線形代数学 II　中間試験解答と講評

2006 年１２月２２日

浪川　幸彦

次のベクトルは線型独立か線型従属かを判定せよ。後者の場合は自明でない線型関係を一つ挙げよ：

1) $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}7\\8\\9\end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix}1\\0\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix}a\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\a\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\a\end{pmatrix}$

解

1)　線型従属である。非自明な従属関係は例えば

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}7\\8\\9\end{pmatrix} = 0$$

2)　線型独立である。理由は

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\0 & 1 & 1\\1 & 0 & 1\end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

3)

$$\begin{vmatrix}a & 1 & 1\\1 & a & 1\\1 & 1 & a\end{vmatrix} = (a-1)^2(a+2)$$

よって $a \neq 1, a \neq -2$ ならば行列式が 0 でないので，線型独立。
$a = 1$ ならば線型従属で，非自明な従属関係は例えば

$$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = 0.$$

$a = -2$ ならば線型従属で，非自明な従属関係は例えば

$$\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} = 0.$$

講評

［1) 5 点, 2) 5 点, 3) 10 点計 20 点満点，平均 16.6 点］

基本的な問題。必ずできないと困る。

非自明な線型従属関係のあることが線型従属の定義なので，関係を示せば，線型従属であることの証明としては十分。それ以上の理由を書く必要はない。自分で判定のため計算するプロセスとしては必要であろうが，答案としては要らない。1) くらいはもう視察で従属関係を見つけてほしい。

2) では階数の計算をして独立性を示した人が多かった。この問題では，手間があまり変わらないが，普通はここでやったように 0 でない行列式を見つける方が速い。

問題 2

k 個の n 次元ベクトル $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k\}$ が一次独立であるとし，もう一つの n 次元ベクトル $\boldsymbol{b}$ を考える。このとき次の二つの命題は同値であることを示せ：

i) $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{b}\}$ は線型従属である；

ii) $\boldsymbol{b}$ は $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k\}$ の線形結合として書ける。

解

ii) ⇒ i). 題意よりスカラー $\alpha_1, \alpha_2, \ \ldots, \ \alpha_k$ が存在して

$$\boldsymbol{b} = \alpha_1 \boldsymbol{a}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{a}_2 + \cdots + \alpha_k \boldsymbol{a}_k.$$

移項すれば

$$\alpha_1 \boldsymbol{a}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{a}_2 + \cdots + \alpha_k \boldsymbol{a}_k + (-1)\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}.$$

これは非自明な線型従属関係である。よって i).

i) ⇒ ii). 題意より，すべてが 0 とはならないスカラー $c_1, c_2, \ \ldots, \ c_k, c_{k+1}$ があって，

$$\boldsymbol{a}_1 + c_2 \boldsymbol{a}_2 + \cdots + c_k \boldsymbol{a}_k + c_{k+1}\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}.$$

もし $c_{k+1} = 0$ ならば

$$c_1 \boldsymbol{a}_1 + c_2 \boldsymbol{a}_2 + \cdots + c_k \boldsymbol{a}_k = \boldsymbol{0}$$

となるから，$\{\boldsymbol{a}_i\}$ の線型独立性に矛盾する。よって $c_{k+1} \neq 0$. ゆえに

$$\boldsymbol{b} = -\frac{c_1}{c_{k+1}} \boldsymbol{a}_1 - \frac{c_2}{c_{k+1}} \boldsymbol{a}_2 - \cdots - \frac{c_k}{c_{k+1}} \boldsymbol{a}_k.$$

講評

［10 満点，平均 2.8 点］

論理の問題なので，厳密に採点したせいもあるが，非常に出来が悪かった。証明の場合の

出発点としては，定義を数式の形できちんと書くことが大切。特に線型代数の場合にそれが当てはまる。つまり日本語を数学語に翻訳するのである。

i) ⇒ ii) の証明で，何もことわらずに（上の記号で） c_{k+1} でわった答案が多かった。非自明な従属関係があるとき，どこかの係数は 0 でないのだが，それが特定の場所でそうなっているかどうかは一般には分からない。今の場合，$\boldsymbol{b}$ 以外のベクトル達が線型独立であることから，それが従うのである。

問題３

A を n 次正方行列とする。次のように定義される V^n の部分集合は部分空間か？　理由を付けて答えよ。

１）$W_1 = \{\boldsymbol{x} \in V^n; A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}\}$, ただし $\boldsymbol{b} \in V^n$；

２）$W_2 = \{\boldsymbol{x} \in V^n; A\boldsymbol{x} = c\boldsymbol{x}\}$, ただし c はスカラー

解

1) $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$ のときは部分空間ではない。理由：$\boldsymbol{0} \notin W_1$.

$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ のときは部分空間である。理由：$\boldsymbol{0} \in W_1$ は明らか。

$$A\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{0}, A\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{0} \quad \Rightarrow \quad A(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2) = A\boldsymbol{x}_1 + A\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{0}$$
$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}, c \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad A(c\boldsymbol{x}) = c(A\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$$

2) 部分空間である。理由：まず $\boldsymbol{0} \in W_1$ は明らか。

$A\boldsymbol{x}_1 = c\boldsymbol{x}_1, A\boldsymbol{x}_2 = c\boldsymbol{x}_2$ であれば,

$$A(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2) = A\boldsymbol{x}_1 + A\boldsymbol{x}_2 = c\boldsymbol{x}_1 + c\boldsymbol{x}_2 = c(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2).$$

$A\boldsymbol{x} = c\boldsymbol{x},\ \alpha \in \mathbb{R}$ であれば,

$$A(\alpha\boldsymbol{x}) = \alpha(A\boldsymbol{x}) = \alpha(c\boldsymbol{x}) = (\alpha c)\boldsymbol{x} = (c\alpha)\boldsymbol{x} = c(\alpha\boldsymbol{x}).$$

講評

［10 点満点 1) 6 点, 2) 4 点，平均 5.8 点］

これも定義に立ち戻れば，難しい問題ではないが，出来がよかったとは言えない。特に 1) で $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ の場合を見逃した答案が非常に多かった。きちんと定義に戻れば，この場合を別扱いしなければならないことも分かる。

1) で $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ となることが部分空間となるために必要であることを導きながら，それが十分であること，つまりこの場合に部分空間の定義をみたすことの証明がされていないものが多かったが，大目に見た。厳密には必要である。

問題 4

V^4 の中で次のベクトル達から生成される部分空間の次元と一組の基底を求めよ：

$$\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1\\3\\-2\\1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1\\-1\\2\\1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1\\2\\-1\\1\end{pmatrix}$$

解

$$\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&3&-1&2\\1&-2&2&-1\\1&1&1&1\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&3&-1&2\\0&-3&1&-2\\0&0&0&0\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&3&-1&2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

したがってこの行列の階数は 2. ところで $\begin{vmatrix}1&1\\0&3\end{vmatrix}=3\neq 0$ だから, $\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\3\\-2\\1\end{pmatrix}$ は線型独立。よって基底。

［別解］列変形を行うと,

$$\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&3&-1&2\\1&-2&2&-1\\1&1&1&1\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&3&-1&2\\1&-3&1&-2\\1&0&0&0\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&-1&0\\1&0&1&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}$$

したがってこの行列の階数は 2. $\begin{pmatrix}0\\-1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\1\end{pmatrix}$ に注意すれば, $\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\1\end{pmatrix}$ も基底であることが分かる。

講評

［10 点満点，平均 7.4 点］

これは基本的な問題なので，必ずできてほしい。
列変形は，このように生成系が分かっているときに有効。これに対して行変形は，定義方程式が分かっている場合に有効なやり方（次問参照）。

問題 5

V^4 の中で次のように定義される部分空間 W_1, W_2 および $W_1 \cap W_2,\ W_1 + W_2$ の次元と一組の基底を求めよ：

$$
\begin{aligned}
W_1 &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in V^4; x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 0,\ -x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 0 \right\}; \\
W_2 &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in V^4; x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0,\ -4x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 0 \right\}
\end{aligned}
$$

解

まず定義方程式の解を求めることにより，W_1, W_2 の基底を求める。まず W_1.

$$
\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}
$$

したがって解は $\begin{pmatrix} s+t \\ t \\ s \\ t \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. 右辺の二つのベクトルが基底。

W_2 も同様にして $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -3 \\ -4 & 2 & -3 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ から，基底として $\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \}$ が取れる。

［少し変形の仕方を変えて，$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -3 \\ -4 & 2 & -3 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ に持って行くと，基底として $\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \}$ が取れる。これだと共通のベクトル $\boldsymbol{a}_0$ がもう現れているので，議論が簡単になる。］

$W_1 \cap W_2$ は W_1, W_2 定義方程式すべてによって定義されるから，これを解いて

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & -3 \\ -4 & 2 & -3 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 6 & -7 & -6 \end{pmatrix} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

よって解は $s\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix}$. すなわち $\boldsymbol{a}_0 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix}$ が基底。

$W_1{+}W_2$. ベクトル $\boldsymbol{a}_0$ と，これと線型独立な W_1 の基底のうち一つを取れば，W_1 の基底が得られる。上で求めた基底を用いれば，$\{\boldsymbol{a}_0, \boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}\}$ は W_1 の基底。同様に $\{\boldsymbol{a}_0, \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix}2\\1\\-2\\0\end{pmatrix}\}$ は W_2 の基底。したがって $\{\boldsymbol{a}_0, \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2\}$ が $W_1 + W_2$ の基底となる。

講評

［各部分空間毎に 10 点計 40 点満点，平均 25.9 点］

W_1, W_2 の次元と基底を求めることは，同次方程式の解法として，前期の掃き出し法で既に学んでいる。したがってこの問題で 20 点取れなかった人は，十分復習をしてほしい。またその方法を使わず，中学以来の消去法に頼っている人もかなりあったが，その方法では変形によって同じ解を求めているかどうかが明らかではない。

計算間違いもかなりあった。今の場合，線型方程式系で部分空間が定義されているので，求めた基底がその部分空間に属するベクトルかどうかは方程式に代入してみれば直ちに分かる。これでかなりのミスを防げるはずである。

もう一つ目立った間違いは，上で $W_1 \cap W_2$ を求めたときに用いた線型方程式系の係数行列の階数を計算するまではいいが，それを $W_1 + W_2$ の次元と等しいとする解答が非常に多かったことである。今の場合は偶々一致するが，一般には全く別物である。さらに甚だしい誤りとして，この線型方程式系を解いて得られた解を $W_1 + W_2$ の基底とした者が複数ある。この場合はより大きな部分空間である $W_1 + W_2$ が W_1 あるいは W_2 より小さい次元を持ってしまうわけで，その不都合には直ちに気付かねばならない。線型方程式系の係数行列の階数は本質的な「方程式の数」を表すものであり，元来の変数から，それだけ少ない数の解が得られるのである。これは前章末の **Theorem 2.4.5** に他ならない。

問題 6

V^4 の任意のベクトル $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ に次のベクトルを対応させる写像は V^4 の線型変換である。対応する変換行列（4 次正方行列）を求めよ：

１）$\begin{pmatrix} x_4 \\ x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$ ；　２）$\begin{pmatrix} ax_1 + x_2 \\ ax_2 + x_3 \\ ax_3 + x_4 \\ ax_4 \end{pmatrix}$　ただし a はスカラー

解

1)

$$\begin{pmatrix} x_4 \\ x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

2)

$$\begin{pmatrix} ax_1 + x_2 \\ ax_2 + x_3 \\ ax_3 + x_4 \\ ax_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

講評

［各 5 点計 10 点満点，平均 8.7 点］

表現行列を求めることは，基本であるが，よくできていた。答のみであっても減点しなかったが，ここでの解答のように書けば，十分な証明になっている。これが表現行列の定義だからである。

問題 7 [ボーナス問題]（時間が余った人のために）

2 次正方行列 $X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$ を 4 次元ベクトル $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in V^4$ と同一視する（行列の和やスカラー倍は，係数の和やスカラー倍であることに注意）。

2 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ に対し，写像

$$L_A : X \mapsto AX, \quad R_A : X \mapsto XA$$

は V^4 の線型変換を引き起こすが，これらの表現行列を求めよ。

解

$$L_A(X) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_3 & x_2 + 2x_4 \\ 3x_1 + 4x_3 & 3x_2 + 4x_4 \end{pmatrix}$$

であるから，これを書き換えれば

$$\begin{pmatrix} x_1 + 2x_3 \\ x_2 + 2x_4 \\ 3x_1 + 4x_3 \\ 3x_2 + 4x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}.$$

$$R_A(X) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 3x_2 & 2x_1 + 4x_2 \\ x_3 + 3x_4 & 2x_3 + 4x_4 \end{pmatrix}$$

であるから，これを書き換えれば

$$\begin{pmatrix} x_1 + 3x_2 \\ 2x_1 + 4x_2 \\ x_3 + 3x_4 \\ 2x_3 + 4x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}.$$

講評

［各 5 点計 10 点満点，平均 2.5 点］
ボーナス問題としては，できた人が多く，嬉しかった。直前の問題が肩慣らしになったためかも知れない。これからこのように行列，関数などからなる抽象的なベクトル空間を考える機会が増えるので，それに慣れていってほしい。

総評

［100 点満点，平均点 67.2（いずれもボーナス問題を除く）］
　計算の基本問題については多くの人が合格水準に達していた。これに対し，概念を問う問

題（問３），論理の問題（問２）の出来は非常に悪かった。数学の概念は正確に，そして意味を把握することで，記憶してほしい。数は少ないが，概念理解の不十分な人がいる。その場合計算でも間違いを犯すことになる。今回 60 点未満であった人は，特に諸概念とその基本性質，基本例をもう一度復習してほしい。さらに 50 点に満たない人はよほど努力しないと，期末試験でよりよい成績を取ること，したがって合格することは難しいだろう。学習の仕方等については遠慮なく相談して下さい。

　行列の変形と行列式の計算と記号の混乱がある人が，まだ複数名存在する。( ) は行列を表し，|　| は行列式を表していて，後者は「数」である。

注意

採点に納得できない部分がある場合には遠慮なく申し出てください。ただし期限は解答を返却された**次の講義日**までとします。申し出る機会としては講義終了時あるいはオフィスアワーを利用して下さい。
メールアドレスは　namikawa@math.nagoya-u.ac.jp　です。

得点分布

得点	人数
91 点以上	12 名
81 点以上 90 点以下	18 名
71 点以上 80 点以下	13 名
61 点以上 70 点以下	12 名
51 点以上 60 点以下	16 名
41 点以上 50 点以下	7 名
40 点以下	7 名

よいクリスマスと新年をお迎え下さい！