で，asymptotically simpleな別の時空の$\mathscr{I}$ のある近傍とisometric

A spacetime $(M, g)$ is *asymptotically simple* if $\exists$ a manifold $(\widetilde{M}, \tilde{g})$ with boundary $\partial\widetilde{M} = \overline{M}$ and a continuous embedding $f(M) : M \to \widetilde{M}$ s.t.

(i) $f(M) = \widetilde{M} - \partial\widetilde{M}$

(ii) $\exists$ a smooth function $\Lambda$ on $\widetilde{M}$ with $\Lambda > 0$ on $f(M)$ and $\tilde{g} = \Lambda^2 f(g)$.

(iii) $\Lambda = 0$ but $d\Lambda \neq 0$ on $\partial\widetilde{M}$.

(iv) Every null geodesic in $M$ acquires 2 endpoints on $\partial M$.

Townsend,
gr-qc/9707012

無限遠近傍で光の半径一定の軌道を無限に長い時間保つことが可能であるとき，
時空はweakly asymptotically simpleではないのでは？

# Asymptotic symmetry

$\xi$: generator of the asymptotic symmentry, $Q_\xi := (x^\mu)'\,\xi_\mu$, $Q_\xi$ is asymptotic conserved quantity :

$$Q_\xi = \mathrm{constant} + \mathcal{O}\left(r^{-n/2}\right).$$

In particular,

$\xi = \partial_u$: asymptotic conservation of energy

$\xi = f^I \partial_I$ : asymptotic conservation of angular momentum

# Brans-Dicke 重力理論への拡張 (4 次元)

Cao, Lib, and Wub [2109.05973]

Brans-Dicke 重力理論でも同様の解析が可能．

$$S_{\mathrm{Brans-Dicke}} = \frac{1}{16\pi G}\int \mathrm{d}^4x\sqrt{-g}\left(\varphi R - \frac{\omega}{\varphi}\nabla_a\varphi\nabla^a\varphi\right)$$

asymptotically flat な計量の fall-off が GR と違うため結果が異なる：

**null infinity への到達条件 (4 次元，Brans-Dicke の fall-off の場合)**

$r$ が十分大きい領域から $r' = 0$ で出した null 測地線について，

$\Omega_{IJ} := \omega_{IJ} - \frac{1}{2}\dot{h}^{(1)}_{IJ} + \frac{1}{2}\dot{m}\omega_{IJ}$ が正定値 かつ $\dot{m} \leq \frac{\varphi_1}{\varphi_0} \leq 1 \ \Rightarrow$ null infinity に到達．

# Brans-Dicke 重力理論への拡張 (fall-off の詳細)

Brans-Dicke 重力理論でも同様の解析が可能 (Cao, Lib, and Wub [2109.05973]).

$$S_{\mathrm{Brans-Dicke}} = \frac{1}{16\pi G}\int \mathrm{d}^4x\sqrt{-g}\left(\varphi R - \frac{\omega}{\varphi}\nabla_a\varphi\nabla^a\varphi\right)$$

asymptotically flat な時空の fall-off (Hou & Zhu, JHEP [2005.01310]) :

$$\begin{aligned} \varphi &= \varphi_0 + \varphi_1 r^{-1} + \mathcal{O}\left(r^{-2}\right) \\ g_{uu} &= -1 + \left(m + \varphi_1/\varphi_0\right) r^{-1} + \mathcal{O}\left(r^{-2}\right) \\ g_{ur} &= -1 + \frac{\varphi_1}{\varphi_0} r^{-1} + \mathcal{O}\left(r^{-2}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_{uI} &= \frac{D_J \hat{c}^J{}_I}{2} + \mathcal{O}\left(r^{-1}\right) \\ g_{IJ} &= \omega_{IJ} r^2 + h^{(1)}_{IJ} r + \mathcal{O}\left(r^0\right) \end{aligned}$$