非有界自己共役作用素の空間の位相のまとめ

松尾　信一郎

2020 年 9 月 10 日

概要

K 理論やスペクトル流に興味があるとき，有界作用素の空間の位相はノルム位相の一択だが，非有界作用素の空間の位相にはいくつかの可能性がある．このノートの目的は，特に非有界自己共役 Fredholm 作用素の空間の位相について，K 理論とスペクトル流の観点からまとめることにある．

目次

1 記号

H を無限次元可分複素 Hilbert 空間とする．

まずは有界作用素を考える．$\mathcal{B}$ を H 上の有界作用素の空間とする．$\mathcal{BF}$ を有界 Fredholm 作用素の空間として，$\mathcal{B}^{\mathrm{sa}}$ を有界自己共役作用素の空間とする．さらに，$\mathcal{BF}^{\mathrm{sa}}$ を有界自己共役 Fredholm 作用素の空間とする．

また，$\mathcal{U}$ をユニタリ作用素の空間とする．作用素ノルムを $\|\cdot\|_{\mathrm{op}}$ とする．以後，有界作用素たちのなす空間にはノルム位相を与える．

次に非有界作用素を考える．$\mathcal{C}$ を H 上の稠密に定義された閉作用素の空間とする．$\mathcal{CF}$ を稠密に定義された閉 Fredholm 作用素の空間として，$\mathcal{C}^{\mathrm{sa}}$ を非有界自己共役作用素の空間とする．さらに，$\mathcal{CF}^{\mathrm{sa}}$ を非有界自己共役 Fredholm 作用素の空間とする．非有界作用素たちのなす空間の位相には最適のものがあるわけではなく，目的により使い分けねばならない．これからその使い分けを説明する．

$$\begin{tikzcd}
& \mathcal{B} & & & \mathcal{C} & \\
\mathcal{BF} \arrow[ur, hook] & & \mathcal{B}^{\mathrm{sa}} \arrow[ul, hook'] \arrow[r, dashed] & \mathcal{CF} \arrow[ur, hook] & & \mathcal{C}^{\mathrm{sa}} \arrow[ul, hook'] \\
& \mathcal{BF}^{\mathrm{sa}} \arrow[ul, hook'] \arrow[ur, hook] & & & \mathcal{CF}^{\mathrm{sa}} \arrow[ul, hook'] \arrow[ur, hook] &
\end{tikzcd}$$

2　Atiyah-Janich と Atiyah-Singer の古典的結果

■Atiyah-Janich の定理　有界 Fredholm 作用素の空間 $\mathcal{BF}$ にはノルム位相が与えられていた．このとき，$\mathcal{BF}$ は K^0 函手の分類空間であって，ホモトピー同値 $\Omega^2\mathcal{BF} \simeq \mathcal{BF}$ が成り立つ．また，指数

$$\mathrm{index}\colon \pi_0(\mathcal{BF}) \to \mathbb{Z}$$

が具体的な同型写像を与える．証明は，例えば，Atiyah の教科書 [1] の Appendix を見よ．

■Atiyah-Singer の定理　有界自己共役 Fredholm 作用素の空間 $\mathcal{B}^{\mathrm{sa}}$ にもノルム位相が与えられていた．有界 Fredholm 作用素が essentially positive/negative というのは，コンパクト作用素を法とした Calkin 環の中で positive/negative ということだった．$\mathcal{BF}^{\mathrm{sa}}$ の部分空間 $\mathcal{BF}^{\mathrm{sa}}_{\pm}$ を

$$\begin{aligned}
A \in \mathcal{BF}^{\mathrm{sa}}_{+} &\iff A \text{ is essentially positive.}\\
A \in \mathcal{BF}^{\mathrm{sa}}_{-} &\iff A \text{ is essentially negative.}
\end{aligned}$$

と定め，$\mathcal{BF}^{\mathrm{sa}}_{*} := \mathcal{BF}^{\mathrm{sa}} \setminus \left(\mathcal{BF}^{\mathrm{sa}}_{+} \sqcup \mathcal{BF}^{\mathrm{sa}}_{-}\right)$ とすれば，この定義より，

$$\mathcal{BF}^{\mathrm{sa}} = \mathcal{BF}^{\mathrm{sa}}_{+} \sqcup \mathcal{BF}^{\mathrm{sa}}_{*} \sqcup \mathcal{BF}^{\mathrm{sa}}_{-}$$

であって，$\mathcal{BF}^{\mathrm{sa}}_{\pm}$ は可縮である．このとき，さらに，$\mathcal{BF}^{\mathrm{sa}}_{*}$ は K^1 函手の分類空間であって，

$$\mathcal{BF}^{\mathrm{sa}}_{*} \to \Omega\mathcal{BF}, \quad A \mapsto \big([0,1] \ni t \mapsto (\cos \pi t + A \sin \pi t) \in \mathcal{BF}\big)$$

はホモトピー同値写像である．また，スペクトル流

$$\mathrm{sf}\colon \pi_1(\mathcal{BF}^{\mathrm{sa}}_{*}, \mathrm{id}_H) \to \mathbb{Z}$$

が具体的な同型写像を与える．証明は Atiyah-Singer [2] の Theorem B を見よ．また，スペクトル流の定義については，APS III [3] の pp.93–94 と Phillips [11] の Proposition 2 を見よ．APS の定義は直観的でわかりやすく，Phillips の定義は堅牢である．

注意 2.1. これらの結果は，次のような視点からは直観的には明らかである．有界自己共役 Fredholm 作用素を，スペクトル分解によって，実数上の射影値測度と同一視する．すなわち，直観的には，実軸上の重み付き点の集合である．Fredholm 性は，原点が孤立していて，その重みが有限であることと言い換えられる．このとき，有界自己共役 Fredholm 作用素の道を考えるとは，それらの点の移動を考えることに他ならない．ここで注意すべきは，Fredholm 性の帰結として，原点を通過することが許される点は各瞬間には有限個のみということである．さて，essentially positive や essentially negative とは，高々有限個を除いた全ての点が原点の右側か左側にあることであって，これらが可縮なのは明らかであろう．また，$\mathcal{BF}_*^{\mathrm{sa}}$ に属するとは，原点の右側にも左側にも無限個の点があるということであって，スペクトル流とは原点を通過する点の数え上げである．

3　非有界自己共役 Fredholm 作用素の空間の位相

我々が真に興味があるのは偏微分作用素なので，非有界作用素を扱わねばならない．特に，非有界自己共役 Fredholm 作用素の空間の位相を考えたい．しかし，当たり前のことだが，非有界作用素を扱うが故に，作用素ノルムは無限になることもあるので，ノルム位相は使えない．その代わりとなるべき位相がいくつかある．

3.1　Riesz 位相とギャップ位相

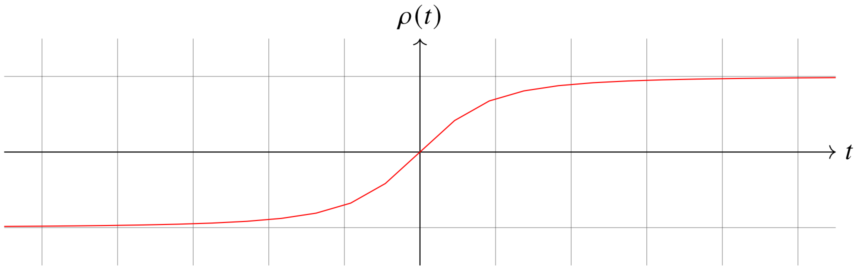
まず思い付く方法は，Riesz 変換

$$\rho\colon \mathbb{R} \to [-1,1], \quad t \mapsto \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$$

と Cayley 変換

$$\kappa\colon \mathbb{R} \to \mathrm{U}(1), \quad t \mapsto \frac{t-i}{t+i}$$

を使うことであろう．Borel functional calculus により，$\rho\colon \mathcal{C}^{\mathrm{sa}} \to \mathcal{B}^{\mathrm{sa}}$ と $\kappa\colon \mathcal{C}^{\mathrm{sa}} \to \mathcal{U}$ が誘導される．



■Riesz 位相　Riesz 変換 $\rho\colon \mathcal{C}^{\mathrm{sa}} \to \mathcal{B}^{\mathrm{sa}}$ は単射である．そこで，ρ が等長埋め込みになるような距離を考えよう．

定義 3.1. 非有界自己共役 Fredholm 作用素の空間 $\mathcal{C}^{\mathrm{sa}}$ の Riesz 距離 d_{riesz} を，任意の $T_1, T_2 \in \mathcal{C}^{\mathrm{sa}}$ に対して

$$d_{\mathrm{riesz}}(T_1,T_2) := \|\rho(T_1) - \rho(T_2)\|_{\mathrm{op}}$$

と定める．Riesz 距離の誘導する $\mathcal{C}^{\mathrm{sa}}$ の位相を Riesz 位相と呼ぶ．

注意 3.2. Riesz 位相の別の特徴付けについては，Nicolaescu [10] の Proposition 1.4 を見よ．

Riesz 変換の像は，

$$\rho(\mathcal{C}^{\mathrm{sa}}) = \left\{T \in \mathcal{B}^{\mathrm{sa}} \mid \|T\|_{\mathrm{op}} \leq 1 \wedge \mathrm{Ker}(T \pm \mathrm{id}_H) = \{0\}\right\}$$

と与えられる．像への全射性の証明には，ρ の逆変換で自己共役作用素が得られることを示す必要があり，それは函数解析の標準的議論でできるが，詳しくは (Booss-Bavnbek)-Lesch-Phillips [5] の Proposition 1.5 を見よ．像 $\rho(\mathcal{C}^{\mathrm{sa}})$ は $\mathcal{B}^{\mathrm{sa}}$ の単位閉球の中で開でも閉でもない．また，Riesz 変換は Fredholm 性を保つので，

$$\rho(\mathcal{CF}^{\mathrm{sa}}) := \left\{T \in \mathcal{BF}^{\mathrm{sa}} \mid \|T\|_{\mathrm{op}} \leq 1 \wedge \mathrm{Ker}(T \pm \mathrm{id}_H) = \{0\}\right\}$$

を得る．

命題 3.3. 包含写像 $\mathrm{id}\colon (\mathcal{B}^{\mathrm{sa}}, \|\cdot\|_{\mathrm{op}}) \to (\mathcal{C}^{\mathrm{sa}}, d_{\mathrm{riesz}})$ は連続である．

証明は，例えば，Nicolaescu [10] の Corollary 1.5 を見よ．

注意 3.4. 非有界自己共役作用素の空間 $\mathcal{C}^{\mathrm{sa}}$ の Riesz 位相を有界自己共役作用素の空間 $\mathcal{B}^{\mathrm{sa}}$ に制限したものはノルム位相と同じだが，Riesz 距離の制限が定める一様構造は作用素ノルムの定める一様構造とは異なる．例えば，$\mathcal{B}^{\mathrm{sa}}$ は作用素ノルムの定める一様構造では完備だが，Riesz 距離の定める一様構造では $\mathcal{C}^{\mathrm{sa}}$ の中で稠密になる．Lesch [9] の Proposition 4.1 を見よ．

Riesz 位相を使えば，有界作用素のときの議論をそのまま移植することができる．閉多様体上の楕円型作用素の低階の摂動による族を扱うときには Riesz 位相を考えれば充分なことが多いだろう．

命題 3.5. $(\mathcal{BF}^{\mathrm{sa}})^*$ と $(\mathcal{CF}^{\mathrm{sa}})^*$ でそれぞれの可逆元の全体を表す．このとき，包含写像

$$\left(\mathcal{BF}^{\mathrm{sa}}, (\mathcal{BF}^{\mathrm{sa}})^*\right) \hookrightarrow \left((\mathcal{CF}^{\mathrm{sa}}, (\mathcal{CF}^{\mathrm{sa}})^*), d_{\mathrm{riesz}}\right)$$

はホモトピー同値である．よって，非有界自己共役 Fredholm 作用素の空間 $\mathcal{CF}^{\mathrm{sa}}$ は Riesz 位相の下で K^1 函手の分類空間である．

証明は Lesch [9] の Theorem 5.10 と Corollary 5.12 を見よ．

しかし，Riesz 位相の最大の難点は，境界付き多様体や開多様体上の楕円型作用素の族が具体的に与えられたとき，それらの Riesz 位相での連続性を示すのがしばしば困難だということにある．

注意 3.6. Floer ホモロジーの文脈での Riesz 連続性の実践的な判定法については，Nicolaescu [10] の Proposition 1.7 と Proposition 2.1 を見よ．

■ギャップ位相　Cayley 変換 $\kappa\colon \mathcal{C}^{\mathrm{sa}} \to \mathcal{B}^{\mathrm{sa}}$ も単射である．そこで，κ が等長埋め込みになるような距離を考えよう．非有界 Fredholm 作用素の空間 $\mathcal{CF}$ に対してギャップ位相の性質を初めて詳しく調べたのは Cordes-Labrousse [6] らしいが，私は未見である．

定義 3.7. 非有界自己共役 Fredholm 作用素の空間 $\mathcal{C}^{\mathrm{sa}}$ の Cayley 距離 d_{riesz} を，任意の $T_1, T_2 \in \mathcal{C}^{\mathrm{sa}}$ に対して

$$d_{\mathrm{cayley}}(T_1, T_2) := \|\kappa(T_1) - \kappa(T_2)\|_{\mathrm{op}}$$

と定める．Cayley 距離の誘導する $\mathcal{C}^{\mathrm{sa}}$ の位相をギャップ位相と呼ぶ．

Cayley 距離には，いくつかの変種がある．$T_1, T_2 \in \mathcal{C}^{\mathrm{sa}}$ とする．

- まず
$$\kappa(T_1) - \kappa(T_2) = \frac{T_1 - i}{T_1 + i} - \frac{T_2 - i}{T_2 + i} = \left(1 - \frac{2i}{T_1 + i}\right) - \left(1 - \frac{2i}{T_2 + i}\right) = -2i\left(\frac{1}{T_1 + i} - \frac{1}{T_2 + i}\right)$$
に注意すれば，
$$d_{\mathrm{cayley}}(T_1, T_2) = 2\left\|\frac{1}{T_1 + i} - \frac{1}{T_2 + i}\right\|_{\mathrm{op}}$$
がわかる．右辺で定まる距離は Cayley 距離と同じ一様構造を誘導する．

- さらに，$1/(T + i)$ の代わりに $1/(T - i)$ などを使って距離を定めても Cayley 距離と同じ一様構造を誘導する．要するに，Cayley 距離はレゾルバントの作用素ノルムを考えることと同じである．

- 同じ事の言い換えだが，$T \mapsto (T \pm i)^{-1}$ が連続になる最弱の位相がギャップ位相である．

- また，T_1 と T_2 のグラフへの $H \times H$ の中での直交射影を π_1 と π_2 としたとき，
$$d_{\mathrm{gap}}(T_1, T_2) := \|\pi_1 - \pi_2\|_{\mathrm{op}}$$
と定めれば，d_{cayley} と d_{gap} は同じ一様構造を誘導する．証明は (Booss-Bavnbek)-Lesch-Phillips [5] の Proposition 1.1 (b) を見よ．ちなみに，$\|\pi_1 - \pi_2\|_{\mathrm{op}}$ は T_1 と T_2 のグラフの「ギャップ」を表している．加藤敏夫先生の摂動論の教科書 [8] の第 IV 章第 2 節や第 IV 章第 6 節の Theorem 2.23 を参照のこと．

Cayley 変換の像は，
$$\kappa(\mathcal{C}^{\mathrm{sa}}) = \left\{U \in \mathcal{U} \mid \mathrm{Ker}(U - \mathrm{id}_H) = \{0\}\right\}$$
と与えられる．像への全射性の証明には，κ の逆変換で自己共役作用素が得られることを示す必要があり，それは函数解析の標準的議論でできるが，詳しくは (Booss-Bavnbek)-Lesch-Phillips [5] の Proposition 1.2 を見よ．

注意 3.8. ここで無限次元ユニタリ群についてまとめておく．Kuiper の定理より $\mathcal{U}$ は可縮であり，Bott 周期性より $\mathrm{U}(\infty) := \lim \mathrm{U}(n)$ は K^1 函手の分類空間である．さて，
$$\begin{aligned}
\mathcal{U}_{\mathrm{inj}} &:= \left\{U \in \mathcal{U} \mid \mathrm{Ker}(U - \mathrm{id}_H) = \{0\}\right\} \\
\mathcal{U}_{\mathcal{K}} &:= \left\{U \in \mathcal{U} \mid (U - \mathrm{id}_H) \text{ is compact.}\right\} \\
{}_{\mathcal{F}}\mathcal{U} &:= \left\{U \in \mathcal{U} \mid -1 \notin \mathrm{spec}_{\mathrm{ess}}(U)\right\} \\
{}_{\mathcal{F}}\mathcal{U}_{\mathrm{inj}} &:= ({}_{\mathcal{F}}\mathcal{U}) \cap (\mathcal{U}_{\mathrm{inj}})
\end{aligned}$$
とする．このとき，$\mathrm{U}(\infty) \hookrightarrow \mathcal{U}_{\mathcal{K}} \hookrightarrow {}_{\mathcal{F}}\mathcal{U}$ はホモトピー同値である．また，$\kappa(\mathcal{C}^{\mathrm{sa}}) = \mathcal{U}_{\mathrm{inj}}$ かつ $\kappa(\mathcal{CF}^{\mathrm{sa}}) = {}_{\mathcal{F}}\mathcal{U}_{\mathrm{inj}}$ である．${}_{\mathcal{F}}\mathcal{U}_{\mathrm{inj}} \hookrightarrow {}_{\mathcal{F}}\mathcal{U}$ は稠密だが，変位レトラクトではない．(Booss-Bavnbek)-Lesch-Phillips [4] の 179 ページと (Booss-Bavnbek)-Lesch-Phillips [5] の Example 2.14 を見よ．ただし，${}_{\mathcal{F}}\mathcal{U}_{\mathrm{inj}} \hookrightarrow {}_{\mathcal{F}}\mathcal{U}$ がホモトピー同値であることは Joachim [7] で示された（ようだ）．

命題 3.9. 包含写像 $\mathrm{id}\colon (\mathcal{B}^{\mathrm{sa}}, \|\cdot\|_{\mathrm{op}}) \to (\mathcal{C}^{\mathrm{sa}}, d_{\mathrm{cayley}})$ は連続である．

証明は，例えば，Nicolaescu [10] の Corollary 1.5 を見よ．

注意 3.10. 非有界自己共役作用素の空間 $\mathcal{C}^{\mathrm{sa}}$ のギャップ位相を有界自己共役作用素の空間 $\mathcal{B}^{\mathrm{sa}}$ に制限したものはノルム位相と同じだが，Cayley 距離の制限が定める一様構造は作用素ノルムの定める一様構造とは異なる．例えば，$\mathcal{B}^{\mathrm{sa}}$ は作用素ノルムの定める一様構造では完備だが，Cayley 距離の定める一様構造では $\mathcal{C}^{\mathrm{sa}}$ の中で稠密になる．(Booss-Bavnbek)-Lesch-Phillips [5] の Proposition 1.6 と Lesch [9] の Proposition 4.1 を見よ．

具体的に与えられた楕円型作用素の族について，それらのギャップ位相での連続性を示すことは Riesz 位相のときよりも容易なことは多い．しかし，一般論を確立するときにやや面倒くさくなる．

■Fuglede の有名な例　Riesz 位相がギャップ位相よりも真に強いことを示す例がある．

例 3.11. Hilbert 空間 H の正規直交基底を $\{e_0, e_1, e_2, \dots\}$ とする．$D(T) := \{\sum a_k e_k \mid \sum k^2 |a_k|^2 < \infty\}$ として，掛け算作用素 T を，

$$T\colon D(T) \to H, \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k e_k \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} k a_k e_k$$

と定めれば，T は自己共役である．また，各 $n = 0, 1, 2, \dots$ に対して，射影 P_n を，

$$P_n\colon H \to H, \quad e_k \mapsto \begin{cases} k e_k & \text{if } k = n \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

と定めれば，P_n は有界かつ自己共役である．このとき，自己共役作用素の列 $\{T_0, T_1, T_2, \dots\}$ を，

$$T_n := T - 2P_n\colon D(T) \to H$$

と定める．このとき，次がわかる．

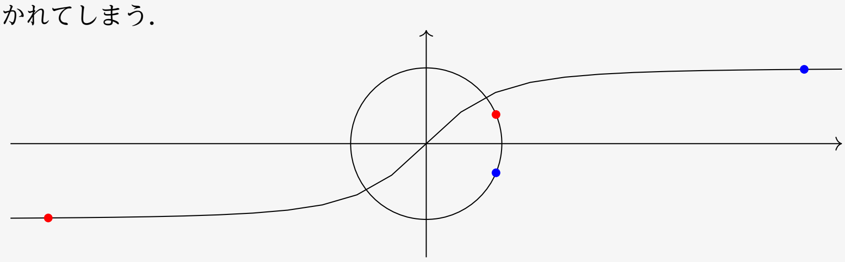
- ギャップ位相について，T_n は T に収束している：

$$d_{\mathrm{cayley}}(T_n, T) = 2\left\|\frac{1}{T_n + i} - \frac{1}{T + i}\right\|_{\mathrm{op}} = 2\left|\frac{1}{-n + i} - \frac{1}{n + i}\right| = \frac{4n}{n^2 + 1} \longrightarrow 0$$

- しかし，Riesz 位相については，T_n は T に収束しない：

$$d_{\mathrm{riesz}}(T_n, T) = \left|\frac{-n}{\sqrt{1 + (-n)^2}} - \frac{n}{\sqrt{1 + n^2}}\right| = \frac{2n}{\sqrt{1 + n^2}} \longrightarrow 2$$

すなわち，無限遠に逃げていく点 $-n$ と n は，Cayley 変換では $1 \in \mathrm{U}(1)$ に吸収されるが，Riesz 変換では両端 ± 1 に引き裂かれてしまう．



例えば (Booss-Bavnbek)-Lesch-Phillips [5] の Example 2.14 と Nicolaescu [10] の Remark 1.6 も見よ．

次の命題はほぼ明らかであろう．

命題 3.12. 恒等写像 $\mathrm{id}\colon (C^{\mathrm{sa}}, d_{\mathrm{riesz}}) \to (C^{\mathrm{sa}}, d_{\mathrm{cayley}})$ は連続である．

証明は，例えば，任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して

$$\frac{1}{t+i} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} + i\left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right)^2 - i$$

が成り立つことを使えばよい．Nicolaescu [10] の Lemma 1.2 と Lesch [9] の Proposition 2.2 を見よ．

3.2 Lesch の位相

楕円型作用素の低階の摂動のように，定義域が共通の非有界作用素の族を扱うときには，Lesch 距離もある．明示的には，Lesch [9] の Definition 2.1 で導入されたと思われる（が，文献を精査したわけではない）．

$T \in C^{\mathrm{sa}}$ を非有界自己共役作用素として，$W := D(T)$ をその定義域とする．W の T によるグラフ内積 $(\cdot,\cdot)_T$ は，任意の $u, v \in W$ に対して

$$(u,v)_T := (u,v)_H + (Du, Dv)_H$$

と定義された．このとき，W はグラフ内積によって Hilbert 空間であり，H に連続に埋め込まれる．

定義 3.13. T と共通の定義域を持つ非有界自己共役作用素の空間を

$$C^{\mathrm{sa}}(T,W) := \{S \in C^{\mathrm{sa}} \mid D(S) = W\}$$

とする．このとき，$C^{\mathrm{sa}}(T,W)$ の距離 d_{lesch} を，任意の $S_1, S_2 \in C^{\mathrm{sa}}(T,W)$ に対して

$$d_{\mathrm{lesch}}(S_1,S_2) := \|S_1 - S_2\|_{W\to H} = \left\|\frac{S_1 - S_2}{\sqrt{1+T^2}}\right\|_{H\to H}$$

と定める．

任意の有界自己共役作用素 $A \in \mathcal{B}^{\mathrm{sa}}$ に対して，$T + A \in C^{\mathrm{sa}}(T,W)$ である．次の命題もほぼ明らかであろう．

命題 3.14. 自然な包含写像の列

$$(\mathcal{B}^{\mathrm{sa}}, \|\cdot\|_{\mathrm{op}}) \hookrightarrow (C^{\mathrm{sa}}(T,W), d_{\mathrm{lesch}}) \overset{\beta}{\hookrightarrow} (C^{\mathrm{sa}}, d_{\mathrm{riesz}}) \hookrightarrow (C^{\mathrm{sa}}, d_{\mathrm{gap}})$$

は全て連続である．

β の連続性のみやや非自明であるが，その証明は Lesch [9] の Proposition 2.2 の証明の (3) を見よ．

3.3 Wahl の位相

Wahl は，レゾルバントに注目して，ギャップ位相よりも弱い位相を導入した．詳しくは Wahl [12] を見よ．

4　特にギャップ位相について

■$\mathcal{CF}^{\mathrm{sa}}$ の連結性　有界作用素のときの Atiyah-Singer の結果との対比をなしているのが次の結果である．

命題 4.1. 非有界自己共役 Fredholm 作用素の空間はギャップ位相の下で連結である．

証明は (Booss-Bavnbek)-Lesch-Phillips [5] の Theorem 1.10 (a) を見よ．

注意 4.2. この結果も直観的には明らかである．Cayley 変換による $\mathcal{CF}^{\mathrm{sa}}$ の像は，

$$\kappa(\mathcal{CF}^{\mathrm{sa}}) = \left\{U \in \mathcal{U} \mid -1 \neq \mathrm{spec}_{\mathrm{ess}}(U) \wedge \mathrm{Ker}(U - \mathrm{id}_H) = \{0\}\right\}$$

と与えられる．すなわち，スペクトル分解によってユニタリ作用素と $\mathrm{U}(1)$ 上の重み付き点の集合を同一視するとき，$\kappa(\mathcal{CF}^{\mathrm{sa}})$ の元は，$-1 \in \mathrm{U}(1)$ が孤立していて重みが有限であり，$1 \in \mathrm{U}(1)$ は集積点になっている．このとき，$\kappa(\mathcal{CF}^{\mathrm{sa}})$ の任意の元は i とつなぐことができる．そのためには，$\mathrm{U}(1)$ の下半分にある点の個数が有限か無限かによって左の -1 か右の $+1$ を通って i まで点を移動させればよい．(Booss-Bavnbek)-Lesch-Phillips [5] の 234 ページの図を見よ．

■K^1 函手の分類空間　ギャップ位相でも Atiyah-Singer の結果と同様のことが成り立つ．

命題 4.3. 非有界自己共役 Fredholm 作用素の空間はギャップ位相の下で K^1 函手の分類空間である．

証明は Joachim [7] の Theorem 3.5 (ii) を見よ．これは (Booss-Bavnbek)-Lesch-Phillips [5] の 238 ページでは予想として述べられていたが，Joachim [7] が解決した．

■スペクトル流　非有界自己共役 Fredholm 作用素の空間 $\mathcal{CF}^{\mathrm{sa}}$ にギャップ位相を与えたときのスペクトル流の定義については，(Booss-Bavnbek)-Lesch-Phillips [5] の Definition 2.2 と Definition 2.12 と Proposition 2.17 を見よ．また，要点の整理として，(Booss-Bavnbek)-Lesch-Phillips [4] も見よ．

参考文献

[1] M. F. Atiyah, *K-theory*, Lecture notes by D. W. Anderson, W. A. Benjamin, Inc., New York-Amsterdam, 1967. MR0224083

[2] M. F. Atiyah and I. M. Singer, *Index theory for skew-adjoint Fredholm operators*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **37** (1969), 5–26. MR285033

[3] M. F. Atiyah, V. K. Patodi, and I. M. Singer, *Spectral asymmetry and Riemannian geometry. III*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **79** (1976), no. 1, 71–99, DOI 10.1017/S0305004100052105. MR397799

[4] Bernhelm Booss-Bavnbek, Matthias Lesch, and John Phillips, *Spectral flow of paths of self-adjoint Fredholm operators*, Nuclear Phys. B Proc. Suppl. **104** (2002), 177–180, DOI 10.1016/S0920-5632(01)01608-5. Quantum gravity and spectral geometry (Napoli, 2001). MR1966235

[5] ———, *Unbounded Fredholm operators and spectral flow*, Canad. J. Math. **57** (2005), no. 2, 225–250, DOI 10.4153/CJM-2005-010-1. MR2124916

[6] H. O. Cordes and J. P. Labrousse, *The invariance of the index in the metric space of closed operators*, J. Math. Mech. **12** (1963), 693–719, DOI 10.1017/s0022112062000440. MR0162142

[7] Michael Joachim, *Unbounded Fredholm operators and K-theory*, High-dimensional manifold topology, World Sci. Publ., River Edge, NJ, 2003, pp. 177–199, DOI 10.1142/9789812704443_0009. MR2048722

[8] Tosio Kato, *Perturbation theory for linear operators*, Classics in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 1995. Reprint of the 1980 edition. MR1335452

[9] Matthias Lesch, *The uniqueness of the spectral flow on spaces of unbounded self-adjoint Fredholm operators*, Spectral geometry of manifolds with boundary and decomposition of manifolds, Contemp. Math., vol. 366, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005, pp. 193–224, DOI 10.1090/conm/366/06730. MR2114489

[10] Liviu I. Nicolaescu, *On the space of Fredholm operators*, An. Ştiinţ. Univ. Al. I. Cuza Iaşi. Mat. (N.S.) **53** (2007), no. 2, 209–227. MR2386795

[11] John Phillips, *Self-adjoint Fredholm operators and spectral flow*, Canad. Math. Bull. **39** (1996), no. 4, 460–467, DOI 10.4153/CMB-1996-054-4. MR1426691

[12] Charlotte Wahl, *A new topology on the space of unbounded selfadjoint operators, K-theory and spectral flow*, C^*-algebras and elliptic theory II, Trends Math., Birkhäuser, Basel, 2008, pp. 297–309, DOI 10.1007/978-3-7643-8604-7_16. MR2408149