| 科目 | 現代数学基礎 AII | 日付 | 2019-02-04 | 採点結果 Score | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|

| 学籍番号 Student No. | | | | | | | | | | 氏名 Name | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|

(0) 集合 $X$ の部分集合からなる集合 $\mathcal{O}_X$ が開集合系であることを定義せよ．以下，$(X, \mathcal{O}_X)$ と $(Y, \mathcal{O}_Y)$ を位相空間とする．
(1) 部分集合 $A \subset X$ に対して，その内部 $\mathrm{int}\,(A)$ と閉包 $\mathrm{cl}\,(A)$ と境界 $\partial A$ を定義せよ．以下の問には各自の与えた定義に基づき答えよ．
(2) 部分集合 $A \subset X$ に対して，$\mathrm{cl}\,(A) = X \setminus (\mathrm{int}\,(X \setminus A))$ を示せ．
(3) 部分集合 $A, B \subset X$ に対して，$\mathrm{cl}\,(A \cup B) = \mathrm{cl}\,(A) \cup \mathrm{cl}\,(B)$ を示せ．
(4) 写像 $f : X \to Y$ が連続写像であることを定義せよ．以下の問には各自の与えた定義に基づき答えよ．
(5) $f : X \to Y$ を連続写像とする．部分集合 $A \subset X$ に対して，$f[\mathrm{cl}\,(A)] \subset \mathrm{cl}\,(f[A])$ を示せ．

| 科目 | 現代数学基礎 AII | 日付 | 2019-02-04 |
|---|---|---|---|

採点結果 Score

| 学籍番号 Student No. | | | | | | | | | | 氏名 Name | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|

$(X, \mathcal{O}_X)$ と $(Y, \mathcal{O}_Y)$ を位相空間とする．
(1) $X$ がコンパクトであることを定義せよ．以下の問には各自の与えた定義に基づき答えよ．
(2) 部分集合 $A \subset X$ の相対位相 $\mathcal{O}_A$ を定義せよ．以下，部分集合には常に各自の与えた相対位相を与える．
(3) $f : X \to Y$ を連続写像とする．$X$ がコンパクトのとき，像 $f[X] \subset Y$ もコンパクトであることを示せ．
(4) $A, B \subset X$ を部分空間とする．$A$ と $B$ がコンパクトのとき，$A \cup B$ もコンパクトであることを示せ．
(5) 一次元 Euclid 空間 $\mathbb{R}$ の部分空間 $A := \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\right\}$ はコンパクトではないことを示せ．

| 科目 | 現代数学基礎 AII | 日付 | 2019-02-04 |
|---|---|---|---|

採点結果 Score

| 学籍番号 Student No. | | | | | | | | | | 氏名 Name | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|

$(X, \mathcal{O}_X)$ と $(Y, \mathcal{O}_Y)$ を位相空間とする．
(1) $X$ が連結であることを定義せよ．以下の問には各自の与えた定義に基づき答えよ
(2) $A, B \subset X$ を部分空間とする．$A$ と $B$ が連結かつ $A \cap B \neq \emptyset$ のとき，$A \cup B$ も連結であることを示せ．
(3) $f : X \to Y$ を連続写像とする．$X$ が連結のとき，像 $f[X] \subset Y$ も連結であることを示せ．
(4) $A \subset X$ を部分空間とする．$A$ が連結のとき，閉包 $\mathrm{cl}(A)$ も連結であることを示せ．
(5) トポロジストの正弦曲線 $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid [y = \sin(1/x)] \vee [x = y = 0]\} \subset \mathbb{R}^2$ が連結であることを示せ．

| 科目 | 現代数学基礎 AII | 日付 | 2019-02-04 | 採点結果 Score | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|

| 学籍番号 Student No. | | | | | | | | | | 氏名 Name | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|

$(X, \mathcal{O}_X)$ と $(Y, \mathcal{O}_Y)$ を位相空間とする．
(1) $X$ が Hausdorff 空間であることを定義せよ．以下の問には各自の与えた定義に基づき答えよ
(2) 直積 $X \times Y$ の直積位相 $\mathcal{O}_{X\times Y}$ を定義せよ．以下，直積には常に各自の与えた直積位相を与える．
(3) $X$ と $Y$ が Hausdorff 空間のとき，$X \times Y$ も Hausdorff であることを示せ．
(4) $X \times Y$ が Hausdorff 空間かつ $Y \neq \emptyset$ のとき，$X$ も Hausdorff 空間であることを示せ．
(5) $f : X \to Y$ と $g : X \to Y$ を連続写像とする．$Y$ が Hausdorff 空間のとき，$\{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$ が閉集合であることを示せ．

| 科目 | 現代数学基礎 AII | 日付 | 2019-02-04 | 採点結果 Score | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|

| 学籍番号 Student No. | | | | | | | | | | 氏名 Name | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|

$(X, d_X)$ と $(Y, d_Y)$ を距離空間とする．

(1) $d_{X\times Y} : (X \times Y) \times (X \times Y) \to [0, \infty)$ を $d_{X\times Y}((x, y), (x', y')) := \sqrt{d_X(x, x')^2 + d_Y(y, y')^2}$ により定める．$d_{X\times Y}$ も距離函数であることを示せ．

(2) $(X, d_X)$ と $(Y, d_Y)$ が完備のとき，$(X \times Y, d_{X\times Y})$ も完備であることを示せ．

(3) 空でない部分集合 $A, B \subset X$ に対して，

$$d_H(A, B) := \max\left\{\sup_{a\in A}\left(\inf_{b\in B} d(a, b)\right), \sup_{b\in B}\left(\inf_{a\in A} d(a, b)\right)\right\}$$

とする．このとき，$d_H(A, B) = 0$ ならば，$\mathrm{cl}(A) = \mathrm{cl}(B)$ であることを示せ．

(4) 函数 $d : [0, 2\pi) \times [0, 2\pi) \to [0, \infty)$ を $d(x, y) = \sin|(x - y)/2|$ により定める．$d$ が距離関数であることを示せ．

(5) 距離空間 $([0, 2\pi), d)$ は完備であることを示せ．