Riemann 多様体での部分積分

松尾 信一郎

2018 年 3 月 8 日

目次

1 境界の向きと Stokes の定理 1
1.1 Euclid 空間の場合 1
1.2 多様体の場合 2

2 部分積分 2
2.1 Riemann 多様体の体積形式 2
2.2 Riemann 多様体の Hodge 作用素 3
2.3 部分積分の公式 3
2.4 接続の場合 4

1 境界の向きと Stokes の定理

境界の向きと Stokes の定理について整理しておく．以下，向き付けと体積形式を同一視する．

1.1 Euclid 空間の場合

n 次元 Euclid 空間 $\mathbb{R}^n$ の標準座標を $(x^1, \dots, x^n)$ とする．$\mathbb{R}^n$ の標準的な向きは

$$dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$$

で与えられる．左半平面 $X := (-\infty, 0] \times \mathbb{R}^{n-1}$ に対して，その境界 $\partial X = \{0\} \times \mathbb{R}^{n-1}$ の **Stokes 向き付け**を

$$dx^2 \wedge \cdots \wedge dx^n$$

と定める．このとき，$\nu := \partial/\partial x^1$ は外向き法ベクトル場であり，包含写像 $i\colon \{0\} \times \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^n$ に対して，

$$dx^2 \wedge \cdots \wedge dx^n = i^*\big(\iota_\nu(dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n)\big)$$

が成り立つことに注意せよ．

また，$f \in C_0^\infty(X)$ に対して，$\alpha := f dx^2 \wedge \cdots \wedge dx^n$ とするとき，

$$d\alpha = \frac{\partial f}{\partial x^1} dx^1 \wedge dx^2 \wedge \cdots \wedge dx^n$$
$$i^*\big(\iota_\nu(\alpha)\big) = f(0, x^2, \dots, x^n) dx^2 \wedge \cdots \wedge dx^n$$

であり，

$$
\begin{aligned}
\int_X d\alpha &= \int_X \frac{\partial f}{\partial x^1}\, dx^1 \wedge dx^2 \wedge \cdots \wedge dx^n \\
&= \int_{(-\infty,0]\times\mathbb{R}^{n-1}} \frac{\partial f}{\partial x^1}\, dx^1 dx^2 \dots dx^n \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_{-\infty}^{0} \frac{\partial f}{\partial x^1}\, dx^1 \right] dx^2 \dots dx^n \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(0, x^2, \dots, x^n)\, dx^2 \dots dx^n \\
&= \int_{\partial X} f(0, x^2, \dots, x^n)\, dx^2 \wedge \cdots \wedge dx^n \\
&= \int_{\partial X} i^*\big(\iota_\nu(\alpha)\big)
\end{aligned}
$$

が成り立つ．

1.2 多様体の場合

X を n 次元境界付き有向多様体とする．$i\colon \partial X \to X$ を境界からの埋込写像として，ν を外向き法ベクトルとする．X の体積形式が $\mathrm{vol}_{(X,g)}$ であるとき，境界 ∂X の体積形式 $\mathrm{vol}_{\partial X, i^*g}$ を

$$\mathrm{vol}_{\partial X, i^*g} := i^*\big(\iota_\nu\big(\mathrm{vol}_{(X,g)}\big)\big)$$

により定め，**Stokes 向き付け**と呼ぶ．[1, Proposition 15.24, p.386] を見よ．

例 1.1. $\{x = (x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n \mid x^n > 0\} \supset \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$ に対して，外向き法ベクトルは $-\partial/\partial x^n$ であり，境界 $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$ の Stokes 向き付けは

$$\iota_{-\frac{\partial}{\partial x^n}}\big(dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n\big) = (-1)(-1)^{n-1} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^{n-1} = (-1)^n dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^{n-1}$$

となる．

定理 1.2 (Stokes の定理)**.** X を n 次元境界付き有向多様体として，$i\colon \partial X \to X$ を境界からの埋込写像とする．このとき，任意の $\omega \in \Omega_c^{n-1}(X)$ に対して，

$$\int_X d\omega = \int_{\partial X} i^*(\omega)$$

が成り立つ．

2 部分積分

2.1 Riemann 多様体の体積形式

(X, g) を n 次元境界付き有向 Riemann 多様体として，$\mathrm{vol}_{(X,g)} = \sqrt{\det g_{ij}}\, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$ を Riemann 体積形式とする．$i\colon \partial X \to X$ を境界からの埋込写像として，ν を外向き単位法ベクトルと

する．∂X には，Stokes 向き付けと誘導計量 i^*g を入れる．このとき，$(\partial X, i^*g)$ の Riemann 体積形式 $\mathrm{vol}_{(\partial X, i^*g)}$ は

$$\mathrm{vol}_{(\partial X, i^*g)} = i^*\big(\iota_\nu\big(\mathrm{vol}_{(X,g)}\big)\big)$$

をみたす．[1, Corollary 15.34, p.391] を見よ．

2.2 Riemann 多様体の Hodge 作用素

(X, g) を n 次元境界付き有向 Riemann 多様体として，$\mu_g = \sqrt{\det g_{ij}}\, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$ を Riemann 体積形式とする．$i\colon \partial X \to X$ を境界からの埋込写像として，ν を外向き単位法ベクトルとする．∂X には，Stokes 向き付けと誘導計量 i^*g を入れる．このとき，任意の $\alpha, \beta \in \Omega^p(X)$ に対して，

$$i^*\big(\alpha \wedge *_g \beta\big) = i^*(\alpha) \wedge *_{i^*g}\big(\iota_\nu(\beta)\big)$$

が成り立つ．

2.3 部分積分の公式

2.3.1 基本形

定理 2.1. (X, g) を n 次元境界付き有向 Riemann 多様体とする．$i\colon \partial X \to X$ を境界からの埋込写像として，ν を外向き法ベクトルとする．任意の $\alpha \in \Omega^{p-1}(X)$ と $\beta \in \Omega^p(X)$ に対して，

$$\int_X (d\alpha, \beta)_g \, d\mu = \int_X (\alpha, d^*\beta)_g \, d\mu + \int_{\partial X} (\alpha, \iota_\nu(\beta))_{i^*g} \, d\sigma \tag{1}$$

が成り立つ．

証明. 積の微分公式

$$d(\alpha \wedge *_g \beta) = d\alpha \wedge *_g \beta + (-1)^p \alpha \wedge d(*_g \beta)$$

と Stokes の定理より従う．また，$i^*\big(\alpha \wedge *_g \beta\big) = i^*(\alpha) \wedge *_{i^*g}\big(\iota_\nu(\beta)\big)$ にも注意せよ． □

2.3.2 Green の公式

定理 2.2. (X, g) を n 次元境界付き有向 Riemann 多様体として，ν を ∂X の外向き法ベクトルとする．任意の $u, v \in C^\infty(X)$ に対して，

$$\int_X u \Delta v \, d\mu = \int_X (\nabla u, \nabla v) \, d\mu - \int_{\partial X} u \frac{\partial v}{\partial \nu} \, d\sigma$$

が成り立つ．

証明. 部分積分の公式の基本形 (1) において，$\alpha = u$ かつ $\beta = dv$ とせよ． □

系 2.3. (X, g) を n 次元境界付き有向 Riemann 多様体として，ν を ∂X の外向き法ベクトルとする．任意の $u, v \in C^\infty(X)$ に対して，

$$\int_X \Delta u \, d\mu = -\int_{\partial X} \frac{\partial u}{\partial \nu} \, d\sigma$$

が成り立つ．

注意 2.4 (符号の確認)**.** $X = D^2 \subset \mathbb{R}^2$ として，標準的な計量と向きを与える．$\partial X = S^1$ の Stokes 向き付けは左回りであり，$\partial/\partial r$ が外向き単位法ベクトルである．$u(x, y) = x^2 + y^2 = r^2$ とする．このとき，

$$\Delta u = -\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) u = -4$$
$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{\partial u}{\partial r} = 2r$$

なので，

$$\int_X \Delta u \, d\mu = (-4) \cdot \pi = -4\pi$$
$$-\int_{\partial X} \frac{\partial u}{\partial \nu} \, d\sigma = -(2 \cdot 2\pi) = -4\pi$$

となる．

定理 2.5 (Green の公式)**.** (X, g) を n 次元境界付き有向 Riemann 多様体として，ν を ∂X の外向き法ベクトルとする．任意の $u, v \in C^\infty(X)$ に対して，

$$\int_X \big(u(\Delta v) - (\Delta u)v\big) \, d\mu = -\int_{\partial X} \left(u \frac{\partial v}{\partial \nu} - \frac{\partial u}{\partial \nu} v\right) d\sigma$$

が成り立つ．

2.4 接続の場合

(X, g) を n 次元境界付き有向 Riemann 多様体として，ν を ∂X の外向き法ベクトルとする．(E, h) を X 上の Hermite ベクトル束とする．A を E 上の計量接続とする．このとき，任意の $\phi \in \Gamma(E)$ に対して，

$$\big(\phi, \nabla_A^* \nabla_A \phi\big) = |\nabla_A \phi|^2 + \frac{1}{2} \Delta |\phi|^2$$

が成り立つ．

注意 2.6. それぞれの項の符号に混乱したらラプラシアンのスペクラムが正であることを思い出す．

注意 2.7 (符号の確認)**.** 全て自明な一次元のとき，$\phi = x^2$ として，

$$\begin{aligned}\big(\phi, \nabla_A^* \nabla_A \phi\big) &= \big(x^2, -2\big) = -2x^2 \\ |\nabla_A \phi|^2 + \frac{1}{2}\Delta|\phi|^2 &= |2x|^2 + \frac{1}{2}(-12x^2) = -2x^2\end{aligned}$$

となる．

定理 2.8. (X, g) を n 次元境界付き有向 Riemann 多様体として，ν を ∂X の外向き法ベクトルとする．(E, h) を X 上の Hermite ベクトル束とする．A を E 上の計量接続とする．このとき，任意の $\phi \in \Gamma(E)$ に対して，

$$\int_X (\phi, \nabla_A^* \nabla_A \phi)\, d\mu = \int_X |\nabla_A \phi|^2\, d\mu - \frac{1}{2}\int_{\partial X} \frac{\partial |\phi|^2}{\partial \nu}\, d\sigma$$

が成り立つ．

2.4.1 Gauss の発散定理

(X, g) を n 次元境界付き有向 Riemann 多様体として，$\mathrm{vol}_{X,g}$ を Riemann 体積形式とする．発散作用素 $\mathrm{div}\colon \mathfrak{X}(X) \to C^\infty(X)$ を

$$\mathrm{div}(V) := *_g d\big(\iota_V\big(\mathrm{vol}_{(X,g)}\big)\big)$$

により定める．Cartan の公式 $\mathfrak{L}_V = \iota_V \circ d + d \circ \iota_V$ により，

$$\begin{aligned}\mathrm{div}(V) &= *_g d\big(\iota_V\big(\mathrm{vol}_{(X,g)}\big)\big) \\ &= *_g \big[\iota_V(d\,\mathrm{vol}_{(X,g)}) + d\big(\iota_V\big(\mathrm{vol}_{(X,g)}\big)\big)\big] \\ &= *_g \big[\mathfrak{L}_V\big(\mathrm{vol}_{(X,g)}\big)\big]\end{aligned}$$

を得る．すなわち，

$$\mathfrak{L}_V\big(\mathrm{vol}_{(X,g)}\big) = \big(\mathrm{div}(V)\big)\mathrm{vol}_{(X,g)}$$

が成り立つ．

例 2.9. $(X, g) = \mathbb{R}^2$ のとき，

$$\begin{aligned}\iota_V(dx^1 \wedge dx^2) &= V^i\big(\iota_{\partial_i}(dx^1 \wedge dx^2)\big) = V^1 dx^2 - V^2 dx^1 \\ *_g d\big(\iota_V(dx^1 \wedge dx^2)\big) &= \frac{\partial V^1}{\partial x^1} dx^1 \wedge dx^2 + \frac{\partial V^2}{\partial x^2} dx^1 \wedge dx^2\end{aligned}$$

なので，

$$\mathrm{div}(V) = *_g d\big(\iota_V(dx^1 \wedge dx^2)\big) = \frac{\partial V^1}{\partial x^1} + \frac{\partial V^2}{\partial x^2}$$

を得る．

定理 2.10. (X, g) を n 次元境界付き有向 Riemann 多様体として，ν を ∂X の外向き法ベクトルとする．任意の $V \in \mathfrak{X}(X)$ に対して，

$$\int_X \mathrm{div} V \, d\mu = \int_{\partial X} (V, \nu) \, d\sigma$$

が成り立つ．

証明. まずは Stokes の定理より

$$\begin{aligned}\int_X \left(\mathrm{div} V\right) \mathrm{vol}_{(X,g)} &= \int_X d\left(\iota_V \left(\mathrm{vol}_{(X,g)}\right)\right) \\ &= \int_{\partial X} i^* \left(\iota_V \left(\mathrm{vol}_{(X,g)}\right)\right)\end{aligned}$$

を得る．また，局所座標を取って考えれば，

$$i^* \left(\iota_V \left(\mathrm{vol}_{(X,g)}\right)\right) = (V, \nu) \mathrm{vol}_{(\partial X, i^* g)}$$

がわかる．

□

参考文献

- Riemann 多様体の上の発散定理については [1, pp. 422–426] を見よ．
- 解析での部分積分の公式のまとめは [2, Appendix C.5, pp. 714–715] を見よ．
- Taylor[3] の講義録も参考になる．
- Riemann 多様体上の部分積分については Chavel[4] の p.149–も見よ．
- Nicolaescu の教科書 [5] は，一見きちんとしてるが，計算間違いが多くて信用できない．

[1] John M. Lee, *Introduction to smooth manifolds*, 2nd ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 218, Springer, New York, 2013. MR2954043

[2] Lawrence C. Evans, *Partial differential equations*, 2nd ed., Graduate Studies in Mathematics, vol. 19, American Mathematical Society, Providence, RI, 2010. MR2597943

[3] Michael Eugene Taylor, *Differential Geometry*.

[4] Isaac Chavel, *Riemannian geometry*, 2nd ed., Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 98, Cambridge University Press, Cambridge, 2006. A modern introduction. MR2229062

[5] Liviu I. Nicolaescu, *Lectures on the geometry of manifolds*, 2nd ed., World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, 2007. MR2363924