線形代数学 I

浪川　幸彦

April 14, 2006

0　記号一覧表

以下の記号は講義の中で断りなしに使います。初めてのものもあるかと思いますが，慣れて下さい。

0.1　命題論理記号

記号	*Read in English*	**意味内容**
$\forall$	For all ...	すべての... に対し
$\exists$	For some ...	ある... に対し
	There exists ...	... が存在する
s.t.	such that ...	... であるような
A := B	Define A as B	A を B と定義する
	Call A as B	B のことを A と呼ぶ
$A \Rightarrow B$	If A, then B	A ならば B
$A \Leftrightarrow B$	A is equivalent to B	A と B とは同値
e.g.	for example	例えば (exempli gratia)
i.e.	namely, that is	すなわち (ipso esto)
Def.	**Definition**	定義
Th., Theo,	**Theorem**	定理（大事な命題）
Prop.	**Proposition**	命題（普通の命題）
Lemma	**Lemma**	補題（補助の命題・実は鍵の命題）
Cor.	**Corollary**	系（定義，定理からすぐ導ける命題）
Rem.	*Remark*	注意（補充説明）

Proof	*Proof*	証明
Ex.	**Exercise**	練習問題

0.2 集合

$\in$, $\subset$, $\supset$, $\cup$, $\cap$
Remark. $\subset$, $\supset$ は “$=$” を含む

0.3 数の集合

記号	**数の集合**	**可能な演算**
$\mathbb{N}$	自然数全体	加法と乗法
$\mathbb{Z}$	整数全体	加法と減法と乗法
$\mathbb{Q}$	有理数全体	加法と減法と乗法と除法－四則演算
$\mathbb{R}$	実数全体	加法と減法と乗法と除法－四則演算
$\mathbb{C}$	複素数全体	加法と減法と乗法と除法－四則演算

1 写像についての基本事項

・ここに述べることは（「集合」と同様）単なる「言葉」なので，慣れてほしい。

Definition 1.0.1. 集合 V, W がある。V から W への**写像** $T : V \to W$ とは，V の要素 a に対し，W の要素 $T(a)$ を対応させる仕方が定められているものをいう。
　このとき $T(a)$ を要素 a の（T による）**像** という。

Example. （実）関数 $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
　写像とは関数の一般化であると思え！

Definition 1.0.2. 集合 V から自分自身への写像のことを **変換** とよぶ場合がある。

Definition 1.0.3. 集合 V において，要素 a にそれ自身を対応させる写像を**恒等写像**とよび，Id_V と書く。

Definition 1.0.4. 二つの写像 $S : U \to V,\ \ T : V \to W$ に対し，その**合成写像** $T \circ S$ を

$$(T \circ S)(a) = T(S(a))$$

と定義する。

Remark. 数における「積」に似ているので**積写像**ともいう。このとき恒等写像は１に対応する：$Id_W \circ T = T \circ Id_V$.

Definition 1.0.5. 写像 $T : V \to W$ に対し，$T^{-1} \circ T = Id_V$ および $T \circ T^{-1} = Id_V$ をみたす写像 T^{-1} を T の**逆写像**という。

Proposition 1.0.6. 逆写像は存在すれば，ただ一通りである。

Example. 逆関数

2　平面と空間の幾何学，複素数平面

高校で学んだベクトルや直線・平面について復習するとともに，高校で学んでいない幾つかの基本的事項を補う。

2.1　平面・空間ベクトル

高校で学んだベクトルは，実は二つの見かけ上異なる概念からなっている。しかし直交座標系を通して両者は同一視され，それによって幾何と代数とが結び付くのである。これはデカルトの偉大なアイデアによるものであった。

幾何ベクトル	$\Leftrightarrow$	数ベクトル
平面幾何学	$\Leftrightarrow$	２次元ベクトル空間の幾何学
立体幾何学	$\Leftrightarrow$	３次元ベクトル空間の幾何学
高次元幾何学	$\Leftrightarrow$	高次元ベクトル空間の幾何学

Remark. ベクトルや内積の記号は多くの場合高校で用いられているものと異なる：

高等学校	$\leftrightarrow$	大学教科書
$\vec{a}$	$\leftrightarrow$	$\mathbf{a}$
$(\vec{a} \cdot \vec{b})$	$\leftrightarrow$	$(\mathbf{a}\vert\mathbf{b})$, $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$

数学の記号は本によっても異なることが少なくない。

Definition 2.1.1 (Text 1.1.1). **平面ベクトル・空間ベクトル**。これらには**加法・減法，スカラー倍**の演算がある。
本来縦ベクトルで書くべきだが，スペースの節約のため誤解のおそれがないときは横書きする。

Definition 2.1.2 (Text 1.1.2). １）**線型結合［一次結合］**。２）**線型独立［一次独立］・線型従属［一次従属］**。

Remark. ここにあるように「線型」,「線形」,「一次」の用語はすべて同じ意味。

Proposition 2.1.3. １）二つの平面ベクトルが線型従属になる必要十分条件は，一方が他のスカラー倍として表せることである；
２）三つの空間ベクトル $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ が線型従属になる必要十分条件は，どれかが０ではない実数 c_1, c_2, c_3 が存在して

$$c_1\mathbf{a}_1, +c_2\mathbf{a}_2, +c_3\mathbf{a}_3 = \mathbf{0}$$

となることである。

Proposition 2.1.4. １）平面ベクトルは（二つの）単位ベクトル $\mathbf{e}_1 = (1,0), \mathbf{e}_2 = (0,1)$ の線型結合として一意的に書ける；
２）空間ベクトルは（三つの）単位ベクトル $\mathbf{e}_1 = (1,0,0), \mathbf{e}_2 = (0,1,0), \mathbf{e}_3 = (0,0,1)$ の線型結合として一意的に書ける。

Definition 2.1.5 (Text 1.1.3). １）二つのベクトルの**内積**。２）ベクトルの**長さ**。

Proposition 2.1.6 (Text 1.1.3). １）Schwarz の不等式；
２）三角不等式；
３）中線公式　$\|\mathbf{a}+\mathbf{b}\| + \|\mathbf{a}-\mathbf{b}\| = 2(\|\mathbf{a}\| + \|\mathbf{b}\|)$

Definition 2.1.7. 二つの（平面・空間）ベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ が**直交する**とは，$(\mathbf{a}|\mathbf{b}) = 0$ であることをいう。

Proposition 2.1.8. １）いずれも０でない二つの直交する平面ベクトルは線型独立である；
２）いずれも０でない互いに直交する三つの空間ベクトルは線型独立である。