「新装版 ルベーグ積分入門–使うための理輪と演習」(吉田伸生 著)
誤植の訂正と注釈の追加[1]

ここに書いた以外にお気付きの点などございましたら，是非お知らせ頂きますようお願い致します.

以下、「—」 → 「...」 は、「—」を 「...」に訂正するという意味で、(...) 内のお名前はご指摘下さった方です. なお，新装版第 3 刷 (2023 年 3 月発行) では以下に述べる誤植の多くが既に訂正済みです.

- p. 21, 問 1.1.3 (i) 「(1.1)–(1.7)」 → 「(1.1)–(1.4), (1.6), (1.7)」
- 第 2 刷以前 p.27, 問 1.2.5: 2 行目で,「真部分集合」 → 「空でない真部分集合」
- 第 1 刷 p.36, (1.24) 直後，$\varphi(t\pm)$ の定義の後に次を挿入：「また，$-\infty \le s \le t \le \infty$, $\varphi(s)=\varphi(t)=\pm\infty$ の場合，$\varphi(t)-\varphi(s)=0$ と規約する.」また，これに伴って (1.25) を以下に差し替える：

$$a \le s \le t \le b \text{ なら } \mu\left((s,t]\cap\mathbb{R}\right)=\varphi(t)-\varphi(s).$$

- 第 1 刷 p.38, 例 1.5.3: 2 行目の「したがって」は削除. なお $\overline{S}=\overline{S\backslash N}$ の証明は次のとおり： $x\in S$ を任意とし，$\forall r>0,\ B(x,r)\cap(S\backslash N)\neq\emptyset$ ならよい. そこで，これを否定し $\exists r>0,\ B(x,r)\cap(S\backslash N)=\emptyset$ とすると，$B(x,r)\cap S\subset N$ となり，$N\in\mathscr{N}^{\mu}$ に反する.
- 第 1 刷 p.45, 問 2.1.5: 1 行目の 「$\in\mathscr{B}$」を削除 (不要な条件).
- 第 1 刷 p.58, 例 2.3.9(b) の証明 2 行目で「$f+g$」 → 「$(f+g)|_{S_1}$」. また，(c) の証明 2 行目で「f」 → 「$f|_{S_1}$」.
- 第 1 刷 p.64, 例 2.4.4 の条件 (b) のうち「$\int\xi_k d\mu=m$」を削除 (不要な条件).
- 第 1 刷 p.69, 例 2.5.3: 1 行目:「... とする.」→「...，また測度 μ は恒等的に 0 ではないとする.」
- 第 2 刷以前 p.80, 9 行目：「$\varliminf_{n\to\infty}$」→「$\varlimsup_{n\to\infty}$」
- p.85, 2 行目：任意の $\alpha\in\mathbb{N}^d$ に対し $x\in\mathbb{R}^d$, $y>0$ についての多項式 $p(x,y)$ が存在し

  1) $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\alpha}h_t(x)=p(x,t^{-1/2})\exp\left(-\frac{|x|^2}{2t}\right)$.

  これを詳解する：本文にあるように $|\alpha_1|+\cdots+|\alpha_d|$ に関する帰納法による. $\alpha=0$ なら自明である. そこである $\alpha\in\mathbb{N}^d$ に対し 1) の成立を仮定する. このとき任意の $j=1,\ldots,d$ に対し

$$p_j(x,y)=\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)p(x,y)-x_jy^2p(x,y)$$

  は $x\in\mathbb{R}^d$, $y>0$ についての多項式であり,

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\alpha}h_t(x) &= \left(\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)p(x,t^{-1/2})-\frac{x_j}{t}p(x,t^{-1/2})\right)\exp\left(-\frac{|x|^2}{2t}\right)\\ &= p_j(x,t^{-1/2})\exp\left(-\frac{|x|^2}{2t}\right).\end{aligned}$$

  以上より 1) は任意の $\alpha\in\mathbb{N}^d$ に対して正しい.
- p.85, 4 行目の式右辺が t について可積分になる理由：$t^{-k/2}\exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{2t}\right)$ は t について有界であることに注意せよ.
- 第 1 刷 p.92, 問 4.1.2, 2 行目:「$\infty\le\alpha\le\beta\le\infty$」→「$\infty<\alpha\le\beta<\infty$」.
- 第 2 刷以前 p.81, 定理 3.1.3 に対する注意の 3 つ目の 2 行目：「μ が σ-加法族 $\mathscr{A}\supset\mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$ で定義された測度」→ 「μ が $\mathscr{B}(\mathbb{R}^d)^{\mu}\subset\mathscr{A}$ をみたす σ-加法族 $\mathscr{A}$ で定義された測度」.
- 第 1 刷 p.95, (4.8) 直後，$\varphi(t\pm)$ の定義の後に次を挿入：「また，$-\infty\le s\le t\le\infty$, $\varphi(s)=\varphi(t)=\pm\infty$ の場合，$\varphi(t)-\varphi(s)=0$ と規約する.」また，これに伴って (4.9) を以下に差し替える：

$$a \le s \le t \le b \text{ なら } \mu\left((s,t]\cap\mathbb{R}\right)=\varphi(t)-\varphi(s).$$

[1] 2024 年 3 月 5 日更新

- 第 1 刷 p.96, 下から 6 行目「(ii) の証明:」直後に次を挿入「記号を簡単にするために $a=-\infty$ とするが，$a>-\infty$ でも同様である.」

- 第 1 刷 p.153, 系 6.3.5 の証明を次のように修正：
証明: 仮定より，次のような自然数列 $K_1<K_2<\dots$ が存在する：

$$\mu(|F_{K_n}-f|>1/n)<2^{-n}.$$

このとき，任意の $N\geq 1$ に対し，

$$\begin{aligned}\mu(\sup_{n\geq N}|F_{K_n}-f|>1/N) &= \mu\left(\bigcup_{n\geq N}\{|F_{K_n}-f|>1/N\}\right)\\ &\overset{\text{測度の劣加法性}}{\leq} \sum_{n\geq N}\mu\left(|F_{K_n}-f|>1/N\right)\\ &\leq \sum_{n\geq N}\mu\left(|F_{K_n}-f|>1/n\right)\\ &\leq \sum_{n\geq N}2^{-n}\longrightarrow 0,\ \ (N\nearrow\infty).\end{aligned}$$

ゆえに，$f_n \stackrel{\text{def.}}{=} F_{K_n}$ は命題 6.3.3 の (a) を，したがって (a)–(c) を全て満たす．　\(^▫^)/

- p.177，系 7.5.4 は，仮定の「全ての $C\in[0,\infty)$ に対し...」を「ある $C\in(0,\infty)$ に対し...」に緩めても成立する (著者)．証明の概略は次の通り．$q\in(1,\infty]$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, かつ $g\in L^q(\mu)$ が全ての多項式と直交すると仮定し，$g=0$, μ-a.e. を示す．μ は有限測度なので $g\in L^1(\mu)$ であり，$gd\mu$ は符号つき測度を定める．そこで，そのフーリエ変換が恒等的に零ならよい．$\theta\in\mathbb{R}^d$ を任意，$\delta=\frac{1}{p}\frac{C}{1+|\theta|}$ とする．このとき，$z\in\mathbb{C}$, $|\mathrm{Re}\,z|<\delta$ に対し $F_\theta(z)\stackrel{\text{def}}{=}\int_{\mathbb{R}^d}\exp(z\,\theta\cdot x)g(x)d\mu(x)$ は z について正則であり，特に $F_\theta(\mathbf{i})$ が $gd\mu$ のフーリエ変換である．ところが，$|z|<\delta$ なら exp の展開と仮定より $F_\theta(z)=0$. ゆえに一致の定理より $F_\theta(\mathbf{i})=0$.

- p.215, 補題 9.3.7．証明の省略部分のうち,「$\widetilde{\mathscr{A}}$ が可算和で閉じる」に証明を与える．任意の $\{B_n\}_{n\geq1}\subset\widetilde{\mathscr{A}}$ に対し $B\stackrel{\text{def}}{=}\bigcup_{n=1}^\infty B_n\in\widetilde{\mathscr{A}}$ ならよい．このとき $\{B_n\}_{n\geq1}\subset\widetilde{\mathscr{A}}$ により，任意の $\varepsilon>0$ に対し $\{A_n\}_{n\geq1}\subset\mathscr{A}_0$ が存在し, $\forall n\geq1$, $\mu(A_n\triangle B_n)<2^{-(n+1)}\varepsilon$．そこで $A=\bigcup_{n=1}^\infty A_n$ とすると，$B\triangle A\subset\bigcup_{n=1}^\infty(B_n\triangle A_n)$ より，

1) $\mu\left(B\triangle A\right)\leq\sum_{n=1}^\infty\mu(B_n\triangle A_n)<\varepsilon/2.$

また，$\bigcup_{n=1}^N A_n$ は N について単調増大するので，N を十分大きくとると

$$\mu(A)<\mu\left(\bigcup_{n=1}^N A_n\right)+\varepsilon/2.$$

さらに，$A\triangle\left(\bigcup_{n=1}^N A_n\right)=A\setminus\left(\bigcup_{n=1}^N A_n\right)$ より

2) $\mu\left(A\triangle\left(\bigcup_{n=1}^N A_n\right)\right)=\mu(A)-\mu\left(\bigcup_{n=1}^N A_n\right)<\varepsilon/2.$

以上より，

$$\mu\left(B\triangle\left(\bigcup_{n=1}^N A_n\right)\right)\leq\mu\left(B\triangle A\right)+\mu\left(A\triangle\left(\bigcup_{n=1}^N A_n\right)\right)\overset{1),\,2)}{<}\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon.$$

上式と $\bigcup_{n=1}^N A_n\in\mathscr{A}_0$ より $B\in\widetilde{\mathscr{A}}$.

- 第 2 刷以前 p.243，補題 11.1.7 の証明, 2 行目：「$(\varphi(x_1),\varphi(x_2))$」$\longrightarrow$「$(\varphi_1(x_1),\varphi_2(x_2))$」(吉永彰成氏)．

- 第 2 刷以前 p.267 問 2.3.9 (i): 最初の部分に次を挿入．「μ は個数測度なので $\infty\in f(S)$ なら所期等式は $\infty=\infty$ で成立する．ゆえに $f(S)\subset[0,\infty)$ としてよい.」

- 第 2 刷以前 p.267, 問 2.3.10: 最初の部分に次を挿入．「μ は個数測度なので $\infty \in f(S)$ なら所期等式は $\infty = \infty$ で成立する．ゆえに $f(S) \subset [0, \infty)$ としてよい.」
- 第 2 刷以前 p.269, 問 2.4.7 (b) の解答が $\{\xi_n\}$ が実数値の場合に限られている．一般には以下のとおり.
  (1.22) より $\int \xi_k d\mu = \sum_{\alpha \in A} \alpha\mu(\xi_k = \alpha) = \sum_{\alpha \in A} \alpha p_\alpha = m$. また $k < \ell$ なら，(1.23) より $\mu(\xi_k = \alpha, \xi_k = \beta) = p_\alpha p_\beta$. ゆえに $\int \xi_k \overline{\xi_\ell} d\mu = \sum_{(\alpha,\beta) \in A^2} \alpha\overline{\beta}\mu(\xi_k = \alpha, \xi_k = \beta) = \sum_{(\alpha,\beta) \in A^2} \alpha\overline{\beta} p_\alpha p_\beta = |m|^2$. これより $\int (\xi_k - m)(\overline{\xi_\ell} - \overline{m}) d\mu = \int (\xi_k \xi_\ell - \overline{m}\xi_k - m\overline{\xi_\ell} + |m|^2) d\mu = 0$.

ご指摘を頂いた方々に厚くお礼申しあげます.