幾何解析における貼り合わせ技法

2020年10月 東大数理集中講義

松尾 信一郎
名古屋大学大学院多元数理科学研究科

この講義について

講義計画

1. 線型幾何解析での貼り合わせ技法：Riemann-Rochの定理
2. Green核の逐次近似による構成
3. 非線型幾何解析での貼り合わせ技法の頂点：Taubesノルム
4. 倉西写像：Floer-WeinsteinによるSchrodinger方程式の解の構成

オススメ文献

1. Arthur Jaffe and Clifford Henry Taubes, *Vortices and Monopoles*, Birkhauser, 1980.
2. Clifford Henry Taubes, *Metrics, Connections and Gluing Theorems*, AMS, 1996.
3. Thierry Aubin, *Some Nonlinear Problems in Riemannian Geometry*, Springer Monographs in Mathematics, 1998.
4. David Gilbarg and Neil S. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer Classics in Mathematics, 2001.

単位について

1. 講義中に出される課題を何題か解いて提出してください.
2. 締切は今年中でよいでしょうか.

Riemann-Rochの定理

1. 目標

目標

Riemann-Rochの定理を示すことで,

- Wittenの局所化の議論
- 近似解から真の解を作る議論の雛形

を学ぶ. つまり, 線型幾何解析での貼り合わせの技法を学ぶ.

定理 1.1（Riemann-Rochの定理（と調和積分論））

Σを種数gの閉Riemann面として, $L \to \Sigma$を正則直線束とする. このとき,

$$\mathrm{ind}_{\mathbb{C}}(\overline{\partial}_L) = \chi(\Sigma, L) = 1 - g + c_1(L)$$

が成り立つ.

以下, Riemann-Rochの定理を, 線型幾何解析での貼り合わせの技法によって,
実Cauchy-Riemann作用素に対して示す.

参考文献

- Taubesの*Counting pseudo-holomorphic submanifolds in dimension 4*の最後の章.
- 古田先生の「指数定理」の第4.2節.

2. 実Cauchy-Riemann作用素のRiemann-Rochの定理

実Cauchy-Riemann作用素

Σを種数gの閉Riemann面として，$E \to \Sigma$をHermite直線束とする．さらに，

$$F := \overline{\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}}(T\Sigma, E)$$

とする．$\Gamma(F) = \Omega^{0,1}(\Sigma, E)$である．

以後，例えば，Σ上のベクトル束Eの切断を$C^\infty(\Sigma; E)$とも書く．

定義 2.1（実Cauchy-Riemann作用素）

実線型写像

$$D\colon C^\infty(\Sigma; E) \to C^\infty(\Sigma; F)$$

が実Cauchy-Riemann作用素であるとは，任意の$f \in C^\infty(X; \mathbb{R})$と$u \in C^\infty(\Sigma; E)$に対して，Leibniz則

$$D(fu) = (\bar\partial f)u + f(Du)$$

が成り立つこと．

課題 2.1： 次を示せ．

1. ΣはRiemann面なので，実CR作用素Dが複素線型であって，任意の$f \in C^\infty(X; \mathbb{C})$に対してLeibniz則が成り立つならば，$E$は正則直線束である．
2. 逆に，正則直線束LのDolbeault作用素$\bar\partial_L$は，実CR作用素である．

実CR作用素の指数

$E \to \Sigma$をHermite直線束として，$F := \overline{\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}}(T\Sigma, E)$とする．$\Gamma(F) = \Omega^{0,1}(\Sigma, E)$である．

実CR作用素$D : C^\infty(\Sigma; E) \to C^\infty(\Sigma; F)$はLeibniz則$D(fu) = (\bar{\partial} f)u + f(Du)$を充たす．

定義 2.2 (実CR作用素の指数)

実CR作用素$D : C^\infty(\Sigma; E) \to C^\infty(\Sigma; F)$に対して，

$$\mathrm{ind}_{\mathbb{R}}(D) := \dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Ker}\, D - \dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Coker}\, D$$

と定め，Dの指数と呼ぶ．以後，$\mathrm{ind}_{\mathbb{R}}(D)$を$\mathrm{ind}(D)$とも書く．

今，Σは，コンパクトであり，境界はなかった．

命題 2.3

任意の実CR作用素$D : C^\infty(\Sigma; E) \to C^\infty(\Sigma; F)$に対して，$\mathrm{ind}(D) < \infty$である．

また，正則直線束のときは，次が成り立つ．

命題 2.4 (調和積分論)

$E = L$が正則直線束かつ$D = \bar{\partial}_L$がDolbeault作用素のとき,$\mathrm{ind}_{\mathbb{R}}(\bar{\partial}_L) = 2\chi(\Sigma, L)$である．

課題 2.2： これらを示せ．

実CR作用素に対するRiemann-Rochの定理

定理 2.5（実CR作用素に対するRiemann-Rochの定理）

Σを種数gの閉Riemann面として，$E \to \Sigma$をHermite直線束とする．$F := \overline{\mathrm{Hom}}_{\mathbb{C}}(T\Sigma, E)$とする．$E$から$F$への反複素線型束写像の空間を$\overline{\mathrm{Hom}}_{\mathbb{C}}(E, F)$とする．このとき，任意の実CR作用素$C^\infty(\Sigma, E) \to C^\infty(\Sigma, F)$に対して，

$$\mathrm{ind}(D) = c_1(\overline{\mathrm{Hom}}_{\mathbb{C}}(E, F))$$

が成り立つ．

- $E = L$が正則直線束かつ$D = \overline{\partial}_L$がDolbeault作用素のとき，$\mathrm{ind}_{\mathbb{R}}(\overline{\partial}_L) = 2\chi(\Sigma, L)$である．
- 次に右辺の$c_1(\overline{\mathrm{Hom}}_{\mathbb{C}}(E, F))$を計算してみよう．

$c_1(\overline{\mathrm{Hom}}_{\mathbb{C}}(E,F))$の計算

Σを種数gの閉Riemann面として，$E \to \Sigma$をHermite直線束とする．$F := \overline{\mathrm{Hom}}_{\mathbb{C}}(T\Sigma, E)$とする．
EからFへの反複素線型束写像の空間を$\overline{\mathrm{Hom}}_{\mathbb{C}}(E,F)$とする．

$$\boxed{\mathrm{ind}(D) = c_1(\overline{\mathrm{Hom}}_{\mathbb{C}}(E,F))}$$

右辺の$c_1(\overline{\mathrm{Hom}}_{\mathbb{C}}(E,F))$を計算したい．

- $\overline{\mathrm{Hom}}_{\mathbb{C}}(E,F) = \overline{\mathrm{Hom}}_{\mathbb{C}}(E,\mathbb{C}) \otimes F$であり，Hermite計量により$\overline{\mathrm{Hom}}_{\mathbb{C}}(E,\mathbb{C}) = E$なので，

  $$\overline{\mathrm{Hom}}_{\mathbb{C}}(E,F) = E \otimes F$$

  である．よって，

  $$c_1(\overline{\mathrm{Hom}}_{\mathbb{C}}(E,F)) = c_1(E) + c_1(F)$$

  である．
- $F = \overline{\mathrm{Hom}}_{\mathbb{C}}(T\Sigma, E)$についても，同様にして，

  $$c_1(F) = c_1(T\Sigma) + c_1(E)$$

  である．
- $c_1(T\Sigma) = \chi(\Sigma) = 2 - 2g$だった．

よって，

$$c_1(\overline{\mathrm{Hom}}_{\mathbb{C}}(E,F)) = 2 - 2g + 2c_1(E)$$

を得る．

今までのまとめ

$$\mathrm{ind}(D) = c_1(\overline{\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(E,F)})$$

今までに，

- $E = L$が正則直線束のとき，Dolbeault作用素$\overline{\partial}_L$は実CR作用素である．
- $E = L$が正則直線束かつ$D = \overline{\partial}_L$がDolbeault作用素のとき，$\mathrm{ind}_{\mathbb{R}}(\overline{\partial}_L) = 2\chi(\Sigma, L)$である．
- $c_1(\overline{\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(E,F)}) = 2 - 2g + 2c_1(E)$

がわかった．よって，次を得る．

系 2.6 (Riemann-Rochの定理)

Σを種数gの閉Riemann面として，$L \to \Sigma$を正則直線束とする．このとき，

$$\chi(\Sigma, L) = 1 - g + c_1(L)$$

が成り立つ．

以後，$\mathrm{ind}(D) = c_1(\overline{\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(E,F)})$を

Wittenの局所化の議論

により示す．そのために，まずは実CR作用素の反複素線型束写像による摂動を考えよう．

3. 実Cauchy-Riemann作用素の摂動

実CR作用素の摂動

$E \to \Sigma$をHermite直線束として，$F := \overline{\mathrm{Hom}}_{\mathbb{C}}(T\Sigma, E)$とする．$\Gamma(F) = \Omega^{0,1}(\Sigma, E)$である．

実CR作用素$D\colon C^\infty(\Sigma; E) \to C^\infty(\Sigma; F)$はLeibniz則$D(fu) = (\overline{\partial} f)u + f(Du)$を充たす．

EからFへの反複素線型束写像の空間を$\overline{\mathrm{Hom}}_{\mathbb{C}}(E, F)$とする．

命題 3.1

1. D_1とD_2が実CR作用素ならば，$(D_1 - D_2) \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(E, F)$である．
2. 逆に，Dが実CR作用素であり，$V \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(E, F)$ならば，$(D + V)$も実CR作用素である．
3. 任意の実CR作用素Dに対して，複素線型CR作用素D_0と束写像$A \in \overline{\mathrm{Hom}}_{\mathbb{C}}(E, F)$が存在して，$D = D_0 + A$を充たす．

今，Σは，コンパクトであり，境界はなかった．

命題 3.2

任意の実CR作用素Dと任意の$V \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(E, F)$に対して，

$$\mathrm{ind}(D) = \mathrm{ind}(D + V)$$

である．すなわち，実CR作用素の指数は実線型束写像による摂動で安定である．

課題 3.1： これらを示せ．

Wittenの局所化の議論の流れ

$E \to \Sigma$をHermite直線束として，$F := \overline{\mathrm{Hom}}_{\mathbb{C}}(T\Sigma, E)$とする．$\Gamma(F) = \Omega^{0,1}(\Sigma, E)$である．

実CR作用素$D \colon C^\infty(\Sigma; E) \to C^\infty(\Sigma; F)$はLeibniz則$D(fu) = (\bar{\partial} f)u + f(Du)$を充たす．

EからFへの反複素線型束写像の空間を$\overline{\mathrm{Hom}}_{\mathbb{C}}(E, F)$とする．

- Dが実CR作用素であり，$V \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(E, F)$ならば，$(D + V)$も実CR作用素である．
- さらに，Dが実CR作用素であり，$V \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(E, F)$ならば，$\mathrm{ind}(D) = \mathrm{ind}(D + V)$である．

$$\boxed{\mathrm{ind}(D) = c_1(\overline{\mathrm{Hom}}_{\mathbb{C}}(E, F))}$$

さて，

- $c_1(\overline{\mathrm{Hom}}_{\mathbb{C}}(E, F))$を計算するためには，零切断と横断的な$V \in \overline{\mathrm{Hom}}_{\mathbb{C}}(E, F)$に対して，$V$の零点の個数を符号付きで数え上げればよい．
- また，このとき，指数の安定性より，$\mathrm{ind}(D + V) = \mathrm{ind}(D)$である．

よって，$\mathrm{ind}(D) = c_1(\overline{\mathrm{Hom}}_{\mathbb{C}}(E, F))$を示すためには，

零切断と横断的な$V \in \overline{\mathrm{Hom}}_{\mathbb{C}}(E, F)$に対して，$V$の零点の符号付き個数と$\mathrm{ind}(D + V)$が等しいこと

を示せばよい．これがWittenの局所化の議論である．

まずは$\Sigma = \mathbb{T}^2$かつEが自明束$\underline{\mathbb{C}}$のときにどうなるかを見てみよう．

4. トーラスかつ自明束のとき

トーラスかつ自明束のときのRiemann-Rochの定理

$$\mathrm{ind}(D) = c_1(\overline{\mathrm{Hom}}_{\mathbb{C}}(E, F))$$

- $\Sigma = \mathbb{T}^2$とする．$T\Sigma = \underline{\mathbb{C}} := \Sigma \times \mathbb{C}$である．
- $E = \underline{\mathbb{C}}$とする．$F := \overline{\mathrm{Hom}}_{\mathbb{C}}(T\Sigma, E) = \underline{\mathbb{C}}$である．
- $\overline{\mathrm{Hom}}_{\mathbb{C}}(E, F) = \underline{\mathbb{C}}$である．
- このとき，Dolbeault作用素

$$D := \overline{\partial} = \frac{\partial}{\partial s} + i\frac{\partial}{\partial t} : C^\infty(\mathbb{T}^2; \mathbb{C}) \to C^\infty(\mathbb{T}^2; \mathbb{C})$$

は実CR作用素である．

課題 4.1： $\dim \mathrm{Ker}(D) = \dim \mathrm{Coker}(D) = 1$である．

よって，

$$\mathrm{ind}(D) = \dim \mathrm{Ker}(\overline{\partial}) - \dim \mathrm{Coker}(\overline{\partial}) = 1 - 1 = 0$$

である．また，

$$c_1(\overline{\mathrm{Hom}}_{\mathbb{C}}(E, F)) = c_1(\underline{\mathbb{C}}) = 0$$

である．よって，$\Sigma = \mathbb{T}^2$かつ$E = \underline{\mathbb{C}}$のとき，RRの定理は確かに成り立っている．

では，Wittenの局所化の議論により$0 = 0$を示してみよう．

$D = \overline{\partial}$の摂動

$$D := \overline{\partial} = \frac{\partial}{\partial s} + i\frac{\partial}{\partial t} : C^\infty(\mathbb{T}^2;\mathbb{C}) \to C^\infty(\mathbb{T}^2;\mathbb{C})$$

函数$\beta : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{C}$と実数$m > 0$に対して,新しい実CR作用素$D_m : C^\infty(\mathbb{T}^2;\mathbb{C}) \to C^\infty(\mathbb{T}^2;\mathbb{C})$を,

$$D_m u := Du + m\beta\overline{u} = \overline{\partial}u + m\beta\overline{u}$$

と定める.

課題 4.2： D_mが実CR作用素であることを確認せよ.

指数の安定性より，$\mathrm{ind}(D_m) = \mathrm{ind}(D)$であった.

適切なβとmを選ぶことにより，$\mathrm{ind}(D_m) = 0$を示したい．そのために必要なのがWeitzenbock公式である．さらにその準備として，形式的共役作用素について復習しておく.

D_mの形式的共役作用素

$$D := \overline{\partial} = \frac{\partial}{\partial s} + i\frac{\partial}{\partial t} : C^\infty(\mathbb{T}^2;\mathbb{C}) \to C^\infty(\mathbb{T}^2;\mathbb{C})$$

函数$\beta : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{C}$と実数$m > 0$に対して，

$$D_m u := Du + m\beta\overline{u} = \overline{\partial}u + m\beta\overline{u}$$

と定めた．

このとき，D_mの形式的共役作用素$D_m^* : C^\infty(\mathbb{T}^2;\mathbb{C}) \to C^\infty(\mathbb{T}^2;\mathbb{C})$は，

$$D_m^*\alpha = -\partial\alpha + m\beta\overline{\alpha}$$

である．特に，$m = 0$のとき，$D^* = -\partial$である．

すなわち，任意の$u, \alpha \in C^\infty(\mathbb{T}^2;\mathbb{C})$に対して，

$$\int_\Sigma (D_m u, \alpha)\, d\mu = \int_\Sigma (u, D_m^*\alpha)\, d\mu$$

が成り立つ．特に，任意の$u \in C^\infty(\mathbb{T}^2;\mathbb{C})$に対して，

$$\int_\Sigma |D_m u|^2\, d\mu = \int_\Sigma (D_m u, D_m u)\, d\mu = \int_\Sigma (D_m^* D_m u, u)\, d\mu$$

が成り立つ．また，$\dim \mathrm{Coker}\, D_m = \dim \mathrm{Ker}\, D_m^*$である．

課題 4.3： これらを示せ．

Dolbeault作用素に対するWeitzenbock公式

函数$\beta:\mathbb{T}^2\to\mathbb{C}$と実数$m>0$に対して，

$$D_m u := Du + m\beta\overline{u} = \overline{\partial}u + m\beta\overline{u}$$
$$D_m^*\alpha = -\partial\alpha + m\beta\overline{\alpha}$$

だった．

定理 4.1（Dolbeault作用素に対するWeitzenbock公式）

任意の$u\in C^\infty(\mathbb{T}^2;\mathbb{C})$に対して，

$$D_m^*D_m u = D^*Du + m^2|\beta|^2u - m(\partial\beta)\overline{u}$$

が成り立つ．

（証明）　計算すればよい．

$$\begin{aligned}
D_m^*D_m u &= D_m^*\left(\overline{\partial}u + m\beta\overline{u}\right)\\
&= -\partial\left(\overline{\partial}u + m\beta\overline{u}\right) + m\beta\left(\overline{\overline{\partial}u + m\beta\overline{u}}\right)\\
&= -\partial\left(\overline{\partial}u + m\beta\overline{u}\right) + m\beta\left(\partial\overline{u} + m\overline{\beta}u\right)\\
&= -\partial\overline{\partial}u + m^2|\beta|^2u + m\left(-\partial(\beta\overline{u}) + \beta(\partial\overline{u})\right)\\
&= -\partial\overline{\partial}u + m^2|\beta|^2u + m\left(-(\partial\beta)\overline{u} - \beta(\partial\overline{u}) + \beta(\partial\overline{u})\right)\\
&= D^*Du + m^2|\beta|^2u - m(\partial\beta)\overline{u}
\end{aligned}$$

Weitzenbock公式の系

$$D_m^* D_m u = D^* D u + m^2 |\beta|^2 u - m(\partial\beta)\overline{u}$$

系 4.2

任意の$u \in C^\infty(\mathbb{T}^2; \mathbb{C})$に対して，

$$\int_\Sigma |D_m u|^2 \, d\mu \geqslant m^2 \int_\Sigma |\beta|^2 |u|^2 \, d\mu - m \|\partial\beta\|_\infty \int_\Sigma |u|^2 \, d\mu$$

が成り立つ．

（証明） これも計算すればよい．

$$\begin{aligned}
\int_\Sigma |D_m u|^2 \, d\mu &= \int_\Sigma (u, D_m^* D_m u) \, d\mu \\
&= \int_\Sigma |Du|^2 \, d\mu + m^2 \int_\Sigma |\beta|^2 |u|^2 \, d\mu - m \int_\Sigma (\partial\beta) |u|^2 \, d\mu \\
&\geqslant m^2 \int_\Sigma |\beta|^2 |u|^2 \, d\mu - m \int_\Sigma (\partial\beta) |u|^2 \, d\mu \\
&\geqslant m^2 \int_\Sigma |\beta|^2 |u|^2 \, d\mu - m \|\partial\beta\|_\infty \int_\Sigma |u|^2 \, d\mu
\end{aligned}$$

ここまでは任意の摂動項$\beta : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{C}$について成り立つことだった．次に，特別な$\beta$を選ぼう．

特別な摂動項β

- $\Sigma = \mathbb{T}^2$かつ$T\Sigma = \underline{\mathbb{C}} := \Sigma \times \mathbb{C}$だった．
- $E = \underline{\mathbb{C}}$かつ$F := \overline{\mathrm{Hom}}_{\mathbb{C}}(T\Sigma, E) = \underline{\mathbb{C}}$だった．
- $\overline{\mathrm{Hom}}_{\mathbb{C}}(E, F) = \underline{\mathbb{C}}$だった．
- 函数$\beta : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{C}$と実数$m > 0$に対して，

$$D_m u := Du + m\beta\overline{u} = \overline{\partial}u + m\beta\overline{u}$$
$$D_m^* \alpha = -\overline{\partial}\alpha + m\beta\alpha$$

だった．

以後，摂動項$\beta : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{C}$は零点がないと仮定する．

ここに，$\Sigma = \mathbb{T}^2$かつ$E = \underline{\mathbb{C}}$という仮定を使っている！

すなわち，零点がないβは，$\overline{\mathrm{Hom}}_{\mathbb{C}}(E, F) = \underline{\mathbb{C}}$の切断であって，零切断と横断的なものを定める．

さて，βに零点がなく，Σはコンパクトなので，$C > 0$が存在して，任意の$x \in \Sigma$に対して，

$$|\beta(x)| \geqslant C$$

を充たす．

Weitzenbock公式と特別な摂動項β

$$\int_\Sigma |D_m u|^2 \, d\mu \geqslant m^2 \int_\Sigma |\beta|^2 |u|^2 \, d\mu - m \|\partial\beta\|_\infty \int_\Sigma |u|^2 \, d\mu$$
$$|\beta|^2 \geqslant C^2$$

系 4.3

任意の$u \in C^\infty(\mathbb{T}^2; \mathbb{C})$に対して,

$$\int_\Sigma |D_m u|^2 \, d\mu \geqslant m(mC^2 - \|\partial\beta\|_\infty) \int_\Sigma |u|^2 \, d\mu$$

が成り立つ.

(証明)

$$\begin{aligned}
\int_\Sigma |D_m u|^2 \, d\mu &\geqslant m^2 \int_\Sigma |\beta|^2 |u|^2 \, d\mu - m \|\partial\beta\|_\infty \int_\Sigma |u|^2 \, d\mu \\
&\geqslant m^2 C^2 \int_\Sigma |u|^2 \, d\mu - m \|\partial\beta\|_\infty \int_\Sigma |u|^2 \, d\mu \\
&= m(mC^2 - \|\partial\beta\|_\infty) \int_\Sigma |u|^2 \, d\mu
\end{aligned}$$

Wittenの局所化

$$|\beta|^2 \geqslant C^2$$
$$\int_\Sigma |D_m u|^2 \, d\mu \geqslant m(mC^2 - \|\partial\beta\|_\infty) \int_\Sigma |u|^2 \, d\mu$$

定理 4.4 (Wittenの局所化)

定数$m_0 > 0$が存在して，任意の$m \geqslant m_0$に対して，$\mathrm{Ker}\, D_m = \{0\}$である．

（証明） mは，$mC^2 - \|\partial\beta\|_\infty \geqslant 1/2$を充たすくらい大きいとせよ．

$D_m u = 0$とする．このとき，Weitzenbock公式とβの零点の仮定から得られる不等式より，

$$\begin{aligned} 0 = \int_\Sigma |D_m u|^2 \, d\mu &\geqslant m(mC^2 - \|\partial\beta\|_\infty) \int_\Sigma |u|^2 \\ &\geqslant m \cdot \frac{1}{2} \cdot \int_\Sigma |u|^2 \geqslant 0 \end{aligned}$$

が成り立つ．よって，$u = 0$である．

課題 4.4： 同様の議論により，$m \gg 0$に対して$\mathrm{Ker}\, D_m^* = \{0\}$を示せ．

従って，$m \gg 0$のとき，$\mathrm{Ker}\, D_m = \{0\}$かつ$\mathrm{Coker}\, D_m = \{0\}$がわかった．すなわち，$m \gg 0$のとき，$D_m$は可逆であり，$\mathrm{ind}(D_m) = 0$よりも強いことが示されている．

$\Sigma = \mathbb{T}^2$かつ$E = \underline{\mathbb{C}}$のときのRiemann-Rochの定理

Weitzenbock公式

$$\int_\Sigma |D_m u|^2 \, d\mu \geqslant m^2 \int_\Sigma |\beta|^2 |u|^2 \, d\mu - m \|\partial \beta\|_\infty \int_\Sigma |u|^2 \, d\mu$$

に対して，$\overline{\mathrm{Hom}}_{\mathbb{C}}(E, F) = \underline{\mathbb{C}}$の零切断に横断的な摂動項$\beta$が充たす不等式

$$|\beta|^2 \geqslant C^2$$

を組み合わせることで，不等式

$$\int_\Sigma |D_m u|^2 \, d\mu \geqslant m(mC^2 - \|\partial \beta\|_\infty) \int_\Sigma |u|^2 \, d\mu$$

を得た．その結果として，

$m \gg 0$のとき，$\mathrm{Ker}\, D_m = \{0\}$かつ$\mathrm{Coker}\, D_m = \{0\}$

がわかった．これまでをまとめて，

定理 4.5 ($\Sigma = \mathbb{T}^2$かつ$E = \underline{\mathbb{C}}$のときのRiemann-Rochの定理)

$$\mathrm{ind}(\overline{\partial}) = \mathrm{ind}(D_m) = 0$$

を得る．確かに$0 = 0$であった．

Weitzenbock公式とClifford代数の実表現

Weitzenbock公式

$$D_m^* D_m u = D^* D u + m^2 |\beta|^2 u - m(\partial\beta)\overline{u}$$

の証明を反省するに，摂動

$$u \mapsto m\beta\overline{u}$$

が反複素線型写像であることは，$\partial\overline{u}$の項が打ち消し合うために本質的に必要であった．

$$\begin{aligned}
D_m^* D_m u &= D_m^*\left(\overline{\partial} u + m\beta\overline{u}\right) \\
&= -\partial\left(\overline{\partial} u + m\beta\overline{u}\right) + m\beta\left(\overline{\overline{\partial} u + m\beta\overline{u}}\right) \\
&= -\partial\left(\overline{\partial} u + m\beta\overline{u}\right) + m\beta\left(\partial\overline{u} + m\overline{\beta}u\right) \\
&= -\partial\overline{\partial} u + m^2|\beta|^2 u + m\left(-\partial(\beta\overline{u}) + \beta(\partial\overline{u})\right) \\
&= -\partial\overline{\partial} u + m^2|\beta|^2 u + m\left(-(\partial\beta)\overline{u} - \beta(\partial\overline{u}) + \beta(\partial\overline{u})\right) \\
&= D^* D u + m^2|\beta|^2 u - m(\partial\beta)\overline{u}
\end{aligned}$$

その背景には，Clifford代数$\mathrm{Cl}(\mathbb{R}^2)$の実表現がある．すなわち，$C : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$を複素共役写像とするとき，

$$\left\{\begin{pmatrix} 0 & -x+iy \\ x+iy & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \beta C \\ \beta C & 0 \end{pmatrix}\right\} = 0$$

が成り立つ．詳しくは，古田先生の教科書の補題4.19とその周辺を見よ．

5. 一般のとき

設定の復習

- Σを種数gの閉Riemann面として，$E \to \Sigma$をHermite直線束とする．$F := \overline{\mathrm{Hom}}_{\mathbb{C}}(T\Sigma, E)$とする．$E$から$F$への反複素線型束写像の空間を$\overline{\mathrm{Hom}}_{\mathbb{C}}(E, F)$とする．
- 実CR作用素$D\colon C^\infty(\Sigma; E) \to C^\infty(\Sigma; F)$はLeibniz則$D(fu) = (\bar{\partial} f)u + f(Du)$を充たす．
- このとき，任意の実CR作用素$D\colon C^\infty(\Sigma, E) \to C^\infty(\Sigma, F)$に対して，

$$\mathrm{ind}(D) = c_1(\overline{\mathrm{Hom}}_{\mathbb{C}}(E, F))$$

を示したい．

$D\colon C^\infty(\Sigma, E) \to C^\infty(\Sigma, F)$を実CR作用素とする．$\beta \in C^\infty(\Sigma; \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\overline{E}, F))$とする．

このとき，任意の$m > 0$に対して，新しい実CR作用素$D_m\colon C^\infty(\Sigma; E) \to C^\infty(\Sigma; F)$を，

$$D_m u := Du + m\beta(\overline{u})$$

と定める．

さて，$\mathrm{ind}(D_m) = \mathrm{ind}(D)$であった．零切断と横断的に交わる$\beta$に対して，$m \gg 0$のとき，

$\mathrm{ind}(D_m)$とβの零点の符号付き個数が等しいこと

を示したい．

まずは任意のβについて成り立つWeitzenbock公式を調べておこう．

Weitzenbock公式

$D: C^\infty(\Sigma, E) \to C^\infty(\Sigma, F)$を実CR作用素とする.

任意の$\beta \in C^\infty(\Sigma; \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\overline{E}, F))$と$m > 0$に対して，$D_m u := Du + m\beta(\overline{u})$とした.

定理 5.1（積分型のWeitzenbock公式）

$\beta \in C^\infty(\Sigma; \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\overline{E}, F))$かつ$m > 0$とする．任意の$u \in C^\infty(\Sigma; E)$に対して，

$$\int_\Sigma |D_m u|^2 \, d\mu = \int_\Sigma |Du|^2 \, d\mu + m^2 \int_\Sigma |\beta(u)|^2 \, d\mu - m \int_\Sigma (u, (\partial\beta)(\overline{u})) \, d\mu$$

が成り立つ.

系 5.2

$$\int_\Sigma |D_m u|^2 \, d\mu \geqslant m^2 \int_\Sigma |\beta(u)|^2 \, d\mu - m\|\partial\beta\|_\infty \int_\Sigma |u|^2 \, d\mu$$

Weitzenbock公式を示すときに，$\mathrm{rank}_{\mathbb{C}}(E) = 1$のときの特殊事情

$$\overline{\beta^\dagger} = \beta$$

が使われる.

課題 5.1： これらを示せ.また,高階ベクトル束でのWeitzenbock公式の障碍を考察せよ.

次に，零切断と横断的な摂動項βを考えよう.

零切断と横断的な摂動項β

$D: C^\infty(\Sigma; E) \to C^\infty(\Sigma; F)$を実CR作用素とする．$\beta \in \overline{\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}}(\overline{E}, F)$とする．

$\Sigma = \mathbb{T}^2$かつ$E = \underline{\mathbb{C}}$のとき，$\overline{\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}}(\overline{E}, F)$も自明なので，$\beta$には零点がないと仮定できた．

一般のとき，βには零点があるかもしれないが，次のように仮定することはできる．

βの各零点$p \in \Sigma$に対して，pを中心とするΣの局所座標系

$$\Sigma \supset U_p \longrightarrow \mathbb{D} := \{|z| < 1\} \subset \mathbb{C}$$

とU_pでのEの自明化が存在して，

Σの複素構造	$\longleftrightarrow$	$i = \sqrt{-1}$倍
$d\mu$	$\longleftrightarrow$	Lebesgue測度$ds\,dt$
D	$\longleftrightarrow$	$\overline{\partial} = \partial_s + i\partial_t$
β	$\longleftrightarrow$	z倍か$\overline{z}$倍

と仮定する．さらに，$p \neq q$のとき，$U_p \cap U_q = \emptyset$と仮定する．以後，これらを固定する．

課題 5.2： このようなDとβと局所座標と自明化の存在を示せ．

さて，Σはコンパクトなので，$C > 0$が存在して，任意の$x \in \Sigma \setminus (\cup U_p)$に対して，

$$|\beta(x)| \geqslant C$$

を充たす．

エネルギーの局在化についての予備的考察

$$\int_\Sigma |D_m u|^2 \, d\mu \geqslant m^2 \int_\Sigma |\beta(u)|^2 \, d\mu - m \|\partial\beta\|_\infty \int_\Sigma |u|^2 \, d\mu$$

$$\beta \quad \longleftrightarrow \quad z\text{倍か}\bar{z}\text{倍 on } U_p$$

$$|\beta|^2 \geqslant C^2 \text{ on } \Sigma \setminus (\cup U_p)$$

このとき,

$$\begin{aligned}
\int_\Sigma |D_m u|^2 \, d\mu &\geqslant m^2 \int_\Sigma |\beta(u)|^2 \, d\mu - m \|\partial\beta\|_\infty \int_\Sigma |u|^2 \, d\mu \\
&\geqslant m^2 \int_{\Sigma \setminus \cup U_p} |\beta(u)|^2 \, d\mu - m \|\partial\beta\|_\infty \int_\Sigma |u|^2 \, d\mu \\
&\geqslant m^2 C^2 \int_{\Sigma \setminus \cup U_p} |u|^2 \, d\mu - m \|\partial\beta\|_\infty \int_\Sigma |u|^2 \, d\mu
\end{aligned}$$

より, $D_m u = 0$ ならば,

$$\int_{\Sigma \setminus \cup U_p} |u|^2 \, d\mu \leqslant \frac{\|\partial\beta\|_\infty}{mC^2} \int_\Sigma |u|^2 \, d\mu$$

が成り立つ. すなわち, $m \gg 0$ のとき, $\operatorname{Ker} D_m$ の元は β の零点の近くに局在化している.

次に, この考察をさらに精密にしよう.

バブル解析の第一歩：βの零点の周りでのスケール変換

$$\Sigma \supset U_p \longrightarrow \mathbb{D} := \{|z| < 1\} \subset \mathbb{C}$$

$$(Du + m\beta u) \quad \longleftrightarrow \quad (\overline{\partial} u + mz \cdot \overline{u}) \text{ or } (\overline{\partial} u + m\overline{z} \cdot \overline{u}) \text{ on } U_p$$

$Z_+(\beta)$をz倍に対応するβの零点の集合として，$Z_-(\beta)$を$\overline{z}$倍に対応するβの零点の集合とする．さらに，$Z(\beta) = Z_+(\beta) \sqcup Z_-(\beta)$を$\beta$の零点の集合とする．

$r > 0$に対して，$\mathbb{D}(\sqrt{r}) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < \sqrt{r}\}$とする．

$p \in Z(\beta)$かつ$m > 0$とする．任意の$u \in C^\infty(\Sigma; E)$に対して，函数$u_{(p,m)} \colon \mathbb{D}(\sqrt{r}) \to \mathbb{C}$を，

$$u_{(p,m)}(z) := \frac{1}{\sqrt{m}} u\left(\frac{z}{\sqrt{m}}\right)$$

により定める．

特に，$D_m u = 0$ならば，$p \in Z_+(\beta)$か$p \in Z_-(\beta)$に従い，$\mathbb{D}(\sqrt{m})$上で

$$\overline{\partial} u_{(p,m)} + z \cdot \overline{u_{(p,m)}} = 0 \quad \text{か} \quad \overline{\partial} u_{(p,m)} + \overline{z} \cdot \overline{u_{(p,m)}} = 0$$

のどちらかを充たす．

課題 5.3： これを示せ．

バブルの抽出

$$(Du + m\beta u) \quad \longleftrightarrow \quad (\overline{\partial} u + mz \cdot \overline{u}) \text{ or } (\overline{\partial} u + m\overline{z} \cdot \overline{u}) \text{ on } U_p$$

$$u_{(p,m)}(z) := u\big(z/\sqrt{m}\big)/\sqrt{m}$$

$$\overline{\partial} u_{(p,m)} + z \cdot \overline{u_{(p,m)}} = 0 \quad \text{か} \quad \overline{\partial} u_{(p,m)} + \overline{z} \cdot \overline{u_{(p,m)}} = 0$$

定理 5.3

任意の発散する実数列$m_j \to \infty$と切断の列$u_j \in \Gamma(E)$に対して，$D_{m_j} u_j = 0$かつ$\|u_j\|_2 = 1$ならば, 部分列を取ることにより, 任意の零点$p \in Z(\beta)$に対して, 滑らかな函数$u_p \in C^\infty(\mathbb{C};\mathbb{C})$が存在して,

- スケール変換$(u_j)_{(p,m_j)} : \mathbb{D}(\sqrt{m}) \to \mathbb{C}$は，$u_p : \mathbb{C} \to C$に，$C^\infty_{\mathrm{loc}}$収束する.
- $p \in Z_+(\beta)$か$p \in Z_-(\beta)$に従い,

  $$\overline{\partial} u_p + z \cdot \overline{u_p} = 0 \quad \text{か} \quad \overline{\partial} u_p + \overline{z} \cdot \overline{u_p} = 0$$

  のどちらかを充たす.
- $\displaystyle\sum_{p \in Z(\beta)} \int_{\mathbb{C}} |u_p|^2 \, ds\,dt = 1$

課題 5.4： 不等式$\displaystyle\int_{\Sigma \setminus \cup U_p} |u|^2 \, d\mu \leqslant \frac{\|\partial\beta\|_\infty}{mC^2} \int_\Sigma |u|^2 \, d\mu$を用いて，この定理を示せ.

バブルについて

$$\overline{\partial} u_p + z \cdot \overline{u_p} = 0 \quad \text{か} \quad \overline{\partial} u_p + \overline{z} \cdot \overline{u_p} = 0$$

定理 5.4

滑らかな函数$u\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$が,

$$\overline{\partial} u + \overline{z} \cdot \overline{u} = 0 \text{ かつ } \int_{\mathbb{C}} |u|^2 \, ds\,dt < \infty$$

を充たすならば, $u \equiv 0$である.

(証明) 一般に, $\Delta |u|^2 = 2\,\mathrm{Re}\langle u, \Delta u\rangle - 2|\nabla u|$である. また, $\overline{\partial} u + \overline{z} \cdot \overline{u} = 0$によって,

$$\Delta u = -\partial \overline{\partial} u = -\partial\left(-\overline{z} \cdot \overline{u}\right) = \overline{z}(\partial \overline{u}) = \overline{z} \cdot \overline{\overline{\partial} u} = \overline{z} \cdot \overline{-\overline{z} \cdot \overline{u}} = -|z|^2 u$$

である. よって,

$$\Delta |u|^2 = 2\,\mathrm{Re}\langle u, \Delta u\rangle - 2|\nabla u| = 2\,\mathrm{Re}\langle u, -|z|^2 u\rangle - 2|\nabla u| = -2|z|^2|u|^2 - 2|\nabla u|^2$$

を得る. 特に, $\Delta |u|^2 \leqslant 0$である. 従って, 平均値の定理と仮定より, 任意の$x \in \mathbb{C}$に対して,

$$|u(x)|^2 \leqslant \frac{1}{\pi r^2} \int_{|z-x|<r} |u(z)|^2 \, ds\,dt \leqslant \frac{1}{\pi r^2} \int_{\mathbb{C}} |u|^2 \, ds\,dt \xrightarrow{r \to \infty} 0$$

が成り立つ.

バブルについて

$$\bar{\partial} u_p + z \cdot \overline{u_p} = 0 \quad \text{か} \quad \bar{\partial} u_p + \bar{z} \cdot \overline{u_p} = 0$$

定理 5.5

滑らかな函数$u \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$が,

$$\bar{\partial} u + z \cdot \bar{u} = 0 \text{ かつ } \int_{\mathbb{C}} |u|^2 \, ds dt < \infty$$

を充たすならば，実数$k \in \mathbb{R}$が存在して，$u = k e^{-|z|^2/2}$である．

(証明)　まずはuが実数値であることを示す．$\bar{\partial} u + z \cdot \bar{u} = 0$によって,

$$\Delta u = -\partial \bar{\partial} u = -|z|^2 u + 2\bar{u}$$

である．従って，$f := \operatorname{Im} u \colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}$は,

$$\Delta f = -(|z|^2 + 2) f \text{ かつ } \int_{\mathbb{C}} |f|^2 \, ds dt < \infty$$

を充たす．よって,

$$\Delta f^2 = 2\langle f, \Delta f \rangle - 2|\nabla f|^2 \leqslant 0$$

である．

従って，平均値の定理より，$f = \operatorname{Im} u \equiv 0$を得る．

さて，$u_0(z) := e^{-|z|^2/2} \colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}$は解である．そこで，$v(z) := u(z)/u_0(z)$とすれば,

$$\bar{\partial} v = \bar{\partial}(u(z) e^{|z|^2/2}) = 0$$

を得る．従って，vは，実数値整函数なので，定数である．

バブルについて

$$\bar{\partial} u_p + z \cdot \overline{u_p} = 0 \quad \text{か} \quad \bar{\partial} u_p + \bar{z} \cdot \overline{u_p} = 0$$

滑らかな函数$u\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$が,

$$\bar{\partial} u + \bar{z} \cdot \bar{u} = 0 \text{ かつ } \int_{\mathbb{C}} |u|^2 \, ds dt < \infty$$

を充たすならば，$u \equiv 0$である.

滑らかな函数$u\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$が,

$$\bar{\partial} u + z \cdot \bar{u} = 0 \text{ かつ } \int_{\mathbb{C}} |u|^2 \, ds dt < \infty$$

を充たすならば，実数$k \in \mathbb{R}$が存在して，$u = ke^{-|z|^2/2}$である.

Wittenの局所化

定理 5.6

定数$m_0 > 0$が存在して，任意の$m \geqslant m_0$に対して，$\dim \mathrm{Ker} D_m \leqslant \# Z_+(\beta)$である．

証明は背理法による．今までに示した次の定理を用いる．

任意の$m_j \to \infty$と$u_j \in \Gamma(E)$に対して，$D_{m_j} u_j = 0$かつ$\|u_j\|_2 = 1$ならば，部分列を取ることにより，任意の$p \in Z(\beta)$に対して，$u_p \in C^\infty(\mathbb{C};\mathbb{C})$が存在して，

- スケール変換

$$(u_j)_{(p,m_j)} : \mathbb{D}(\sqrt{m}) \to \mathbb{C}$$

は，$u_p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$に，$C^\infty_{\mathrm{loc}}$収束する．

- $p \in Z_+(\beta)$か$p \in Z_-(\beta)$に従い，

$$\bar{\partial} u_p + z \cdot \overline{u_p} = 0 \quad か \quad \bar{\partial} u_p + \bar{z} \cdot \overline{u_p} = 0$$

- $$\sum_{p \in Z(\beta)} \int_{\mathbb{C}} |u_p|^2 \, ds\, dt = 1$$

滑らかな函数$u : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$が，

$$\bar{\partial} u + \bar{z} \cdot \overline{u} = 0 \text{ かつ } \int_{\mathbb{C}} |u|^2 \, ds\, dt < \infty$$

を充たすならば，$u \equiv 0$である．

滑らかな函数$u : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$が，

$$\bar{\partial} u + z \cdot \overline{u} = 0 \text{ かつ } \int_{\mathbb{C}} |u|^2 \, ds\, dt < \infty$$

を充たすならば，実数$k \in \mathbb{R}$が存在して，$u = k e^{-|z|^2/2}$である．

Wittenの局所化

定数$m_0 > 0$が存在して，任意の$m \geqslant m_0$に対して，$\dim \operatorname{Ker} D_m \leqslant \# Z_+(\beta)$である．

（証明）　背理法による．$N := \# Z_+(\beta) + 1$とする．

発散する列$m_j \to \infty$と切断の列の組$\{u_{j,1}, \ldots, u_{j,N}\}$が存在して，

- 各$j = 1, 2, 3, \ldots$と各$k = 1, \ldots, N$に対して，$D_{m_j} u_{j,k} = 0$かつ$\|u_{j,k}\|_2 = 1$であり，
- 各$j = 1, 2, 3, \ldots$に対して，$\{u_{j,1}, \ldots, u_{j,N}\}$は一次独立である

と仮定する．このとき，スケール変換を考えることにより，各点$p \in Z(\beta)$に対して，$\mathbb{C}$上の函数の組$\{u_{p,1}, \ldots, u_{p,N}\}$が存在して，

- $p \in Z_+(\beta)$か$p \in Z_-(\beta)$に従い，$\bar{\partial} u_p + z \cdot \overline{u_p} = 0$か$\bar{\partial} u_p + \bar{z} \cdot \overline{u_p} = 0$を充たし，
- 各$k = 1, \ldots, N$に対して，$\displaystyle\sum_{p \in Z(\beta)} \|u_{p,k}\|_2 = 1$であって，さらに，
- $k \neq \ell$のとき，$\displaystyle\sum_{p \in Z(\beta)} \langle u_{p,k}, u_{p,\ell} \rangle = 0$もわかる．

従って，$\{u_{p,1}, \ldots, u_{p,N}\}$は，$\left(L^2(\mathbb{C}; \mathbb{C})\right)^{\# Z(\beta)}$の中の$N$次元部分空間を定める．

しかし，$p \in Z_-(\beta)$のとき，任意の$k = 1, \ldots, N$に対して，$u_{p,k} \equiv 0$である．これは矛盾．

課題 5.5：エネルギーの局所化を用いて$\{u_{j,1}, \ldots, u_{j,N}\}$が一次独立であることを示せ．

線型貼り合わせ

定数$m_0 > 0$が存在して，任意の$m \geqslant m_0$に対して，$\dim \operatorname{Ker} D_m \leqslant \# Z_+(\beta)$である．

次は，$\dim \operatorname{Ker} D_m \geqslant \# Z_+(\beta)$を示したい．すなわち，$\operatorname{Ker} D_m$の元をたくさん作らねばならない．そのために使われるのが，

Taubesの貼り合わせ技法（の線型版）

である．

今までにやったことは，

1. $D_{m_j} u_j = 0$というΣ上の解の列
2. スケール変換
3. $\mathbb{C}$上の極限函数（バブル）の抽出

ということ．

Taubesの貼り合わせ技法では，逆に，$\mathbb{C}$上のバブルからΣ上の解を構成する．このとき，バブルが局在化しているということが大切である．

1. $\mathbb{C}$上のバブル
2. Σ上の近似解の構成
3. 真の解への摂動

近似解の構成

まずは，$\mathbb{C}$上の解をΣに移植して近似解を構成する．βの零点の周りの座標系$\{U_p\}$は固定されている．

$$\Sigma \supset U_p \longrightarrow \mathbb{D} := \{|z| < 1\} \subset \mathbb{C}$$
$$(Du + m\beta u) \quad \longleftrightarrow \quad (\bar{\partial} u + mz \cdot \overline{u}) \text{ or } (\bar{\partial} u + m\bar{z} \cdot \overline{u}) \text{ on } U_p$$
$$u_{(p,m)}(z) := u\big(z/\sqrt{m}\big)/\sqrt{m}$$

滑らかなカットオフ函数$\gamma : \mathbb{D} \to [0, 1]$であって，

$$\gamma|_{\mathbb{D}(1/2)} \equiv 1 \quad \text{かつ} \quad \gamma|_{\mathbb{D}\setminus\mathbb{D}(3/4)} \equiv 0$$

を充たすものをとる．

$m > 0$とする．

各零点$p \in Z_+(\beta)$を考えるとき，座標近傍$U_p \subset \Sigma$と$\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$の同一視の下で，任意のパラメータ$k_p \in \mathbb{R}$に対して，

$$\gamma(z)\big(k_p \cdot \sqrt{m} e^{-m|z|^2/2}\big)$$

は，Σ上のEの切断を定める．従って，近似解写像

$$\Phi_m : \mathbb{R}^{\# Z_+(\beta)} \to C^\infty(\Sigma; E)$$

が構成された．

近似解の性質1

$$\gamma|_{\mathbb{D}(1/2)} \equiv 1 \quad \text{かつ} \quad \gamma|_{\mathbb{D}\setminus\mathbb{D}(3/4)} \equiv 0$$

$$\gamma(z)\left(k_p \cdot \sqrt{m}e^{-m|z|^2/2}\right)$$

$$\Phi_m : \mathbb{R}^{\# Z_+(\beta)} \to C^\infty(\Sigma; E)$$

命題 5.7

$$\|\Phi_m(\{k_p\})\|_2^2 \xrightarrow{m\to\infty} \pi \sum_{p\in Z_+(\beta)} k_p^2$$

（証明）

$$\begin{aligned}
\|\Phi_m(\{k_p\})\|^2 &= \int_\Sigma |\Phi_m(\{k_p\})|^2 \, d\mu \\
&= \sum_{p\in Z_+(\beta)} \int_{U_p} \gamma(z)^2 \left(k_p \cdot \sqrt{m}e^{-m|z|^2/2}\right)^2 d\mu \\
&= \sum_{p\in Z_+(\beta)} k_p^2 \int_{\mathbb{D}(\sqrt{m})} \gamma\left(z/\sqrt{m}\right)^2 e^{|z|^2} \, ds\,dt \\
&\xrightarrow{m\to\infty} \sum_{p\in Z_+(\beta)} k_p^2 \cdot \pi
\end{aligned}$$

すなわち，$m \gg 0$のとき，Φ_mは単射である．

近似解の性質2

$$\gamma|_{\mathbb{D}(1/2)} \equiv 1 \quad \text{かつ} \quad \gamma|_{\mathbb{D}\setminus\mathbb{D}(3/4)} \equiv 0$$

$$\gamma(z)\left(k_p \cdot \sqrt{m}e^{-m|z|^2/2}\right)$$

$m \gg 0$のとき，$\Phi_m(\{k_p\})$はほぼ解である．

命題 5.8

定数$C > 0$が存在して，任意の$m > 0$に対して，

$$\left\|D_m\left(\Phi_m(\{k_p\})\right)\right\|_2^2 \leqslant C^2 m e^{-m/4} \sum k_p^2$$

が成り立つ．

（証明） カットオフγに由来する誤差を評価する．
各U_pでは$D_m u = \bar{\partial}u + mzu$なので，

$$D_m\left(\Phi_m(\{k_p\})\right) = (\bar{\partial}\gamma(z))k_p\sqrt{m}e^{-m|z|^2/2}$$

である．γは$\mathbb{D}(1/2)$上では定数なので，次の不等式がわかる．

$$\begin{aligned}
&\left\|D_m\left(\Phi_m(\{k_p\})\right)\right\|_2^2 \\
&= \sum \int_{\mathbb{D}\setminus\mathbb{D}(1/2)} \left|(\bar{\partial}\gamma(z))\right|^2 k_p^2 m e^{-m|z|^2}\, ds\,dt \\
&\leqslant m e^{-m/4} \int_{\mathbb{D}\setminus\mathbb{D}(1/2)} \left|(\bar{\partial}\gamma(z))\right|^2 ds\,dt \cdot \sum k_p^2
\end{aligned}$$

近似解から真の解へ

$$\|\Phi_m(\{k_p\})\|_2^2 \xrightarrow{m\to\infty} \pi \sum_{p\in Z_+(\beta)} k_p^2$$

$$\left\| D_m\left(\Phi_m(\{k_p\})\right)\right\|_2^2 \leqslant C^2 m e^{-m/4} \sum k_p^2$$

近似解から真の解を構成するために，$D_m\colon C^\infty(\Sigma; E) \to C^\infty(\Sigma; F)$の右逆

$$Q_m\colon \mathrm{Im}(D_m) \to \left(\mathrm{Ker}(D_m)\right)^\perp$$

を考えよう．$D_m(Q_m \alpha) = \alpha$であり，例えば$Q_m := D_m^*\left(D_m D_m^*\right)^{-1}$とすればよい．

さて，任意の$\{k_p\}$に対して，$u := \Phi_m((\{k_p\}))$とするとき，

$$D_m\left(u - Q_m(D_m u)\right) = D_m u - D_m\left(Q_m(D_m u)\right) = 0$$

であって，$u - Q_m(D_m u)$は真の解である．

注意 5.9： 非線型偏微分方程式を考えるときには，このステップでは陰関数定理を定量的に使うことになり，ASD方程式では例えばTaubesノルムが導入される．

ただし，$u - Q_m(D_m u) = 0$かもしれない．

ところで，$\pi \sum k_p^2 = 1$のとき，$\|u\|_2^2 \approx 1$かつ$\|D_m u\|_2^2 \ll 1$であった．従って，$u - Q_m(D_m u) \neq 0$を保証するためには，Q_mの作用素ノルムを評価すればよい．

右逆Q_mの評価

$$Q_m\colon \mathrm{Im}(D_m) \to \left(\mathrm{Ker}(D_m)\right)^{\perp}$$

定理 5.10

定数$C > 0$とm_2が存在して，任意の$m \geqslant m_2$について，任意の$\alpha \in \mathrm{Im}(D_m)$に対して，

$$\|Q_m\alpha\|_2^2 \leqslant C^2\|\alpha\|_2^2$$

が成り立つ.

$u = Q_m\alpha$のとき，$D_m u = D_m(Q_m\alpha) = \alpha$なので，任意の$u \in \left(\mathrm{Ker}(D_m)\right)^{\perp}$に対して，

$$\|u\|_2^2 \leqslant C^2\|D_m u\|_2^2$$

を示せばよい.

証明は背理法による．発散する列$m_j \to \infty$と$u_j \in C^{\infty}(\Sigma; E)$が存在して，

$$\|u_j\|_2^2 = 1 \quad かつ \quad \|D_{m_j}u_j\|_2^2 \to 0$$

と仮定する.（続きは非線型方程式のときにやる.）

課題 5.6： 自分で詳細を補ってみよ.

真の解の構成

写像$\mathrm{sol}\colon \mathbb{R}^{\#Z_+(\beta)} \to \mathrm{Ker}\, D_m$を，

$$\{k_p\} \mapsto \Phi_m(\{k_p\}) - Q_m\big(D_m(\Phi_m(\{k_p\}))\big)$$

と定める．

定理 5.11

定数$m3 > 0$が存在して，任意の$m \geqslant m_3$に対して，solは単射である．特に，$\#Z_+(\beta) \leqslant \dim \mathrm{Ker}\, D_m$である．

（証明） 背理法による．発散する列$m_j \to \infty$と列$\{k_{p,j}\}$が存在して，

$$\pi \sum_{p \in Z_+(\beta)} k_p^2 = 1 \quad \text{かつ} \quad \|\mathrm{sol}(\{k_p\})\|_2^2 \to 0$$

と仮定する．ところが，

- $\|\Phi_m(\{k_p\})\|_2^2 \xrightarrow{m\to\infty} \pi \sum_{p \in Z_+(\beta)} k_p^2$
- $\Big\| D_m(\Phi_m(\{k_p\})) \Big\|_2^2 \leqslant C^2 m e^{-m/4} \sum k_p^2$
- $\exists C > 0 \quad \exists m_2 > 0 \quad \forall m \geqslant m_2 \quad \|Q_m \alpha\|_2^2 \leqslant C^2 \|\alpha\|_2^2$

だった．これは矛盾．

ここまでのまとめ

まずは，Wittenの局所化の議論によって，

定数$m_0 > 0$が存在して，任意の$m \geqslant m_0$に対して，$\dim \operatorname{Ker} D_m \leqslant \# Z_+(\beta)$である．

を示した．

次に，Taubesの貼り合わせの議論によって，

定数$m3 > 0$が存在して，任意の$m \geqslant m_3$に対して，$\# Z_+(\beta) \leqslant \dim \operatorname{Ker} D_m$である．

を示した．

系 5.12

任意の$m \geqslant \max(m_0, m_3)$に対して，$\dim \operatorname{Ker} D_m = \# Z_+(\beta)$である．

全く同様にして，$\dim \operatorname{Coker} D_m = \# Z_-(\beta)$もわかる．

よって，$m \geqslant \max(m_0, m_3)$のとき，

$$\operatorname{ind} D_m = \dim \operatorname{Ker} D_m - \dim \operatorname{Coker} D_m = \# Z_+(\beta) - \# Z_-(\beta) = c_1(\overline{\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}}(E, F))$$

が示された．

Green核の構成

6. Stokesの定理と部分積分

境界の向きとStokesの定理

まずは境界の向き付けとStokesの定理について整理しておこう.

以下，向き付けと体積形式を同一視する.

Euclid空間のときの境界の向き付け

n次元Euclid空間$\mathbb{R}^n$の標準座標を$(x^1, \ldots, x^n)$とする．

$\mathbb{R}^n$の標準的な向きは

$$dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$$

で与えられる．

左半平面$X := (-\infty, 0] \times \mathbb{R}^{n-1}$に対して，その境界$\partial X = \{0\} \times \mathbb{R}^{n-1}$のStokes向き付けを

$$dx^2 \wedge \cdots \wedge dx^n$$

と定める．このとき，$\nu := \partial/\partial x^1$は外向き法ベクトル場であり，包含写像$i\colon \{0\} \times \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^n$に対して，

$$dx^2 \wedge \cdots \wedge dx^n = i^*\big(\iota_\nu(dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n)\big)$$

が成り立つことに注意せよ．

Euclid空間のときの境界の向き付けとStokesの定理

また，$f \in C_0^\infty(X)$に対して，$\alpha := f\,dx^2 \wedge \cdots \wedge dx^n$とするとき，

$$
\begin{aligned}
d\alpha &= \frac{\partial f}{\partial x^1} dx^1 \wedge dx^2 \wedge \cdots \wedge dx^n \\
i^*\bigl(\iota_\nu(\alpha)\bigr) &= f(0, x^2, \ldots, x^n) dx^2 \wedge \cdots \wedge dx^n
\end{aligned}
$$

であり，

$$
\begin{aligned}
\int_X d\alpha &= \int_X \frac{\partial f}{\partial x^1}\, dx^1 \wedge dx^2 \wedge \cdots \wedge dx^n \\
&= \int_{(-\infty,0]\times\mathbb{R}^{n-1}} \frac{\partial f}{\partial x^1}\, dx^1 dx^2 \ldots dx^n \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_{-\infty}^0 \frac{\partial f}{\partial x^1}\, dx^1\right] dx^2 \ldots dx^n \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(0, x^2, \ldots, x^n)\, dx^2 \ldots dx^n \\
&= \int_{\partial X} f(0, x^2, \ldots, x^n)\, dx^2 \wedge \cdots \wedge dx^n \\
&= \int_{\partial X} i^*\bigl(\iota_\nu(\alpha)\bigr)
\end{aligned}
$$

が成り立つ．

多様体のときの境界の向き付け

Xをn次元境界付き有向多様体とする．$i\colon \partial X \to X$を境界からの埋込写像として，νを外向き法ベクトルとする．Xの体積形式が$\mathrm{vol}_{(X,g)}$であるとき，境界∂Xの体積形式$\mathrm{vol}_{\partial X, i^* g}$を

$$\mathrm{vol}_{\partial X, i^* g} := i^*\left(\iota_\nu\left(\mathrm{vol}_{(X,g)}\right)\right)$$

により定め，**Stokes向き付け**と呼ぶ．以後，境界には常にStokes向き付けを入れる．

例 6.1： $\{x = (x^1, \ldots, x^n) \in \mathbb{R}^n \mid x^n > 0\} \supset \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$に対して，外向き法ベクトルは$-\partial/\partial x^n$であり，境界$\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$のStokes向き付けは

$$\iota_{-\frac{\partial}{\partial x^n}}\left(dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n\right) = (-1)(-1)^{n-1} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^{n-1} = (-1)^n dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^{n-1}$$

となる．

多様体のときの境界の向き付け

Xをn次元境界付き有向多様体とする．$i\colon \partial X \to X$を境界からの埋込写像として，νを外向き法ベクトルとする．Xの体積形式が$\mathrm{vol}_{(X,g)}$であるとき，境界∂Xの体積形式$\mathrm{vol}_{\partial X, i^*g}$を

$$\mathrm{vol}_{\partial X, i^*g} := i^*\left(\iota_\nu\left(\mathrm{vol}_{(X,g)}\right)\right)$$

により定め，Stokes向き付けと呼ぶ．以後，境界には常にStokes向き付けを入れる．

定理 6.2 (Stokesの定理)

Xをn次元境界付き有向多様体として，$i\colon \partial X \to X$を境界からの埋込写像とする．このとき，任意の$\omega \in \Omega_c^{n-1}(X)$に対して，

$$\int_X d\omega = \int_{\partial X} i^*(\omega)$$

が成り立つ．

すなわち，Stokes向き付けとは，Stokesの定理が成り立つような向き付けのことである．

Riemann多様体の体積形式

(X, g)をn次元境界付き有向Riemann多様体とする．

定義 6.3

$\mathrm{vol}_{(X,g)} = \sqrt{\det g_{ij}}\, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$をRiemann体積形式とする．

$i\colon \partial X \to X$を境界からの埋込写像として，νを外向き単位法ベクトルとする．

∂Xには，Stokes向き付けと誘導計量$i^* g$を入れる．

命題 6.4

このとき，$(\partial X, i^* g)$のRiemann体積形式$\mathrm{vol}_{(\partial X, i^* g)}$は

$$\mathrm{vol}_{(\partial X, i^* g)} = i^*\left(\iota_\nu\left(\mathrm{vol}_{(X,g)}\right)\right)$$

をみたす．

課題 6.1： これを示せ．

Hodge作用素

(X, g)をn次元境界付き有向Riemann多様体とする.

$\mathrm{vol}_g = \sqrt{\det g_{ij}}\, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$をRiemann体積形式とする.

$i\colon \partial X \to X$を境界からの埋込写像として，νを外向き単位法ベクトルとする.

∂Xには，Stokes向き付けと誘導計量$i^* g$を入れる.

命題 6.5

このとき，任意の$\alpha, \beta \in \Omega^p(X)$に対して，

$$i^*(\alpha \wedge *_g \beta) = i^*(\alpha) \wedge *_{i^* g}\left(\iota_\nu(\beta)\right)$$

が成り立つ.

定義 6.6

任意の$\alpha, \beta \in \Omega^p(X)$に対して，$(\alpha, \beta)\mathrm{vol}_g := \alpha \wedge *\beta$と定める.

命題 6.7

任意の$\alpha \in \Omega^p(X)$に対して，$d^*\alpha = (-1)^{n(p-1)+1} * d * \alpha$が成り立つ.

課題 6.2： これらを示せ.

部分積分の公式

Xをn次元境界付き有向多様体として，$i\colon \partial X \to X$を境界からの埋込写像とする．このとき，任意の$\omega \in \Omega_c^{n-1}(X)$に対して，

$$\int_X d\omega = \int_{\partial X} i^*(\omega)$$

が成り立つ．

定理 6.8 (部分積分の公式)

(X, g)をn次元境界付き有向Riemann多様体とする．$i\colon \partial X \to X$を境界からの埋込写像として，νを外向き法ベクトルとする．任意の$\alpha \in \Omega^{p-1}(X)$と$\beta \in \Omega^p(X)$に対して，

$$\int_X (d\alpha, \beta)_g \, d\mu = \int_X (\alpha, d^*\beta)_g \, d\mu + \int_{\partial X} (\alpha, \iota_\nu(\beta))_{i^*g} \, d\sigma$$

が成り立つ．

（証明）　積の微分公式

$$d(\alpha \wedge *_g \beta) = d\alpha \wedge *_g \beta + (-1)^{p-1} \alpha \wedge d(*_g \beta)$$

とStokesの定理より従う．

また，$i^*\big(\alpha \wedge *_g \beta\big) = i^*(\alpha) \wedge *_{i^*g}\big(\iota_\nu(\beta)\big)$と$d^*\beta = (-1)^{n(p-1)+1} * d * \beta$にも注意せよ．

Greenの公式

$$\int_X (d\alpha, \beta)_g \, d\mu = \int_X (\alpha, d^*\beta)_g \, d\mu + \int_{\partial X} (\alpha, \iota_\nu(\beta))_{i^* g} \, d\sigma$$

定理 6.9

(X, g)をn次元境界付き有向Riemann多様体として，νを∂Xの外向き法ベクトルとする．任意の$u, v \in C^\infty(X)$に対して，

$$\int_X u\Delta v \, d\mu = \int_X (\nabla u, \nabla v) \, d\mu - \int_{\partial X} u \frac{\partial v}{\partial \nu} \, d\sigma$$

が成り立つ．

（証明） 部分積分の公式において，$\alpha = u$かつ$\beta = dv$とせよ．

系 6.10

(X, g)をn次元境界付き有向Riemann多様体として，νを∂Xの外向き法ベクトルとする．任意の$u, v \in C^\infty(X)$に対して，

$$\int_X \Delta u \, d\mu = -\int_{\partial X} \frac{\partial u}{\partial \nu} \, d\sigma$$

が成り立つ．

符号の確認

(X, g)をn次元境界付き有向Riemann多様体として，νを∂Xの外向き法ベクトルとする．任意の$u, v \in C^\infty(X)$に対して，

$$\int_X \Delta u \, d\mu = -\int_{\partial X} \frac{\partial u}{\partial \nu} \, d\sigma$$

が成り立つ．

念のために符号を確認しておこう．

$X = D^2 \subset \mathbb{R}^2$として，標準的な計量と向きを与える．$\partial X = S^1$のStokes向き付けは左回りであり，$\partial/\partial r$が外向き単位法ベクトルである．$u(x, y) = x^2 + y^2 = r^2$とする．このとき，

$$\Delta u = -\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) u = -4$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{\partial u}{\partial r} = 2r$$

なので，

$$\int_X \Delta u \, d\mu = (-4) \cdot \pi = -4\pi$$

$$-\int_{\partial X} \frac{\partial u}{\partial \nu} \, d\sigma = -(2 \cdot 2\pi) = -4\pi$$

となる．確かに符号は正しい．

Greenの公式

(X, g)をn次元境界付き有向Riemann多様体として，νを∂Xの外向き法ベクトルとする．任意の$u, v \in C^\infty(X)$に対して，

$$\int_X u\Delta v \, d\mu = \int_X (\nabla u, \nabla v) \, d\mu - \int_{\partial X} u \frac{\partial v}{\partial \nu} \, d\sigma$$

が成り立つ．

系 6.11（Greenの公式）

(X, g)をn次元境界付き有向Riemann多様体として，νを∂Xの外向き法ベクトルとする．任意の$u, v \in C^\infty(X)$に対して，

$$\int_X \big(u(\Delta v) - (\Delta u)v\big) \, d\mu = -\int_{\partial X} \left(u \frac{\partial v}{\partial \nu} - \frac{\partial u}{\partial \nu} v \right) d\sigma$$

が成り立つ．

発散

(X, g)をn次元境界付き有向Riemann多様体として，$\mathrm{vol}_{X,g}$をRiemann体積形式とする．発散作用素$\mathrm{div}\colon \mathfrak{X}(X) \to C^\infty(X)$を

$$\mathrm{div}(V) := *_g d\big(\iota_V(\mathrm{vol}_{(X,g)})\big)$$

により定める．Cartanの公式$\mathcal{L}_V = \iota_V \circ d + d \circ \iota_V$により，

$$\begin{aligned}\mathrm{div}(V) &= *_g d\big(\iota_V(\mathrm{vol}_{(X,g)})\big) \\ &= *_g \left[\iota_V(d\mathrm{vol}_{(X,g)}) + d\big(\iota_V(\mathrm{vol}_{(X,g)})\big)\right] \\ &= *_g \left[\mathcal{L}_V(\mathrm{vol}_{(X,g)})\right]\end{aligned}$$

を得る．すなわち，

$$\mathcal{L}_V(\mathrm{vol}_{(X,g)}) = (\mathrm{div}(V))\mathrm{vol}_{(X,g)}$$

が成り立つ．

例 6.12： $(X, g) = \mathbb{R}^2$のとき，

$$\iota_V(dx^1 \wedge dx^2) = V^i\big(\iota_{\partial_i}(dx^1 \wedge dx^2)\big) = V^1 dx^2 - V^2 dx^1$$

$$*_g d\big(\iota_V(dx^1 \wedge dx^2)\big) = \frac{\partial V^1}{\partial x^1} dx^1 \wedge dx^2 + \frac{\partial V^2}{\partial x^2} dx^1 \wedge dx^2$$

なので，

$$\mathrm{div}(V) = *_g d\big(\iota_V(dx^1 \wedge dx^2)\big) = \frac{\partial V^1}{\partial x^1} + \frac{\partial V^2}{\partial x^2}$$

を得る．

Gaussの発散定理

$$\mathrm{div}(V) := *_g d\left(\iota_V\left(\mathrm{vol}_{(X,g)}\right)\right)$$

定理 6.13 (Gaussの発散定理)

(X, g)をn次元境界付き有向Riemann多様体として，νを∂Xの外向き法ベクトルとする．任意の$V \in \mathfrak{X}(X)$に対して，

$$\int_X \mathrm{div}V \, d\mu = \int_{\partial X} (V, \nu) \, d\sigma$$

が成り立つ．

（証明）　まずはStokesの定理より

$$\begin{aligned}\int_X (\mathrm{div}V)\mathrm{vol}_{(X,g)} &= \int_X d\left(\iota_V\left(\mathrm{vol}_{(X,g)}\right)\right) \\ &= \int_{\partial X} i^*\left(\iota_V\left(\mathrm{vol}_{(X,g)}\right)\right)\end{aligned}$$

を得る．また，局所座標を取って考えれば，

$$i^*\left(\iota_V\left(\mathrm{vol}_{(X,g)}\right)\right) = (V, \nu)\mathrm{vol}_{(\partial X, i^* g)}$$

がわかる．

接続のとき

(X, g)をn次元境界付き有向Riemann多様体として，νを∂Xの外向き法ベクトルとする．

(E, h)をX上のHermiteベクトル束とする．AをE上の計量接続とする．

このとき，任意の$\phi \in \Gamma(E)$に対して，

$$(\phi, \nabla_A^* \nabla_A \phi) = |\nabla_A \phi|^2 + \frac{1}{2}\Delta|\phi|^2$$

が成り立つ．

それぞれの項の符号に混乱したらラプラシアンのスペクラムが正であることを思い出す．

符号を確認しておこう 全て自明な一次元のとき，$\phi = x^2$として，

$$(\phi, \nabla_A^* \nabla_A \phi) = \left(x^2, -2\right) = -2x^2$$

$$|\nabla_A \phi|^2 + \frac{1}{2}\Delta|\phi|^2 = |2x|^2 + \frac{1}{2}(-12x^2) = -2x^2$$

となる．

接続のとき

$$(\phi, \nabla_A^* \nabla_A \phi) = |\nabla_A \phi|^2 + \frac{1}{2}\Delta|\phi|^2$$
$$\int_X \Delta u \, d\mu = -\int_{\partial X} \frac{\partial u}{\partial \nu} \, d\sigma$$

定理 6.14

(X, g)をn次元境界付き有向Riemann多様体として，νを∂Xの外向き法ベクトルとする．

(E, h)をX上のHermiteベクトル束とする．AをE上の計量接続とする．

このとき，任意の$\phi \in \Gamma(E)$に対して，

$$\int_X (\phi, \nabla_A^* \nabla_A \phi) \, d\mu = \int_X |\nabla_A \phi|^2 \, d\mu - \frac{1}{2}\int_{\partial X} \frac{\partial |\phi|^2}{\partial \nu} \, d\sigma$$

が成り立つ．

中間値の定理について

$$\int_X \Delta u \, d\mu = -\int_{\partial X} \frac{\partial u}{\partial \nu} \, d\sigma$$

定理 6.15

$$\int_{|x-y|\leqslant\rho} \Delta u(x) \, d\mu_x = -\rho^{n-1} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^{1-n} \int_{|x-y|=\rho} u(x) \, d\sigma_x \right)$$

（証明）　Greenの公式で計算する．

$$\begin{aligned}
\int_{|x-y|\leqslant\rho} \Delta u(x) \, d\mu_x &= -\int_{|x-y|=\rho} \frac{\partial u}{\partial \nu}(x) \, d\sigma_x \\
&= -\int_{|\omega|=1} \frac{\partial u}{\partial \rho}(y+\rho\omega) \, \rho^{n-1} \, d\sigma_\omega \\
&= -\rho^{n-1} \int_{|\omega|=1} \frac{\partial u}{\partial \rho}(y+\rho\omega) \, d\sigma_\omega \\
&= -\rho^{n-1} \frac{\partial}{\partial \rho} \int_{|\omega|=1} u(y+\rho\omega) \, d\sigma_\omega \\
&= -\rho^{n-1} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^{1-n} \int_{|x-y|=\rho} u(x) \, d\sigma_x \right)
\end{aligned}$$

中間値の定理について

$$\int_{|x-y|\leqslant\rho} \Delta u(x)\,d\mu_x = -\rho^{n-1}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^{1-n}\int_{|x-y|=\rho} u(x)\,d\sigma_x\right)$$

系 6.16

$\Delta u \leqslant 0$ならば,

$$\rho^{1-n}\int_{|x-y|=\rho} u(x)\,d\sigma_x$$

はρの非減少函数である．特に,

$$n|\mathbb{D}^n|u(y) \leqslant \rho^{1-n}\int_{|x-y|=\rho} u(x)\,d\sigma_x$$

が成り立つ．

系 6.17

$\Delta u \leqslant 0$ならば,

$$u(y) \leqslant \frac{1}{n|\mathbb{D}^n|}\int_{|x-y|\leqslant\rho} u(x)\,d\mu_x$$

が成り立つ．

再掲：バブルの解析

$\Delta f \leqslant 0$ならば，$f(y) \leqslant \dfrac{1}{n|\mathbb{D}^n|}\displaystyle\int_{|x-y|\leqslant\rho} f(x)\,d\mu_x$が成り立つ．

滑らかな函数$u\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$が，

$$\overline{\partial} u + \overline{z}\cdot\overline{u} = 0 \text{ かつ } \int_{\mathbb{C}} |u|^2\,ds\,dt < \infty$$

を充たすならば，$u \equiv 0$である．

（証明） 一般に，$\Delta|u|^2 = 2\,\mathrm{Re}\langle u, \Delta u\rangle - 2|\nabla u|$である．また，$\overline{\partial}u + \overline{z}\cdot\overline{u} = 0$によって，

$$\Delta u = -\partial\overline{\partial}u = -\partial\big(-\overline{z}\cdot\overline{u}\big) = \overline{z}(\partial\overline{u}) = \overline{z}\cdot\overline{\overline{\partial}u} = \overline{z}\cdot\overline{-\overline{z}\cdot\overline{u}} = -|z|^2u$$

である．よって，

$$\Delta|u|^2 = 2\,\mathrm{Re}\langle u, \Delta u\rangle - 2|\nabla u| = 2\,\mathrm{Re}\langle u, -|z|^2u\rangle - 2|\nabla u| = -2|z|^2|u|^2 - 2|\nabla u|^2$$

を得る．特に，$\Delta|u|^2 \leqslant 0$である．従って，平均値の定理と仮定より，任意の$x \in \mathbb{C}$に対して，

$$|u(x)|^2 \leqslant \frac{1}{\pi r^2}\int_{|z-x|<r} |u(z)|^2\,ds\,dt \leqslant \frac{1}{\pi r^2}\int_{\mathbb{C}} |u|^2\,ds\,dt \xrightarrow{r\to\infty} 0$$

が成り立つ．

7. Newtonポテンシャルについて

$r^{-\alpha}$の積分について

n次元空間の単位球を$\mathbb{D}^n$とする．また，一般に，$x \in \mathbb{R}^n$に対して，$r := |x|$とも書く．

$$\mathbb{D}^n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| \leqslant 1\}$$

まずは基本は，

$$\int_0^1 \frac{dr}{r^\alpha} < \infty \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha < 1$$

である．

次に，n次元のとき，

$$\int_{\mathbb{D}^n} \frac{dx}{|x|^\alpha} = \int_{\mathbb{D}^n} \frac{1}{r^\alpha} r^{n-1} \, dr \, d\sigma = \left|\mathbb{S}^{n-1}\right| \int_0^1 \frac{dr}{r^{\alpha-(n-1)}}$$

なので，

$$\int_{\mathbb{D}^n} \frac{dx}{|x|^\alpha} < \infty \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha - (n-1) < 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha < n$$

を得る．

課題 7.1： 無限遠点での可積分性についても同様の考察をせよ．

Newtonポテンシャル

$\omega_n := |\mathbb{S}^n|$とする．今後，簡単のため，$n \geqslant 3$とする．

定義 7.1

Newtonポテンシャル$N : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$を

$$N(x) := \frac{1}{n(n-2)\omega_n} \frac{1}{|x|^{(n-2)}}$$

と定める．二変数函数$N(x,y) := N(x-y)$もNewtonポテンシャルと呼ぶ．

$$\partial_j N = \frac{1}{n\omega_n} \frac{1}{|x|^{(n-1)}} \cdot \frac{x_j}{|x|}$$

$$\partial_{jj} N = \frac{1}{\omega_n} \frac{1}{|x|^n} \left(\frac{x_j^2}{|x|^2} - \frac{1}{n} \right)$$

Nの可積分性について，次がわかる．

- Nは局所可積分である．$\partial_j N$も局所可積分である．
- しかし，$\partial_{ij} N$は局所可積分ではない！
- また，$p < n/(n-2)$でN^pは局所可積分であって，$q > n/(n-2)$でN^qは無限遠で可積分である．ここで，$n/(n-2)$の双対指数が$n/2$であることを注意しておく．

Newtonポテンシャル

$$N(x) := \frac{1}{n(n-2)\omega_n} \frac{1}{|x|^{(n-2)}}$$

$$\partial_{jj} N = \frac{1}{\omega_n} \frac{1}{|x|^n} \left(\frac{x_j^2}{|x|^2} - \frac{1}{n} \right)$$

命題 7.2

$\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$において,

$$\Delta N = 0$$

が成り立つ.

次に，原点でのNの超函数微分を計算する.

Nの超函数微分

$$N(x) := \frac{1}{n(n-2)\omega_n} \frac{1}{|x|^{(n-2)}}$$

$$|\nabla N| = O(r^{1-n})$$

$$\Delta N = 0 \text{ on } \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

$$\int_X (u(\Delta v) - (\Delta u)v)\, d\mu = -\int_{\partial X} \left(u\frac{\partial v}{\partial \nu} - \frac{\partial u}{\partial \nu} v \right) d\sigma$$

$\mathbb{R}^n$上の滑らかなコンパクト台函数$\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$をとる.

$$\begin{aligned}
\langle \Delta N, \phi \rangle &:= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{n\omega_n |x|^{(n-2)}} \Delta\phi(x)\, dx \\
&= \lim_{\epsilon \to 0} \int_{|x| \geqslant \epsilon} N(x)\Delta\phi(x)\, dx \\
&= \lim_{\epsilon \to 0} \left(-\int_{|x|=\epsilon\text{右回り}} N(-\partial_r \phi) - (-\partial_r N)\phi\, d\sigma \right) \\
&= \phi(0)
\end{aligned}$$

より，$\Delta N = \delta$がわかった．$\partial_{ij} N = O(r^{-n})$は局所可積分ではないので，安易に微分と積分を交換してはならない．

課題 7.2： $\dfrac{1}{|\xi|^2}$を直接計算してみよ．

Greenの表現公式

$$N(x) := \frac{1}{n(n-2)\omega_n} \frac{1}{|x|^{(n-2)}}$$

$N(x,y) := N(x-y)$だった．

定理 7.3 (Greenの表現公式)

任意の滑らかなコンパクト台函数$\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$に対して，各点$x \in \mathbb{R}^n$において，

$$u(x) := \int_{\mathbb{R}^n} N(x,y)\phi(y)\,dy$$

とすれば，$u \in C^\infty(X;\mathbb{R})$であって，

$$\Delta u = \phi$$

を充たす．

注意 7.4： ϕの台はコンパクトでもuの台は非コンパクトかもしれない．

課題 7.3： Greenの表現公式を示せ．

注意 7.5： この講義では，Newtonポテンシャルと Green核と Green函数と基本解を区別せずに使う．しかし，本当は微妙に違う．基本解のうちで，境界条件まで考慮したものがGreen函数で，さらにそれの積分核がGreen核で，特に$\mathbb{R}^n$で無限遠で消える境界条件を課したものがNewtonポテンシャルである．

Helmholtz方程式

定義 7.6

線型偏微分方程式

$$\Delta u + u = \phi$$

をHelmholtz方程式という．

gをHelmholtz方程式の基本解とする．すなわち，

$$\Delta g + g = \delta$$

とする．このとき，

$$0 < g(x) \leqslant \frac{C}{|x|^{n-2}} \quad \text{if} \quad 0 < |x| < 1$$
$$0 < g(x) \leqslant e^{-|x|/2} \text{ if } 1 \leqslant |x|$$

がわかる．すなわち，Helmholtz方程式の基本解は，Newtonポテンシャルと違って，無限遠で指数減衰する．その由来は，$1/(1+k^2)$と$1/k^2$は，$k \to \infty$での振る舞いは同じだが，$k = 0$での様子が全然違うことにある．

課題 7.4： $1/(|\xi|^2 + 1)$のFourier変換を計算することによって，例えばBesselポテンシャルを用いて，Helmholtz方程式の基本解を求めよ．さらに，基本解の無限遠での減衰度を考察せよ．

8. 多様体上のHelmholtz方程式

多様体上のHelmholtz方程式

(X, g)をn次元有向閉Riemann多様体とする．簡単のため，以後，$n \geqslant 3$とする．
$\Delta = d^* d = -(\partial_1^2 + \cdots + \partial_n^2)$である．

定理 8.1

任意の$\phi \in C^\infty(X; \mathbb{R})$に対して，$u \in C^\infty(X; \mathbb{R})$が唯一つ存在して，

$$\Delta u + u = \phi$$

を充たす．すなわち，

$$\Delta + 1 \colon C^\infty(X; \mathbb{R}) \to C^\infty(X; \mathbb{R})$$

は全単射である．

定義 8.2

$\Delta u + u = \phi$をHelmholtz方程式という．ただし，用語の濫用で，Poisson方程式やLaplace方程式と呼ぶことも多い．

以後しばらくは，閉多様体上のHelmholtz方程式のL^2-methodによる解法を紹介する．つまり，無限次元のHilbert空間の幾何を用いて，変分法的にHelmholtz方程式を解く．

まずはRieszの表現定理を復習しておこう．

Rieszの表現定理

$(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$を実Hilbert空間とする．$u \in H$に対して，$\|u\| := \sqrt{\langle u, u\rangle}$とする．

線型写像

$$\ell \colon H \to \mathbb{R}$$

が有界であるとは，定数$C > 0$が存在して，任意の$u \in H$に対して，

$$|\ell(u)| \leqslant C\|u\|$$

が成り立つことだった．Hから$\mathbb{R}$への線型写像を線型汎関数ともいう．

定理 8.3 (Rieszの表現定理)

任意の有界線型汎関数$\ell \colon H \to \mathbb{R}$に対して，$u \in H$が唯一つ存在して，任意の$v \in H$に対して，

$$\ell(v) = \langle u, v\rangle$$

が成り立つ．

課題 8.1：

1. Rieszの表現定理の証明を復習せよ．
2. Lax-Milgramの定理を，知らなければ，調べよ．
3. Rieszの表現定理の証明を吟味して，変分法の直接法との関係を考察せよ．

Helmholtz方程式の解法の流れ

目標は，ϕが与えられたとき，

$$\Delta u + u = \phi$$

を充たすuを見つけることだった．この方程式を書き直す．

もしも$\Delta u + u = \phi$ならば，任意のvに対して，部分積分によって，

$$\begin{aligned}\int_X \big((\nabla u, \nabla v) + (u, v)\big)\, d\mu &= \int_X \big((\Delta u, v) + (u, v)\big)\, d\mu \\ &= \int_X (\Delta u + u, v)\, d\mu = \int_X (\phi, v)\, d\mu\end{aligned}$$

が成り立つ．ここで，左辺がuとvについて対称であって，内積になっていることに注目する．
実際，

$$\int_X \big((\nabla v, \nabla v) + (v, v)\big)\, d\mu = 0$$

ならば，$u = 0$なので，非退化である．

定義 8.4

任意の$u, v \in C^\infty(X; \mathbb{R})$に対して，

$$\langle u, v \rangle_{L^2_1} := \int_X \big((\nabla u, \nabla v) + (u, v)\big)\, d\mu$$

と定める．これを$C^\infty(X; \mathbb{R})$のL^2_1内積という．

Helmholtz方程式の解法の流れ

$$\langle u, v\rangle_{L^2_1} := \int_X ((\nabla u, \nabla v) + (u, v))\, d\mu$$

さらに，$\phi \in C^\infty(X;\mathbb{R})$が与えられたとき，線型汎関数$\ell_\phi\colon C^\infty(X;\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$を

$$v \mapsto \int_X (\phi, v)\, d\mu$$

と定めれば，Cauchy-Schwarzの不等式より，

$$\int_X (\phi, v)\, d\mu \leqslant \left(\int_X |\phi|^2\, d\mu\right)^{1/2} \left(\int_X |u|^2\, d\mu\right)^{1/2} \leqslant \left(\int_X |\phi|^2\, d\mu\right)^{1/2} \|v\|_{L^2_1}$$

である．

Helmholtz方程式の解法の流れ

もしも$\Delta u + u = \phi$ならば，任意のvに対して，部分積分によって，

$$\int_X \left((\nabla u, \nabla v) + (u, v) \right) d\mu = \int_X (\Delta u + u, v)\, d\mu = \int_X (\phi, v)\, d\mu$$

が成り立つ．

$$\langle u, v \rangle_{L_1^2} := \int_X \left((\nabla u, \nabla v) + (u, v) \right) d\mu$$

$$\ell_\phi(v) := \int_X (\phi, v)\, d\mu \leqslant \left(\int_X |\phi|^2\, d\mu \right)^{1/2} \|v\|_{L_1^2}$$

任意の有界線型汎関数$\ell \colon H \to \mathbb{R}$に対して，$u \in H$が唯一つ存在して，任意の$v \in H$に対して，$\ell(v) = \langle u, v \rangle$が成り立つ．

定義 8.5

函数空間$C^\infty(X; \mathbb{R})$の内積$\langle \cdot, \cdot \rangle_{L_1^2}$による完備化を$L_1^2(X; \mathbb{R})$とする．

このとき，線型汎関数$\ell_\phi \colon C^\infty(X; \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$は$L_1^2(X; \mathbb{R})$上の有界線型汎関数に延長する．よって，Rieszの表現定理によって，$\phi\, in\, C^\infty(X; \mathbb{R})$が与えられたとき，$u \in L_1^2(X; \mathbb{R})$が存在して，任意の$v \in L_1^2(X; \mathbb{R})$に対して，

$$\ell_\phi(v) = \langle u, v \rangle_{L_1^2}$$

を充たす．これでHelmholtz方程式が半分解けた．

Helmholtz方程式の解法の流れ：正則性

もしも$\Delta u + u = \phi$ならば，任意のvに対して，

$$\langle u, v\rangle_{L^2_1} := \int_X \left((\nabla u, \nabla v) + (u, v)\right) d\mu = \int_X (\Delta u + u, v)\, d\mu = \int_X (\phi, v)\, d\mu =: \ell_\phi(v)$$

が成り立つ．

Rieszの表現定理によって，$\ell_\phi(v) = \langle u, v\rangle_{L^2_1}$を充たす$u \in L^2_1(X;\mathbb{R})$の存在はわかった．しかし，$L^2_1(X;\mathbb{R})$は完備化で作られたナゾの空間なので，$u \in C^\infty(X;\mathbb{R})$を示したい．それを示すのが正則性(regularity)の議論である．しかし，この講義では扱わない．

定理 8.6

$\phi \in C^\infty(X;\mathbb{R})$かつ$u \in L^2_1(X;\mathbb{R})$とする．このとき，任意の$v \in L^2_1(X;\mathbb{R})$に対して，

$$\ell_\phi(v) = \langle u, v\rangle_{L^2_1}$$

が成り立つならば，$u \in C^\infty(X;\mathbb{R})$である．

正則性を示す手法の王道は，Nirenbergによる差分商(difference quotient)であろう．

ここまでで，Rieszの表現定理を経由して，Helmholtz方程式の解を構成した．さらに具体的に解を表示することができる．そのために使われるのがGreen函数である．

Green函数

(X, g)をn次元有向閉Riemann多様体とする．$\mathrm{diag}(X) := \{(x, y) \in X \times X \mid x = y\}$とする．二点$x, y \in X$の$g$による距離を$d_g(x, y)$とする．

定理 8.7 (Green函数の存在)

連続函数$g \colon (X \times X \setminus \mathrm{diag}(X)) \to \mathbb{R}$が存在して，次を充たす．

- 任意の$x \in X$に対して，$y \mapsto g(x, y)$は，$X \setminus \{x\}$上でC^∞級である．
- 定数$C > 0$が存在して，任意の$x, y \in X$に対して，$x \neq y$ならば，

$$\left| d_g(x, y)^{n-2} g(x, y) - \frac{1}{(n-2)\omega_n} \right| \leqslant C d_g(x, y)$$
$$\left| d_g(x, y)^{n-1} |\nabla_y g(x, y)| - \frac{1}{\omega_n} \right| \leqslant C d_g(x, y)$$

- 任意の$u \in C^\infty(X; \mathbb{R})$に対して，各点$x \in X$において，

$$u(x) = \int_X g(x, y)\big(\Delta u(y) + u(y)\big)\, dy$$

  が成り立つ．
- 任意の$x, y \in X$に対して，$x \neq y$ならば，$g(x, y) = g(y, x)$である．
- 任意の$x, y \in X$に対して，$x \neq y$ならば，$g(x, y) > 0$である．

Green函数の構成方法

$$u(x)=\int_X g(x,y)\big(\Delta u(y)+u(y)\big)\,dy$$

- Δのスペクトル分解を用いて，$g(x,y)=\sum\frac{1}{1+\lambda_j}\phi_j(x)\otimes\phi_j(y)$とする．
- $\partial_t-(\Delta+1)$の熱核を構成してから，tについて積分する．
- Schwarzの核定理を用いて超函数核を構成してから，hypoellipticityで滑らかさを示す．
- Leviの方法
  1. Euclid空間ではNewtonポテンシャルがあった．
  2. カットオフ函数により多様体にNewtonポテンシャルを移植する．
  3. 誤差項を評価する．
  4. Neumann級数として摂動論的に誤差を補正する．
- Aubinの教科書の方法
  1. 途中まではLeviの方法と同じ．
  2. Neumann級数を途中までで切り上げて，L^2-methodを援用して誤差を補正する．
- Lee–Parkerの方法：Aubinの教科書の方法で，L^p評価を用いる．非コンパクトでの漸近展開が出しやすい．

この講義では，最終日に時間が余ったら，Aubinの教科書の方法とLeviの方法を紹介したい．

9. Taubesノルム

本当に解くべき方程式

今まではHelmholtz方程式

$$\Delta u + u = \phi$$

の解法について述べてきた.

しかし，我々が本当に解くべき方程式は非線型である．具体的には，この方程式

$$\Delta_A u + u + H(\nabla u, \nabla u) + f(u) = \phi$$

を解きたい.

では，この方程式の設定を説明する.

本当に解くべき方程式のための設定

(X, g)を有向閉Riemann多様体として，EをX上のHermiteベクトル束とする．

以後，切断の間の$C^\infty(X;\mathbb{R})$加群としての線型写像と滑らかな束写像を同一視する．

Hを有界対称双線型束写像

$$H\colon (E \otimes T^*X) \times (E \otimes T^*X) \to E$$

とする．すなわち，定数$C > 0$が存在して，任意の$u, v \in C^\infty(X; E \otimes T^*X)$に対して，

$$\left|H(u, v)\right| \leqslant C|u||v|$$

が成り立つ．

定義 9.1

E上の接続Aが計量接続であるとは,任意の$u, v \in C^\infty(X; E)$に対して,Xの各点において,

$$d(u, v) = (\nabla u, v) + (u, \nabla v)$$

を充たすことである．

$f \in C^\infty(X; \mathrm{End}(E))$とする．

本当に解くべき方程式

(X, g)を有向閉Riemann多様体として，EをX上のHermiteベクトル束とする．

- 有界対称双線型形式$H \colon (E \otimes T^*X) \times (E \otimes T^*X) \to E$
- 束写像$f \colon E \to E$
- 計量接続$\nabla_A \colon C^\infty(X; E) \to C^\infty(X; E \otimes T^*X)$

を固定データとする．

さて，$\phi \in C^\infty(X; E)$が与えられたとき，非線型偏微分方程式

$$\nabla_A^* \nabla_A u + u + H(\nabla_A u, \nabla_A u) + f(u) = \phi$$

を充たすuを見つけたい．

$H(\nabla_A u, \nabla_A u)$が非線型項である．

以後，$\Delta_A := \nabla_A^* \nabla_A$として，接続ラプラシアンと呼ぶ．

何故この方程式を解きたいのか

$$\nabla_A^* \nabla_A u + u + H(\nabla_A u, \nabla_A u) + f(u) = \phi$$

この方程式は，四次元有向多様体の上の反自己双対方程式をモデルとしている．反自己双対方程式を解きたいので，この方程式も解きたい．

$$F^+(A_0 + d_{A_0}^* u) = F^+(A_0) + d_{A_0}^+ d_{A_0}^* u + (d_{A_0}^* u \wedge d_{A_0}^* u)^+$$
$$d_{A_0}^+ d_{A_0}^* u = \frac{1}{2}\nabla_{A_0}^* \nabla_{A_0} u + \left(\frac{S}{6} - W^+\right) u + F_{A_0}^+ \cdot u$$

◎方程式の由来の説明

$\dim_{\mathbb{R}} X = 4$

やりたいこと　$F^+(A) = 0$ となる A を見つけたい！

Step1　$\|F^+(A_0)\| \ll 1$ となる A_0 をみつける。

Step2　$F^+(A_0 + a) = 0$ となる摂動 $a \in \Omega^1$ を見つける

Ansatz　$a = d_{A_0}^* u$ ，$u \in \Omega^+$ という形で見つける．

何でこういう形にしたいか？
（キーワード：ゲージ固定）

$$F^+(A_0+a) = F^+(A_0) + d^+_{A_0} a + (a\wedge a)^+$$

方程式としてellipticでない

$a = d^*_{A_0} u$ のとき、

$$F^+(A_0 + d^*_{A_0} u) = F^+(A_0) + d^+_{A_0} d^*_{A_0} u + (d^*_{A_0} u \wedge d^*_{A_0} u)^+$$

ellipticになる!!

cf. 調和積分論

$[\omega]$ $\quad d\omega = 0 \quad d(\omega + d\eta) = 0$

不定性.

$$F^+(A_0 + d_{A_0}^* u) = F^+(A_0) + \underbrace{d_{A_0}^+ d_{A_0}^* u}_{} + (d_{A_0}^* u \wedge d_{A_0}^* u)^+$$

$$d_{A_0}^+ d_{A_0}^* u = \frac{1}{2} \nabla_{A_0}^* \nabla_{A_0} u + \left(\frac{S}{6} - W^+\right) u + F_{A_0}^+ \cdot u$$

(Weitzenböck 公式)

$$\nabla_{A_0}^* \nabla_{A_0} u + 2\left(\frac{S}{6} - W^+\right) u + \overbrace{2(d_{A_0}^* u \wedge d_{A_0}^* u)^+}^{H(\nabla_{A_0} u, \nabla_{A_0} u)} + \overbrace{2F_{A_0}^+ \cdot u}^{f(u)} = \underbrace{-F^+(A_0)}_{\Phi}$$

特に、例えば、

$$(X, g) = (S^4, g_{std}) \quad \begin{cases} S = 6 \\ W^+ = 0 \end{cases}$$

$$\rightsquigarrow \boxed{\nabla_{A_0}^* \nabla_{A_0} u + u + H(\nabla_{A_0} u, \nabla_{A_0} u) + f(u) = \Phi}$$

$$\boxed{\nabla_{A_1}^{*}\nabla_{A_1} u + u + H(\nabla_{A_1} u, \nabla_{A_1} u) + f(u) = \phi.}$$

この方程式を解きたい。

① A_0 が自明で、束 $E = X \times \mathbb{R}$ とする。

$$\nabla^{*}\nabla u + u + H(\nabla u, \nabla u) + f(u) = \phi$$

② $\nabla^{*}\nabla u + u = \phi$ を考える。$\longrightarrow$ Helmholtz eq.

非線形項 $\rightsquigarrow$ Taubes

③ $\nabla^{*}\nabla u + u + H(\nabla u, \nabla u) = \phi.$

④ $\nabla^{*}\nabla u + u + H(\nabla u, \nabla u) + f(u) = \phi$

A $\rightsquigarrow$ Kato

⑤ $\nabla_{A_1}^{*}\nabla_{A_1}^{*} u + u + H(\nabla_{A_1} u, \nabla_{A_1} u) + f(u) = \phi.$

I. $E = X \times \mathbb{R}$ かつ A : 自明のとき,

$$(\Delta + 1)u + H(\nabla u, \nabla u) + f(u) = \phi$$

I. i) $(\Delta + 1)u = \phi$.

Prop $\Delta + 1 : C^\infty(X; \mathbb{R}) \longrightarrow C^\infty(X; \mathbb{R})$
は全単射である。

解く, $(\Delta + 1)u = \phi$

$$\rightsquigarrow \quad u(x) = \int_X g(x, y)\phi(y)\,dy$$

つまり、線型写像

$$G : C^\infty(X; \mathbb{R}) \to C^\infty(X, \mathbb{R})$$

$$\phi \longmapsto \int g(x,y)\phi(y)\,dy$$

が存在して、

$$(\Delta+1)\circ G = G\circ(\Delta+1) = \mathrm{id}.$$

となる。

<u>Recall</u>

- $g(x,y) > 0$
- $\int g(x,y)\,dy < \infty$

定義 (Taubes [IL4)

$$\|u\|_0 := \sup_{x\in X} \int g(x,y)\,|u(y)|\,dy.$$

$$\mathcal{C}_0(X;\mathbb{R}) := \overline{C^\infty(X,\mathbb{R})}^{\|\cdot\|_0}$$

Prp $G : C^\infty(X;\mathbb{R}) \to C^\infty(X;\mathbb{R})$ は、関数空間 $\mathcal{C}_0$ から L^∞ への有界線型写像に拡張する。

$$G\phi = \int g(x,y)\phi(y)\,dy.$$

$$g(x,y) > 0 \qquad \int g(x,y) < \infty$$

Prop $G\phi = \int g(x,y)\phi(y)$ は、$C_0 \to L^\infty$ 有界

$\phi \longmapsto u$

$\|\phi\|_0 := \sup \int g(x,y)|\phi(y)|dy$

∵ $\boxed{\Delta u + u = \phi}$ とする。 $u = G(\phi)$

$$
\begin{aligned}
|u(x)| &= \left|\int g(x,y)\,\overbrace{\left(\Delta u(y) + u(y)\right)}^{\phi(y)}\,dy\right| \\
|G(\phi)(x)| &= \left|\int g(x,y)\,\phi(y)\,dy\right| \\
&\leq \int |g(x,y)\,\phi(y)|\,dy \\
&= \int g(x,y)\,|\phi(y)|\,dy \\
&\leq \sup_x \int g(x,y)\,|\phi(y)|\,dy =: \|\phi\|_0
\end{aligned}
$$

$g(x,y) > 0$ を使った。

ノルムC_0の定義

I. ii) $(\Delta+1)+H(\nabla u,\nabla u)=\phi \quad \cdots (*)$

まずは今解きたい方程式 $(*)$ を不動点を見付ける問に書きかえる。

$$(\Delta+1)u+H(\nabla u,\nabla u)=\phi$$

$$\Downarrow$$

$$(\Delta+1)u=-H(\nabla u,\nabla u)+\phi$$

$$\Downarrow$$

$G\circ(\Delta+1)=(\Delta+1)\circ\Delta=\mathrm{id}.$

$$u=G\left(-H(\nabla u,\nabla u)+\phi\right)$$

従って、

$$\mathcal{F}_\phi : C^\infty(X,\mathbb{R}) \longrightarrow C^\infty(X,\mathbb{R})$$
$$u \longmapsto G\left(-H(\nabla u,\nabla u)+\phi\right)$$

とすれば、$(*) \iff u=\mathcal{F}_\phi(u)$ となる。

$$\mathcal{F}_\phi : C^\infty(X,\mathbb{R}) \longrightarrow C^\infty(X,\mathbb{R})$$
$$u \longmapsto G(-H(\nabla u,\nabla u)+\phi)$$

$$(*) \iff u = \mathcal{F}_\phi(u)$$

$\mathcal{F}_\phi$の不動点を見つける問題になった!!

課題 Banachの縮小写像の原理を復習せよ。

よって、$\mathcal{F}_\phi$が縮小写像になるようなノルムを見つければよい。

Taubesノルムのすごいところは、ここが自明になるところ。そのマジカルを説明します。

当たり前の式　$\Delta = \sum -\partial_i^2$

$$\boxed{\Delta |u|^2 = 2u(\Delta u) - 2|\nabla u|^2.}$$

$$\because \quad \Delta |u|^2 = -\sum \partial_i^2 u^2$$

$$= -\sum \partial_i (2u\partial_i u)$$

$$= -\sum 2\partial_i u \partial_i u + 2u\partial_i^2 u$$

$$= -2|\nabla u|^2 + 2u(\Delta u)$$

当たり前の式　　$\Delta = \sum -\partial_i^2$

$$\boxed{\Delta |u|^2 = 2u(\Delta u) - 2|\nabla u|^2.}$$

$$\Delta |u|^2 + |u|^2 = 2u(\Delta u) + |u|^2 - 2|\nabla u|^2$$

$$= 2\left(u(\Delta u) + |u|^2\right) - |u|^2 - 2|\nabla u|^2$$

$$\therefore\ |\nabla u|^2 = \boxed{-\frac{1}{2}\left(\Delta |u|^2 + |u|^2\right)} - \frac{1}{2}|u|^2 + (u, \Delta u + u)$$

この項の処理が自明になる。

$$|\nabla u|^2 = -\frac{1}{2}\left(\Delta|u|^2 + |u|^2\right) - \frac{1}{2}|u|^2 + (u, \Delta u + u)$$

$$\int g(x,y)\,|\nabla u|^2\,dy$$

$-\frac{1}{2}|u(x)|^2 \leq 0$

$$= \int g(x,y)\left(-\frac{1}{2}\left(\Delta|u|^2 + |u|^2\right)\right)dy - \int g(x,y)\frac{|u|^2}{2}\,dy$$

$$+ \int g(x,y)\,(u, \Delta u + u)\,dy.$$

≥ 0

$g(x,y) > 0.$

$$\leq \int g(x,y)\,(u, \Delta u + u)\,dy$$

$$\leq \|u\|_\infty \int g(x,y)\,|\Delta u + u|\,dy$$

$g(x,y) > 0.$

$$|\nabla u|^2 = -\frac{1}{2}(\Delta |u|^2 + |u|^2) - \frac{1}{2}|u|^2 + (u, \Delta u + u)$$

$$\boxed{\int g(x,y)|\nabla u|^2 dy \leq \|u\|_\infty \int g(x,y)|\Delta u + u| dy.}$$

$$\left(\boxed{|u(x)| \leq \int g(x,y)|\Delta u + u| dy} \right)$$

この情報を取り込んだノルムを作る。

$$\|u\|_0 := \sup_{x \in X} \int g(x,y)|u(y)| dy$$

$$\|u\|_{00} := \sup_{x \in X} |u(x)| + \sup_{x \in X} \sqrt{\int g(x,y)|\nabla u(y)|^2 dy}$$

$$\mathcal{C}_{00} := \overline{C^\infty(X; \mathbb{R})}^{\|\cdot\|_{00}}$$

$$\int g(x,y)|\nabla u|^2 dy \leq \|u\|_\infty \int g(x,y)|\Delta u + u|\, dy.$$

$$\|u\|_0 := \sup_{x\in X} \int g(x,y)\,|u(y)|\,dy$$

$$\|u\|_{00} := \underline{\|u\|_\infty} + \underline{\sup_{x\in X}\sqrt{\int g(x,y)|\nabla u(y)|^2 dy}}$$

Prop $G : C^\infty(X;\mathbb{R}) \to C^\infty(X;\mathbb{R})$ は、$\mathcal{C}_0$ から $\mathcal{C}_{00}$ への有界作用素に拡張する。

さっきは、$G : \mathcal{C}_0 \longrightarrow \underset{\substack{\cup \\ \mathcal{C}_{00}}}{\underline{L^\infty}}$ 有界を示した。

∵ $\Delta u + u = \phi$ とする。 $G(\phi) = u$ ということ。

$$u(x) = \int g(x,y)\,\phi(y)\,dy,$$

示したいことは, $\|u\|_{\infty} \le C\|\phi\|_0$ を示したい。 2

$$\shortparallel$$

$$\|u\|_\infty + \sup\sqrt{\int g(x,y)\,|\nabla u|^2\,dy}$$

・ $|u(x)| = \left|\int g(x,y)\,\phi(y)\,dy\right| \underset{g(x,y)>0}{\le} \int g(x,y)\,|\phi(y)|\,dy \le \|\phi\|_0$

・ $\sqrt{\int g(x,y)\,|\nabla u|^2\,dy} \le \sqrt{\|u\|_\infty \cdot \int g(x,y)\,|\phi(y)|\,dy}$

$$\le \sqrt{\underset{\sim\sim\sim}{\|u\|_\infty} \cdot \|\phi\|_0}$$

$\|u\|_\infty \le \|\phi\|$ $\quad \le \sqrt{\|\phi\|_0 \cdot \|\phi\|_0} \le \sqrt{\|\phi\|_0^2} = \|\phi\|_0$

次に、$\phi \in C_0$ のとき、$\mathcal{F}_\phi : C_{00}$ ↺ を示す。

$$\mathcal{F}_\phi(u) = G(-H(\nabla u, \nabla u) + \phi).$$

$$\|\mathcal{F}_\phi(u)\|_{00} = \|G(-H(\nabla u, \nabla u) + \phi\|_{00}$$

$G : C_0 \to C_{00}$

$$\le 2\|-H(\nabla u, \nabla u) + \phi\|_0$$

$$\le 2\|H(\nabla u, \nabla u)\|_0 + 2\|\phi\|_0$$

$$\le 2\|u\|_{00} + 2\|\phi\|_0$$

ところが、

$\le |\nabla u|^2$

$$\|H(\nabla u, \nabla u)\|_0 = \sup \int g(x,y)\,|H(\nabla u, \nabla u)|\,dy$$

$$\le \sup \int g(x,y)\,|\nabla u|^2\,dy \le \|u\|_{00}^2$$

なので、

つまり, $\|\mathcal{F}_\phi(u)\|_\infty \le 2\|u\|_\infty^2 + 2\|\phi\|_0$ となる。

<u>課題</u>

$$\|\mathcal{F}_\phi(u_1)-\mathcal{F}_\phi(u_2)\|_\infty \le 4\|u_1+u_2\|_\infty\|u_1-u_2\|_\infty$$

uにもφにも依らない定数

を示せ。

よって,

$$\underline{\ell_\infty} := \left\{u\in \ell_\infty \;\middle|\; \|u\|_\infty \le \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\right\}$$

とするとき,

<u>Prop</u> $\|\phi\|_0 < \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}$ のとき,

- $\mathcal{F}_\phi(\underline{\ell_\infty}) \subset \underline{\ell_\infty}$
- $\underline{\ell_\infty}$ 上で $\mathcal{F}_\phi$ は縮小写像になる

(→ 証明は課題)

I. iii) $\Delta u + u + H(\nabla u, \nabla u) + f(u) = \phi$

再び不動点方程式

$$u = G\big(-H(\nabla u, \nabla u) - f(u) + \phi\big)$$

$$\text{!!}$$

$$\mathcal{T}_\phi$$

におきかえる。

$$\| G(f(u)) \|_\infty \leq 2 \| f(u) \|_0$$

$$\|f(u)\|_0 = \sup \int g(x,y)\,|f(u)|\,dy$$

$$\le \sup \int g(x,y)\,|f|\,|u|\,dy$$

$$\le \|u\|_\infty \cdot \sup \int g(x,y)\,|f|\,dy$$

$$\le \|u\|_\infty \cdot \|f\|_0$$

$$\le \|u\|_{00} \cdot \|f\|_0$$

$$\|u\|_{00} := \|u\|_0 + \sqrt{\sup \int g(x,y)\,|\partial u|^2}$$

よって、

$$\|\mathcal{T}_\phi(u)\|_\infty = \|G(-H(\nabla u,\nabla u) - f(u) + \phi)\|_\infty$$

$$\le 2\|H(\nabla u,\nabla u)\|_0 + 2\|f(u)\|_0 + \|\phi\|_0$$

$$\le 2\|u\|_\infty^2 + 2\|f\|_0 \cdot \|u\|_\infty + \|\phi\|_0$$

を得る。

<u>課題</u> このギロンの詳細をつめよ。

同じ

$\|F_{A_0}^+\|_0 \ll 1$

② 正則性について

$$\|u\|_{01} := \|u\|_{00} + \|\nabla u\|_\infty$$

$$= \|u\|_\infty + \sup\int g(x,y)\,|\nabla u|^2 + \|\nabla u\|_\infty$$

$$= \left(\|u\|_\infty + \|\nabla u\|_\infty\right) + \sup\int g(x,y)\,|\nabla u|^2\,dy$$

この $\|\cdot\|_{01}$ ノルムと ∇g の評価と $\|\cdot\|_{00}$ でcontractionであることを使えば、Φ が $\|\cdot\|_{01}$ でもcontractionにできる。

課題：このギロンの詳細をつめよ。

II. 一般の E と A のとき.

$$\begin{array}{c} E \\ \downarrow A \\ X \end{array}$$

Kato's inequality

A : metric connection

$\left(\overset{\text{def}}{\iff} \ \forall u, v \quad d(u,v) = (\nabla_A u, v) + (v, \nabla_A v) \right)$

$\forall u \in C^\infty(X;E) \quad |\nabla |u|| \leq |\nabla_A u|$

$\because$

$$\begin{array}{ccc} \nabla |u|^2 = \nabla (u,u) & \overset{\text{metric connection}}{=} & (\nabla_A u, u) + (u, \nabla_A u) \\ \| & & \| \\ 2|u| \cdot \nabla |u| & & 2(\nabla_A u, u) \end{array}$$

$\therefore \ \underset{2|u| \cdot |\nabla |u||}{\underbrace{|2|u| \cdot \nabla |u||}} = |2(\nabla_A u, u)| \underset{\text{Cauchy-Schwartz}}{\leq} 2|\nabla_A u| \cdot |u|$

Kato's ineq

$$\boxed{A : \text{metric conn} \Longrightarrow |\nabla |u|| \le |\nabla_A u|.}$$

<u>課題</u> ($|u|_\epsilon := \sqrt{|u|^2+\epsilon}$ を使うなどして) $u=0$ の点を考えよ。

注 1) DK の p70 の (2.3.20) を見よ。

2) Kato's ineq は <u>diamagnetic ineq</u> (反磁性不等式) とも呼ばれる。

3) refined Kato's ineq 「Yau のトリック」

例) A : ASD, $d_A^* u = 0 \Longrightarrow |\nabla |u|| \le \sqrt{\frac{3}{4}}\, |\nabla_A u|$

1

Uhlebeck
特異点除去

4) Vafa-Witten ineq

これから使いたい不等式

- Kato ineq : $|\nabla |u|| \leq |\nabla_A u|$

$$\begin{cases} \Delta |u|^2 = 2(u, \nabla_A^* \nabla_A u) - |\nabla_A u|^2 \\ \Delta |u|^2 = 2|u| \Delta |u| - 2|\nabla |u||^2 \end{cases}$$

定義に従って計算すれば出る。
(課題)

◎ Kato's ineq の帰結: $|G_A| \leq C\,G$

$$2|u|\cdot\Delta|u| = \underbrace{\Delta|u|^2} + 2|\nabla|u||^2$$

$$= 2(u, \nabla_A^*\nabla_A u) - 2|\nabla_A u|^2 + 2|\nabla|u||^2.$$

$$\therefore\ \Delta|u| = \frac{(u, \nabla_A^*\nabla_A u)}{|u|} - \frac{|\nabla_A u|^2 - |\nabla|u||^2}{|u|}$$

$$\Delta|u| + |u| = \frac{(u, \nabla_A^*\nabla_A u)}{|u|} + \frac{(u, u)}{|u|} - \frac{|\nabla_A u|^2 - |\nabla|u||^2}{|u|}$$

$$= \left(\frac{u}{|u|}, \nabla_A^*\nabla u + u\right) - \frac{|\nabla_A u|^2 - |\nabla|u||^2}{|u|}$$

$$\Delta|u| + |u| = \left(\frac{u}{|u|}, \nabla_A^* \nabla u + u \right) - \frac{|\nabla_A u|^2 - |\nabla|u||^2}{|u|}$$

Kato $|\nabla|u|| \le |\nabla_A u|$

$\Updownarrow$

$0 \ge -\left(|\nabla_A u| - |\nabla|u|| \right)$

§2. <u>Kato ineq</u> Eq.

$$\Delta|u| + |u| \le \left(\frac{u}{|u|}, \nabla_A^* \nabla_A u + u \right)$$

$$\le |\nabla_A^* \nabla_A u + u|$$

今わかったこと

Kato ineq $\quad |\nabla |u|| \leq |\nabla_A u|$

$$\Downarrow$$

$$\Delta |u| + |u| \leq |\nabla_A^* \nabla_A u + u|.$$

Prop A ; metric conn

$$\nabla_A^* \nabla_A + 1 \; ; \; C^\infty(X;E) \longrightarrow C^\infty(X;E)$$

は、全射で単射である。

(課題 これを示せ)

これの逆写像を

$$G_A \; ; \; C^\infty(X;E) \longrightarrow C^\infty(X;E)$$

とする。

<u>def</u>. $u \in C^\infty(X;E)$ に対して、

$$\|u\|_0 := \sup_{x\in X} \int_X \underbrace{g(x,y)}_{\text{函数に対する } \Delta+1 : C^\infty(X;\mathbb{R}) \to C^\infty(X;\mathbb{R}) \text{ のGreen核を使う!!}} |u(y)|\,dy$$

$$\|u\|_{00} := \sup_{x\in X} |u(x)| + \sqrt{\int_X g(x,y)\,|\nabla_A u(y)|\,dy}$$

$$\mathcal{C}_0(X;E) := \overline{C^\infty(X;E)}^{\|\cdot\|_0} \quad \& \quad \mathcal{C}_{00}(X;E) := \overline{C^\infty(X;E)}^{\|\cdot\|_{00}}$$

Prop $G_A : C^\infty(X; E) \to C^\infty(X; E)$ は，C_0 から L^∞ に拡張する。

∵ $\nabla_A^* \nabla_A u + u = \phi$ とする。つまり，$u = G_A(\phi)$ である。

Kato ineq より，

$$\Delta|u| + |u| \leq |\nabla_A^* \nabla_A u + u| = |\phi|$$

なので，

$$\underset{\displaystyle |u(x)|}{\underset{\displaystyle \|}{\int g(x,y)\left(\Delta|u| + |u|\right)dy}} \leq \underset{\displaystyle \|\phi\|_0}{\underset{\displaystyle \wedge\!\|}{\int g(x,y)|\phi|dy}}$$

よって，$\|u\|_\infty \leq \|\phi\|_0$ である。つまり，$\|G_A(\phi)\|_\infty \leq \|\phi\|_0$ ∎

(注) 今、$\|G_A(\phi)\|_\infty \leq \|\phi\|_0$ を示した。

$$\|G\|_{\ell_1 \to L^\infty} \leq \underset{\uparrow}{\underbrace{1}}$$

Aに依らない!!

さらに，次もなりたつ。

Prop

$G_A : C^\infty(X;E) \to C^\infty(X;E)$ は，
ℓ_0 から ℓ_{00} への有界写像に拡張される。

$$\|u\|_0 := \sup \int g(x,y)\,|u(y)|\,dy$$

$$\|u\|_{00} := \|u\|_\infty + \sqrt{\sup \int g(x,y)\,|\nabla_A u|^2\,dy}$$

課題：このPropを示せ。

以後 前と同じ。

$$\nabla_A^*\nabla_A u + u + H(\nabla_A u, \nabla_A u) + f(u) = \phi$$

$$\underset{\sim\sim\sim\sim}{\nabla_A^*\nabla_A u + u} = -H(\nabla_A u, \nabla_A u) - f(u) + \phi$$

$$u = G_A\left(-H(\nabla_A u, \nabla_A u) - f(u) + \phi\right)$$

$$\mathcal{F}_{A,\phi}(u) := G_A\left(-H(\nabla_A u, \nabla_A u) - f(u) + \phi\right)$$

$\mathcal{F}_{A,\phi}$ が、contraction になることを示す。

11・11.00) 11ムで　（課題；詳細をつめる。）

② まとめ

・**基本の Taubes ノルム**

$$\begin{tikzcd} E \arrow[d] \\ X \arrow[u, bend right, "u"'] \end{tikzcd} \qquad \|u\|_0 := \sup \int g(x,y)\,|u(y)|\,dy$$

函数ラプラシアンの Green核

・**使うべきとき，**

ASD方程式などの "small solution" を作るとき，

・利点

① $|\nabla_A u|$ のアプリオリ評価がほぼ自明に出る。

② 接続があってもなくてもギロンが平行に進む。

③ $\|F^+_{A_0}\|_0 \ll 1$ という条件は、「接続に関して一様」であるので、モジュライ空間と相性もよい。

④ Taubes ノルムそのものが制御しやすいので、近似解を作りやすい。

① $$\int g(x,y)\,|u(y)|\,dy \leq \|u\|_\infty \cdot \underbrace{\int g(x,y)\,dy}_{\wedge\ \infty}$$

$$g(x,y) \sim \frac{1}{d(x,y)^{n-2}}$$

なので、

$$\|u\|_0 \leq C \cdot \|u\|_\infty$$

□ もしも $\mathrm{vol}(\mathrm{supp}(u)) =: v$ だったとき,

$$\int g(x,y)|u(y)|dy$$

$$= \underbrace{\int_{d(x,y)\leq r}}_{①} + \underbrace{\int_{d(x,y)\geq r}}_{②}$$

$$① = \int_{d(x,y)\leq r} g(x,y)|u(y)|dy \leq \|u\|_\infty \cdot C\int_0^r \frac{1}{r^{n-2}} r^{n-1} dr = C\|u\| r^2$$

$$② = \int_{d(x,y)\geq r} g(x,y)|u(y)|dy \leq \frac{C}{r^2}\int_X |u|dy \leq \frac{C}{r^2}\|u\|_\infty \cdot v$$

よって、 $v := \mathrm{vol}(\mathrm{supp}(u))$ のとき、

$$\int g(x,y)|u(y)|dy \leq \underbrace{C\|u\|_\infty \left(r^2 + \frac{v}{r^2} \right)}$$

なので、 $r := v^{\frac{1}{4}}$ とすれば、

$$\leq C\|u\|_\infty \sqrt{v}$$

よって、まとめて、

$$\int g(x,y)|u(y)|dy \leq C\|u\|_\infty \cdot \sqrt{\mathrm{vol}(u)}.$$

$$\begin{cases} ① \displaystyle\int g(x,y)|u(y)|dy \le C\|u\|_\infty \\ ② \displaystyle\int g(x,y)|u(y)|dy \le C\|u\|_\infty \cdot \sqrt{\mathrm{vol}(V)}. \end{cases}$$

よって,

$$u = u_1 + u_2$$

u_1 : small L^∞ norm

u_2 : small support

をとる,

$$\|u\|_0 \le C\|u_1\|_\infty + C\|u_2\|_\infty \sqrt{\mathrm{vol}(\mathrm{supp}(u_2))}$$

となる.

② 今までのギロンのバリエーション

① 右逆を使う.

難点. $\|\cdot\|_{\infty}$ を導入する必要がない

$$\nabla_A^* \nabla_A u + u + H(\nabla_A u, \nabla_A u) + f(u) = \phi$$

$$\Downarrow u = G_A(\eta) \qquad \nabla_A^* \nabla_A u + u = \eta$$

$$\eta + H(\nabla_A(G_A\eta), \nabla_A(G_A\eta)) + f(G_A\eta) = \phi$$

$$\Downarrow$$

$$\eta = -H(\nabla_A(G_A\eta), \nabla_A(G_A\eta)) - f(G_A\eta) + \phi$$

$$\int |\nabla_A u|^2 g(x,y) \leq \int g(x,y)(u,\eta)$$

$$\underbrace{\int |\nabla_A u|^2 g(x,y)}_{\|\nabla_A(G_A\eta)\|_0^2} \leq \|u\|_{\infty} \cdot \|\eta\|_0 \leq \|\eta\|_0^2$$

② $d_A^+ d_A^*$ をそのまま使う。さらに仮定を使う。

⇝ 全面写像との相性がよい。

$$d_{A_0}^+ d_{A_0}^* u + (d_{A_0}^* u \wedge d_{A_0}^* u) + F_{A_0}^+ = 0$$

$$u = -(d_{A_0}^+ d_{A_0}^*)^{-1}\left(F_{A_0}^+ + (d_{A_0}^* u \wedge d_{A_0}^* u)^+\right)$$

③ 非コンパクトのとき。

② 非コンパクトのとき,

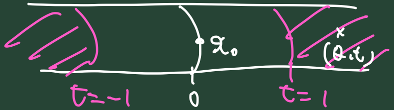
$X = S^3 \times \mathbb{R}$. $\qquad \left(\frac{s}{r} - W^2\right) = \frac{1}{2}$

$$\Delta_y g(x, y) + g(x, y) = \delta_x(y)$$

Prop $\exists C>0 \ \forall x,y\in X$

$$d(x,y)\geq 1 \implies (0<)\, g(x,y) < Ce^{-d(x,y)}$$

(:)



$S^3\times\mathbb{R}$ $\qquad x_0=(\theta_0,\underset{\sim}{0})$

$$C:=\sup_{\substack{|t|=1\\ \theta\in S^3}} g(x_0,(\theta,t))$$

$$u((\theta,t)) := Ce^{C(1-|t|)} - g(x_0,(\theta,t)) \text{ とおく.}$$

$$\left.\begin{aligned} &\cdot\ u|_{t=\pm1}\geq 0\\ &\cdot\ (\Delta+1)u=0 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow u\geq 0.$$

弱最大値原理 (GT Chapter 3 section 1)

② $S^3\times\mathbb{R}$ 上のインスタントンの無限個の貼り合せ.

BPST インスタントン on $\mathbb{R}^4$

$$
\begin{aligned}
A(x) = \frac{1}{1+|x|^2}\Bigg\{ & \begin{pmatrix} \sqrt{-1} & 0 \\ 0 & -\sqrt{-1} \end{pmatrix} (x_1 dx_2 - x_2 dx_1 \\
& \qquad - x_3 dx_4 + x_4 dx_3) \\
& + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} (x_1 dx_3 - x_3 dx_4 + x_2 dx_4 \\
& \qquad - x_4 dx_2) \\
& - \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{-1} \\ \sqrt{-1} & 0 \end{pmatrix} (x_1 dx_4 - x_4 dx_1 \\
& \qquad - x_2 dx_3 + x_3 dx_2) \Bigg)
\end{aligned}
$$

共形変換 $S^3 \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^4$、$\{0\}$ により、

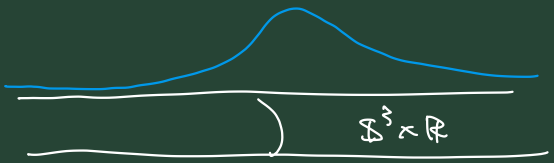
$$(\theta, t) \longmapsto e^t \theta$$

BPST インスタントンを引き戻したものを、

$$I$$

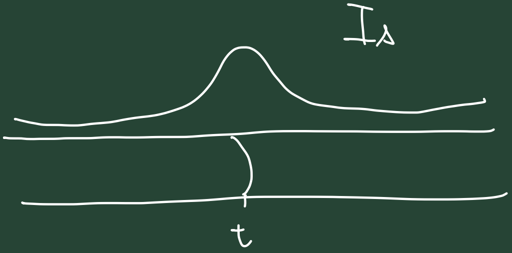
とする。

$$|F(I)|(t, \theta) = \frac{4}{(e^t + e^{-t})^2}, \quad F^+(I) = 0$$



$$\frac{1}{8\pi^2} \int |F(I)|^2 = 1$$

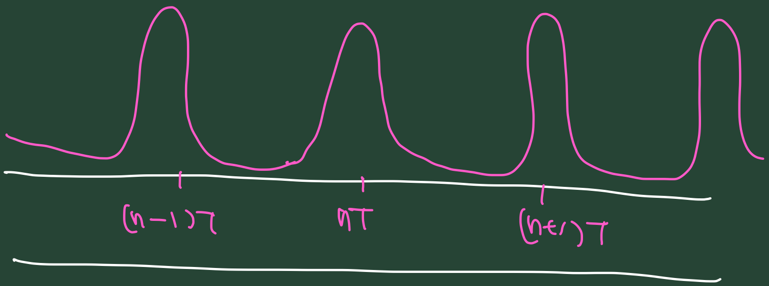
Iの平行移動

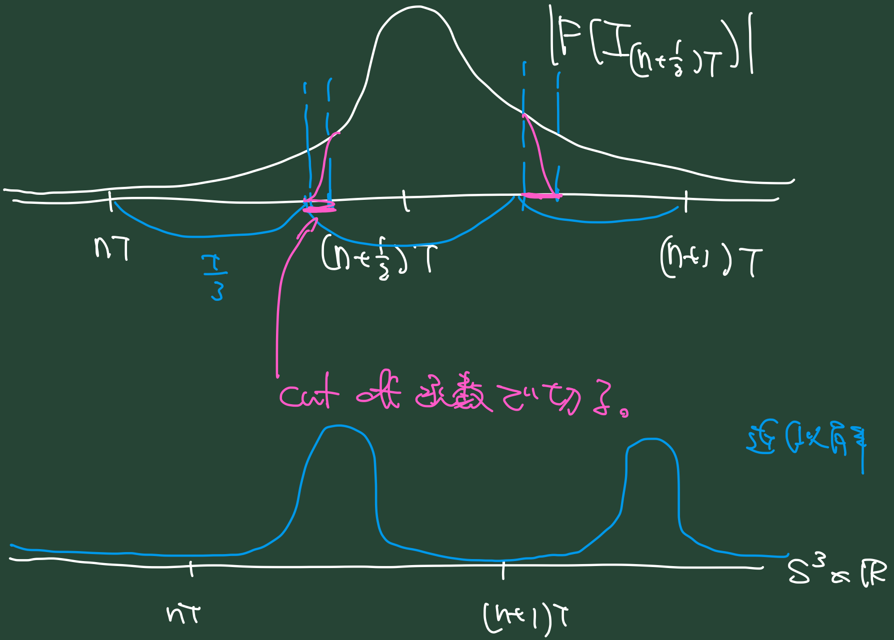


$T \gg 0$ に対して、

$$\left\{ I_{n(T+\frac{1}{2})} \right\}_{n \in \mathbb{Z}}$$

を一気に貼る。





|F[I_{(n+1/2)T}]|
nT
T/3
(n+1/2)T
(n+1)T
cut off 関数で切る。
近似解
S^3 × ℝ
nT
(n+1)T

② 他に話したかったこと

- Green核のコウセイ ⇝ [Aubin]
- 全面写像. (obstruction 付 貼り合せ)

  [Pluen - Weinstein]

  零点の見つけ方

  - Euler数のギロン
  - ブラウアーの不動点定理

中間値の定理

- Lyapunov-Schmidt reduction
- balancing condition

- underdetermined system

  例11 scalar curvature

- 他の貼り合わせの方法