

# 団代数・ルート系・散乱図式

中西 知樹 (名古屋大学大学院多元数理科学研究科)

## はじめに

早いもので団代数が導入されて20年がたち、すでに代数学、幾何学、解析学、数理物理学など広くさまざまな分野における応用や関連が知られている。したがって、団代数の有用性と重要性はもはや明らかと言って良いと思うが、一方で「残念ながら団代数自身の本質的な定義にはいまだ達していない」というのが講演者独自の視点である。それは群論で言えば「具体的な鏡映群は知っているが、Coxeter群やルート系の観点には達していない」という状況におおよそ例えることができるかもしれない。本講演では、このような視点に基づいて、団代数について予備知識がない人を念頭に、団代数の良い点を紹介しつつ、「団代数の何がわかっていないのか」を説明する。また、団代数とルート系との関係、ならびに団代数理論の重要な定理を証明するうえで有効な方法である散乱図式についても合わせて紹介する。本講演とこのノートがこれから団代数を学ぶ人に対していくばくかの道標になれば幸いである。

## 1. 団代数

### 1.1. Fomin-Zelevinskyによる団代数の定義

団代数 (cluster algebras) は、2000年ごろに Fomin-Zelevinsky [FZ02] が、Lie理論における代数多様体 (たとえば、Grassmann多様体、 $SL_k$ 、半単純Lie群の二重Bruhat胞体など) に現れる代数構造を正值性やLaurent性の観点から一般化した可換代数のクラスである。一方、ほぼ同時期に、本質的に独立に、曲面の三角分割やTeichmüller理論の量子化・高次化などの幾何学的観点から、Fock-Goncharov [FG09] が団代数の概念に到達したことも特筆すべきことである。(その原型は[CF99]に遡る。) 現在ではそれらの当初の目的と動機を大きく超えて、団代数(あるいはより広く団構造)は数学のさまざまな分野に普遍的・横断的に現れる代数的組み合わせ論的構造として多くの研究者に認識されている。そしてまたその状況は、同じく代数的組み合わせ論的構造であるルート系を想起させる。実際、団代数はルート系とも深く関係する。

なにはともあれ、まずはFomin-Zelevinsky [FZ02]による団代数の定義を述べよう。

団代数においては、種子(seed)と変異(mutation)という二つの概念が基本的である。まず始めに自然数 $n$ を固定する。これは団代数のランクと呼ばれる。

**定義 1.1.**  $n$ 次整数正方行列  $B = (b_{ij})_{i,j=1}^n$  に対して、ある正整数対角行列  $D = (d_i \delta_{ij})_{i,j=1}^n$  が存在して

$$d_i b_{ij} = -d_j b_{ji}, \quad (1)$$

すなわち、 $DB$ が反対称行列となるとき、 $B$ を**反対称化可能**(skew-symmetrizable)といい、 $D$ を $B$ の(左)**反対称化子**(skew-symmetrizer)という。

**定義 1.2.**  $\mathcal{F}$ を $n$ 変数の有理関数体と同形な体とする。 $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ を $\mathcal{F}$ の代数的に独立な $n$ 個の元の組とする。また、 $B$ を $n$ 次の反対称化可能(整数)行列とする。このとき、ペア $\Sigma = (\mathbf{x}, B)$ を**種子**(seed)という。変数の組 $\mathbf{x}$ を**団**(cluster)、各変数 $x_i$ たちを**団変数**(cluster variables)、行列 $B$ を**交換行列**(exchange matrix)という。また、 $\mathcal{F}$ を(団変数の)**周囲体**(ambient field)という。

**注意 1.3.** より一般には、種子を定義するにあたって始めに係数半体(coefficient semifield)というものを与えるのであるが、ここでは簡単のため、(係数半体が自明半体である)係数なしの団変数(cluster variables without coefficients)のみを考える。

本稿は2021年度日本数学会年会(慶應大, 2021年3月)企画特別講演アブストラクト原稿の修正版(ver.2021.3.25)である。

任意の整数  $a$  に対して,

$$[a]_+ := \max(a, 0) \quad (2)$$

と定める. 以下の公式をよく用いる.

$$a = [a]_+ - [-a]_+. \quad (3)$$

次に種子の変異を定義する.

**定義 1.4.** 任意の種子  $\Sigma = (\mathbf{x}, B)$  と  $k \in \{1, \dots, n\}$  に対して, 新しい種子  $\Sigma' = (\mathbf{x}', B')$  を以下で定める.

$$x'_i = \begin{cases} x_k^{-1} \left( \prod_{j=1}^n x_j^{[b_{ji}]_+} + \prod_{j=1}^n x_j^{[-b_{ji}]_+} \right) & i = k, \\ x_i & i \neq k, \end{cases} \quad (4)$$

$$b'_{ij} = \begin{cases} -b_{ij} & i = k \text{ or } j = k, \\ b_{ij} + b_{ik}[b_{kj}]_+ + [-b_{ik}]_+ b_{kj} & i, j \neq k. \end{cases} \quad (5)$$

種子  $\Sigma'$  を  $\Sigma$  の  $k$  における**変異** (mutation) といい,  $\mu_k(\Sigma)$  と表す.

上の定義より,  $\mu_k$  は対合的である, すなわち, 定義 1.4 において

$$\Sigma = \mu_k(\Sigma')$$

であることが容易に確かめられる. これより  $\mathbf{x}'$  が代数的に独立的であることがわかる. さらに,  $B'$  は  $B$  と同じ反対称化子  $D$  により反対称化可能であることも容易に確かめられる. 以上より  $\mu_k(\Sigma)$  が実際に種子であることがわかる. また,  $B$  が反対称行列ならば,  $B'$  も反対称行列であることにも注意する.

$\mathbb{T}_n$  を  $n$  **正則木** ( $n$ -regular tree), すなわち各頂点からちょうど  $n$  本の辺が出ているサイクルを持たないグラフとする. さらに, 各頂点から出ている辺には  $1$  から  $n$  までのラベルが重複なく付与されているものとする. また, 記号を濫用してグラフ  $\mathbb{T}_n$  の頂点の集合も  $\mathbb{T}_n$  と表す.

**定義 1.5.**  $n$  正則木の頂点集合  $\mathbb{T}_n$  を添字集合に持つ種子の族  $\Sigma = \{\Sigma_t = (\mathbf{x}_t, B_t)\}_{t \in \mathbb{T}_n}$  において, ラベル  $k$  を持つ辺で結ばれている任意の頂点のペア  $t, t' \in \mathbb{T}_n$  に対して  $\Sigma_{t'} = \mu_k(\Sigma_t)$  となる時,  $\Sigma$  を**団パターン** (cluster pattern) という. また, 団パターンから交換行列の族を取り出したもの  $\mathbf{B} = \{B_t\}_{t \in \mathbb{T}_n}$  を  $B$  **パターン** ( $B$ -pattern) という.

**注意 1.6.**  $B$  パターン  $\mathbf{B} = \{B_t\}_{t \in \mathbb{T}_n}$  に属する全ての行列  $B_t$  に対して共通の反対称化子  $D$  をとることができる. 特に,  $B_t$  の一つが反対称行列であれば, 全ての  $B_t$  は反対称行列である.

団パターン  $\Sigma$  の種子  $\Sigma_t = (\mathbf{x}_t, B_t)$  に対して, 以下の記号を用いる.

$$\mathbf{x}_t = (x_{1,t}, \dots, x_{n,t}), \quad B_t = (b_{ij}^t)_{i,j=1}^n. \quad (6)$$

$n$  正則木  $\mathbb{T}_n$  の任意の頂点  $t_0$  を一つ固定し, **初期頂点** (initial vertex) と呼ぶことにする. 団パターン  $\Sigma$  に対して, 初期頂点  $t_0$  における種子  $\Sigma_{t_0}$  を  $\Sigma$  の**初期種子** (initial seed) という. 団パターン  $\Sigma$  は初期種子  $\Sigma_{t_0}$  から  $\mathbb{T}_n$  上で変異を繰り返すことにより一意的に定まる.

**定義 1.7.** 団パターン  $\Sigma$  に対して, 周圏体  $\mathcal{F}$  において全ての団変数  $x_{i,t}$  ( $i = 1, \dots, n; t \in \mathbb{T}_n$ ) の生成する  $\mathbb{Z}$  部分代数  $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\Sigma) = \mathcal{A}(\Sigma_{t_0})$  を  $\Sigma$  の定める (あるいは初期種子  $\Sigma_{t_0}$  の定める) **団代数** (cluster algebra) という.

すなわち、団代数とは何かを平易に述べれば、「初期団変数から変異を繰り返して芋づる式に得られる全ての団変数で生成される代数」となる。

本稿では、団代数そのものではなく、その背後にある団パターンをより基本的な「団構造 (cluster structure)」の核心と考え、もっぱら団パターンについて論じる。もちろん、団代数の元々の導入の動機である代数多様体への応用といった局面では団代数そのものが重要であるが、一般に団代数理論が現れる様々な分野においては、団代数よりもむしろ団パターンとの関連が中心となることが多い。

**注意 1.8.** 本稿を執筆するにあたり、あらためて Sergey Fomin 氏に seed と mutation という用語の元々の意図を尋ねたところ以下のお返事をいただいた。「団代数における種子が部分的に変化することと、それが  $n$  正則木上で部分的に変遷をくり返していく様が進化生物学における変異の系統図を想起させることから mutation と呼び、また、木グラフの発生のもととなるものを“木”にちなんで (initial) seed と呼んだ。」

## 1.2. 係数と $Y$ 種子

次に、団代数の理論において団変数とならんで重要な係数 (coefficients) について説明する。注意 1.3 で触れたように、係数 (以下の変数  $y_i$ ) は本来はある半体 (semifield) に値を取り、その名の通り団変数の「係数」の役割を果たすが、本稿ではそのことは忘れ団変数とは独立なものとして定義をする。 $\Upsilon = (\mathbf{y}, B)$  を定義 1.2 における種子、すなわち周囲体  $\mathcal{F}$  の代数的に独立な元の  $n$  組  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$  と反対称化可能行列  $B$  の組とする。ここではこれを  $Y$  種子 ( $Y$ -seed) と呼び、その変異  $(\mathbf{y}', B') = \mu_k(\mathbf{y}, B)$  を、行列  $B'$  は (5) のままとし、 $\mathbf{y}' = (y'_1, \dots, y'_n)$  を以下で定める。

$$y'_i = \begin{cases} y_k^{-1} & i = k, \\ y_i y_k^{[b_{ki}]_+} (1 + y_k)^{-b_{ki}} & i \neq k. \end{cases} \quad (7)$$

種子の変異と同じく、 $Y$  種子の変異についても対合性  $\mu_k^2 = \text{id}$  を簡単に確かめられる。定義 1.5 における種子の族  $\Sigma = \{\Sigma_t\}$  を  $Y$  種子の族  $\Upsilon = \{\Upsilon_t\}$  に置き換えたものを  $Y$  パターン ( $Y$ -pattern) という。

本稿では、共通の  $B$  パターンを持つ団パターン  $\Sigma = \{\Sigma_t = (\mathbf{x}_t, B_t)\}_{t \in \mathbb{T}_n}$  と  $Y$  パターン  $\Upsilon = \{\Upsilon_t = (\mathbf{y}_t, B_t)\}_{t \in \mathbb{T}_n}$  を並行して扱う。そこで、両者を統合したものをあらためて  $\Sigma = \{\Sigma_t = (\mathbf{x}_t, \mathbf{y}_t, B_t)\}_{t \in \mathbb{T}_n}$  とおき、団パターンと呼ぶことにする。また、以下の議論では  $\mathbf{x}_t$  と  $\mathbf{y}_t$  は対等な役割であるので、それぞれに属する変数を単に  $x$  変数、 $y$  変数と呼ぶことにする。以下で見ると、この二つの変数の間にはある種の双対性があることがわかる。 $y$  変数に対しても、(6) と同様の記号  $\mathbf{y}_t = (y_{1;t}, \dots, y_{n;t})$  を用いる。

話が少し前後するが、前節の種子  $(\mathbf{x}, B)$  に対して、 $\hat{y}$  変数  $\hat{\mathbf{y}} = (\hat{y}_1, \dots, \hat{y}_n)$  を

$$\hat{y}_i = \prod_{j=1}^n x_j^{b_{ji}}. \quad (8)$$

と定めると、 $x$  変数の変異 (4), (5) の元で、 $\hat{y}$  変数の変異は、 $y$  変数の変異 (7) における  $y_i$  を  $\hat{y}_i$  で置き換えた式で与えられる。また、 $x$  変数の変異 (4) は、 $\hat{y}$  変数を用いて

$$x'_i = \begin{cases} x_k^{-1} \left( \prod_{j=1}^n x_j^{[-b_{ji}]_+} \right) (1 + \hat{y}_k) & i = k, \\ x_i & i \neq k, \end{cases} \quad (9)$$

と表される。 $\hat{y}$  変数は団代数理論において重要な役割を果たす。

### 1.3. 例: $A_2$ 型団パターン

以下では、最も簡単で非自明な  $A_2$  型と呼ばれる団パターンを考える。ランク  $n$  を 2 とし、2 正則木  $\mathbb{T}_2$  上の団パターンを以下の変異の列で表す。

$$\dots \xleftrightarrow{\Sigma} \Sigma(-2) \xleftrightarrow{\Sigma} \Sigma(-1) \xleftrightarrow{\Sigma} \Sigma(0) \xleftrightarrow{\Sigma} \Sigma(1) \xleftrightarrow{\Sigma} \Sigma(2) \xleftrightarrow{\Sigma} \dots \quad (10)$$

$\Sigma(0) = (\mathbf{x}(0), \mathbf{y}(0), B(0))$  を初期種子として、初期交換行列  $B(0)$  を以下の (最も簡単で非自明な) 反対称行列で与える。

$$B(0) = B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (11)$$

初期変数  $\mathbf{x}(0)$ ,  $\mathbf{y}(0)$  を  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$  と書き、変異の定義 (4), (5), (7) に従って団  $\Sigma(t) = (\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t), B(t))$  を  $t = 1, \dots, 5$  について具体的に計算をすると以下ようになる。(初めて団代数を学ばれる人は、この計算を自分の手ですることを強くおすすめする。)

ただし、後に出てくる分離公式 (定理 1.12) の参考のために、初期  $\hat{y}$  変数  $\hat{y}_1, \hat{y}_2$  を、(8) にしたがって、

$$\hat{y}_1 = x_2, \quad \hat{y}_2 = x_1^{-1} \quad (12)$$

で定め、 $x$  変数の表示は初期  $x$  変数によるものと初期  $\hat{y}$  変数によるものを併記する。

$$B(0) = B, \quad \begin{cases} x_1(0) = x_1, \\ x_2(0) = x_2, \end{cases} \quad \begin{cases} y_1(0) = y_1, \\ y_2(0) = y_2, \end{cases} \quad (13)$$

$$B(1) = -B, \quad \begin{cases} x_1(1) = x_1^{-1}(1 + x_2) \\ \quad = x_1^{-1}(1 + \hat{y}_1), \\ x_2(1) = x_2, \end{cases} \quad \begin{cases} y_1(1) = y_1^{-1}, \\ y_2(1) = y_2(1 + y_1), \end{cases} \quad (14)$$

$$B(2) = B, \quad \begin{cases} x_1(2) = x_1^{-1}(1 + x_2), \\ x_2(2) = x_1^{-1}x_2^{-1}(1 + x_1 + x_2) \\ \quad = x_2^{-1}(1 + \hat{y}_2 + \hat{y}_1\hat{y}_2), \end{cases} \quad \begin{cases} y_1(2) = y_1^{-1}(1 + y_2 + y_1y_2), \\ y_2(2) = y_2^{-1}(1 + y_1)^{-1}, \end{cases} \quad (15)$$

$$B(3) = -B, \quad \begin{cases} x_1(3) = x_2^{-1}(1 + x_1) \\ \quad = x_1x_2^{-1}(1 + \hat{y}_2), \\ x_2(3) = x_1^{-1}x_2^{-1}(1 + x_1 + x_2), \end{cases} \quad \begin{cases} y_1(3) = y_1(1 + y_2 + y_1y_2)^{-1}, \\ y_2(3) = y_1^{-1}y_2^{-1}(1 + y_2), \end{cases} \quad (16)$$

$$B(4) = B, \quad \begin{cases} x_1(4) = x_2^{-1}(1 + x_1), \\ x_2(4) = x_1, \end{cases} \quad \begin{cases} y_1(4) = y_2^{-1}, \\ y_2(4) = y_1y_2(1 + y_2)^{-1}, \end{cases} \quad (17)$$

$$B(5) = -B, \quad \begin{cases} x_1(5) = x_2, \\ x_2(5) = x_1. \end{cases} \quad \begin{cases} y_1(5) = y_2, \\ y_2(5) = y_1. \end{cases} \quad (18)$$

この結果を観察すると、 $x$  変数 (特に  $\hat{y}$  変数による表示) と  $y$  変数には関連性があることがわかる。特に、最後の式 (18) より、 $x$  変数、 $y$  変数はともに添字 1, 2 の入れ替えを法とした周期性 (半周期性) を同時に持つ。これを **五角関係式** (pentagon relation) という。さらに、行列  $B(5) = -B$  の添字 1, 2 を同時に入れ替えると  $B(0) = B$  になることに注意をすると、種子  $\Sigma(5)$  は、変数と行列の添字 1, 2 を同時に入れ替えることにより、種子  $\Sigma(0)$  と一致する。すなわち、変異の列 (10) は

5を半周期に、したがって10を全周期に持つ。これより、この団パターンの定める団代数は以下の5つの元から生成されることがわかる。

$$x_1, x_2, \frac{1+x_2}{x_1}, \frac{1+x_1+x_2}{x_1x_2}, \frac{1+x_1}{x_2}. \quad (19)$$

**注意 1.9.** 5角関係式というのは団代数以前にも随所に出てくるが、「5角関係式の背後に団代数あり」というのが(著者が念頭においている)スローガンである。

#### 1.4. Laurent 性と有限型の分類

以下では団代数(団パターン)の最も基本的な二つの性質を述べる。前節の例を参照しながら読んでいただきたい。

前節の例と同様に、初期変数  $\mathbf{x}_{t_0}$  を  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$  と表す。一般に、変異(4)の合成により頂点  $t$  における  $x$  変数  $x_{t,i}$  は初期変数  $\mathbf{x}$  の有理式となるが、以下の簡約化がおこる。

**定理 1.10** (Laurent 性 (Laurent phenomenon) [FZ02]). 任意の  $x$  変数  $x_{i;t}$  は初期変数  $\mathbf{x}$  の整数係数 Laurent 多項式で表せる。(すなわちその有理式の分母は分子の因数と必ずキャンセルする.)

証明は初等的であるが巧妙な ( $\mathbb{T}_n$  上の距離についての) 帰納法で与えられる。実際、Fomin-Zelevinsky はこのような Laurent 性を持つ再帰的に定まる有理変換のさまざまな例を観察し、深い洞察力によりそれらを広範に一般化して前記の種子とその変異の概念に達したのであった。なお、 $y$  変数については前節の例からもわかるように Laurent 性はなりたない。

前節の  $A_2$  型の団パターンは、周期性により、有限個の  $x$  変数および  $y$  変数しか持たなかった。これは一般の団パターンでは成りたないが、この性質を持つ団パターン(団代数)を**有限型**(finite type)という。有限型団パターンの分類は Fomin-Zelevinsky [FZ03a] により与えられた。定理を述べるために、反対称化可能行列  $B$  に対して、同じサイズの正方行列  $A(B) = (a_{ij})$  を以下で定める。

$$a_{ij} = \begin{cases} 2 & i = j, \\ -|b_{ij}| & i \neq j. \end{cases} \quad (20)$$

行列  $A(B)$  は Kac-Moody Lie 代数の意味での対称化可能(一般) Cartan 行列 [Kac90] になっている。これを  $B$  に付随する **Cartan 行列** と呼ぶ。

**定理 1.11** (有限型団パターンの分類 [FZ03a]). 団パターン  $\Sigma$  が有限型であるための必要十分条件は、ある  $t \in \mathbb{T}_n$  に対して、交換行列  $B_t$  に付随する Cartan 行列  $A(B_t)$  が有限型の Cartan 行列になることである。

この定理は、有限型の団パターンが有限型の Kac-Moody 代数(あるいは有限型の結晶的ルート系)と同じ分類を持つことを意味し、団代数理論とルート系の関連性の基幹をなす。

#### 1.5. 分離公式

団パターンを、 $n$  正則木  $\mathbb{T}_n$  の頂点を離散パラメーター(離散時間)に持つ、時間発展が有理変換で与えられる離散力学系とみなすことができる。例えば、1990年代より共形場理論において研究されていた  $T$  系( $T$ -system)や  $Y$  系( $Y$ -system)などの関数方程式系は、実は団パターン(の一部)とみなすことができる [FZ03b, IIK<sup>+</sup>10]。また最近では離散 Painlevé 方程式の種々のクラスも、団パターン(の一部)に帰着されることがわかっている [OS20]。離散力学系では、時間  $t$  における変数  $\mathbf{x}_t, \mathbf{y}_t$  を初期頂点  $t_0$  における初期変数  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  で記述することが一つの目標となる。本節では、そのような記述に対して成り立つ分離公式 [FZ07] というものについて説明する。

$n$  正則木  $\mathbb{T}_n$  上の団パターン  $\Sigma$  が与えられたとする。特に、 $B$  パターン  $\mathbf{B} = \{B_t\}_{t \in \mathbb{T}_n}$  が定まる。 $\mathbf{B}$  と初期頂点  $t_0 \in \mathbb{T}_n$  より、 $n$  次正方行列の二つの族  $\mathbf{C} = \{C_t = (c_{ij}^t)\}_{t \in \mathbb{T}_n}$ ,  $\mathbf{G} = \{G_t =$

$(g_{ij}^t)_{t \in \mathbb{T}_n}$  を以下の初期条件と変換 (変異) により一意的に定める:

$$C_{t_0} = I, \quad (21)$$

$$c_{ij}^{t'} = \begin{cases} -c_{ik}^t & j = k, \\ c_{ij}^t + c_{ik}^t [b_{kj}^t]_+ + [-c_{ik}^t]_+ b_{kj}^t & j \neq k, \end{cases} \quad (22)$$

$$G_{t_0} = I, \quad (23)$$

$$g_{ij}^{t'} = \begin{cases} -g_{ik}^t + \sum_{\ell=1}^n g_{i\ell}^t [-b_{\ell k}^t]_+ - \sum_{\ell=1}^n b_{\ell k}^{t_0} [-c_{\ell k}^t]_+ & j = k, \\ g_{ij}^t & j \neq k. \end{cases} \quad (24)$$

ただし, (22), (24) では  $t$  と  $t'$  はラベル  $k$  の辺で結ばれるとする. 種子の変異と同様にこれらの変換は対合的である. 行列  $C_t, G_t$  たちを  $\Sigma$  に付随する  $C$  行列 ( $C$ -matrices),  $G$  行列 ( $G$ -matrices) という. さらに,  $\mathbf{B}, t_0$  と上の  $\mathbf{C} = \{C_t\}_{t \in \mathbb{T}_n}$  を用いて, 初期  $y$  変数  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$  の有理関数の  $n$  組の族  $\mathbf{F} = \{F_t = (F_{1;t}, \dots, F_{n;t})\}_{t \in \mathbb{T}_n}$  を以下で一意的に定める: ((26) における  $t, t'$  は上のものと同じである.)

$$F_{i;t_0}(\mathbf{y}) = 1, \quad (25)$$

$$F_{i;t'}(\mathbf{y}) = \begin{cases} F_{k;t}(\mathbf{y})^{-1} \left( \prod_{j=1}^n y_j^{[-c_{jk}^t]_+} \prod_{j=1}^n F_{j;t}(\mathbf{y})^{[-b_{jk}^t]_+} + \prod_{j=1}^n y_j^{[c_{jk}^t]_+} \prod_{j=1}^n F_{j;t}(\mathbf{y})^{[b_{jk}^t]_+} \right) & i = k, \\ F_{i;t}(\mathbf{y}) & i \neq k. \end{cases} \quad (26)$$

この変換もやはり対合的である.  $F_{i;t}(\mathbf{y})$  たちを  $\Sigma$  に付随する  $F$  多項式 ( $F$ -polynomials) という. 実際, 定理 1.10 の Laurent 性の証明を精密化することにより, 有理関数  $F_{i;t}(\mathbf{y})$  は変数  $\mathbf{y}$  の整数係数多項式となることがわかる [FZ07]. 以上において,  $B$  パターン  $\mathbf{B}$  は初期頂点  $t_0$  における交換行列  $B_{t_0}$  のみから変異により定まるので, 結局,  $C$  行列,  $G$  行列,  $F$  多項式は初期頂点  $t_0$  と初期交換行列  $B_{t_0}$  より一意的に定まることを強調しておく.

初期  $x$  変数  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_{t_0}$  に対して, (8) にしたがって初期  $\hat{y}$  変数  $\hat{\mathbf{y}} = (\hat{y}_1, \dots, \hat{y}_n)$  を以下で定める.

$$\hat{y}_i = \prod_{j=1}^n x_j^{b_{ji}^{t_0}}. \quad (27)$$

以上を用いて, 団パターンの  $x$  変数,  $y$  変数は初期変数  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  により以下のように表示される.

**定理 1.12** (分離公式 (separation formulas) [FZ07]). 任意の団パターン  $\Sigma = \{\Sigma_t = (\mathbf{x}_t, \mathbf{y}_t, B_t)\}$  に対して  $\mathbf{C}, \mathbf{G}, \mathbf{F}$  を上で定義したものとす. また,  $\hat{\mathbf{y}} = (\hat{y}_1, \dots, \hat{y}_n)$  を (27) で定義したものとす. このとき, 以下が成り立つ.

$$x_{i;t} = \left( \prod_{j=1}^n x_j^{g_{ji}^t} \right) F_{i;t}(\hat{\mathbf{y}}), \quad (28)$$

$$y_{i;t} = \left( \prod_{j=1}^n y_j^{c_{ji}^t} \right) \prod_{j=1}^n F_{j;t}(\mathbf{y})^{b_{ji}^t}. \quad (29)$$

すなわち,  $x$  変数,  $y$  変数を知ることは,  $C$  行列,  $G$  行列,  $F$  多項式を知ることに帰着される. また, 1.3 節で観察された  $x$  変数 (特に  $\hat{y}$  変数による表示) と  $y$  変数の類似性は上の公式から説明される.

分離公式は任意の団パターンについて成り立つ(今のところ)ほぼ唯一の構造定理と呼ぶべきものであり、団パターンの様々な応用の多くはこの分離公式に基づくものである。言い換えると、「何がしかの数学的対象が団代数(団パターン)に帰着されて何がうれしいのですか?」という問に対して、多くの場合に「分離公式で制御できること」がその答となる。

また、本稿では正確な説明を省略するが、 $y$ 変数に対してトロピカル化という操作が可能である。これは平たくいうと、 $y$ 変数の初期 $y$ 変数による有理関数としての表示の「主要部」をとることであり、より具体的には、 $F$ 多項式を忘れる(1と置く)操作に他ならない。そこで、分離公式(29)を見ると、 $y$ 変数 $y_{i,t}$ のトロピカル化のベキは $C$ 行列 $C_t$ の第 $i$ 列目のベクトルで与えられる。すなわち、 $C$ 行列 $C_t$ は $y$ 変数の組 $\mathbf{y}_t$ のトロピカル化(トロピカル $y$ 変数)とみなせる。一方、 $G$ 行列 $G_t$ については本義的な意味での $x$ 変数のトロピカル化ではないが、分離公式(28)を通して $F$ 多項式を1と置くという意味でやはり $x$ 変数の組 $\mathbf{x}_t$ のトロピカル化(トロピカル $x$ 変数)とみなせる。一方、 $F$ 多項式は非トロピカル部分、すなわちトロピカル化で脱落する非主要部分の情報を持つのである。

## 1.6. 符号同一性と Laurent 正値性

本節では $C$ 行列と $F$ 多項式に関するさらなる二つの重要な結果について述べる。これらはいずれも Fomin-Zelevinsky [FZ07] により予想されたものであり、団代数理論の基本的な問題として(ここでは詳細は割愛するが)多くの研究者による部分的な解決を経て、最終的に Gross-Hacking-Keel-Kontsevich [GHKK18] によって解決された。

第一の結果は、 $C$ 行列に関するものである。

**定理 1.13** ( $C$ 行列の列符号同一性 (sign-coherence) [GHKK18]).  $C$ 行列 $C_t$ の各列ベクトルは0ベクトルではなく、その0でない成分は全て正、または全て負である。

第二の結果は、 $F$ 多項式の係数の正値性である。

**定理 1.14** (Laurent 正値性 (Laurent positivity) [GHKK18]). 任意の団パターン $\Sigma$ に対する任意の $F$ 多項式 $F_{i,t}(\mathbf{y})$ に現れる単項式の(整数)係数は全て正である。

[GHKK18]以前においては、反対称な交換行列を持つ団パターンに対しては、定理1.13については籠の表現論を用いた証明 [DWZ10] が、また定理1.14についてはグラフを用いた組み合わせ論的な証明 [LS15] がそれぞれ与えられていた。Gross たち [GHKK18] は、散乱関式の手法によりこれらを一般の団パターンに対して証明した。散乱関式については、3章で詳しく説明する。

**問題 1.15.** 定理1.13の「より初等的な」証明を与えよ。

団パターンに関する主要な結果のほとんどは、分離公式とこの二つの定理を経由して導かれる。以下では定理1.13の重要な帰結をいくつかあげておく。

定理1.13は以下の命題と等価である [FZ07].

**定理 1.16.**  $F$ 多項式 $F_{i,t}(\mathbf{y})$ は1を定数項に持つ。

また、定理1.13より以下の命題が得られる。(これらは、定理1.13の仮定のもとに [GHKK18] 以前に導かれたものである.)

**定理 1.17** ( $G$ 行列の行符号同一性 [NZ12]).  $G$ 行列 $G_t$ の各行ベクトルは0ベクトルではなく、その0でない成分は全て正、または全て負である。

**定理 1.18** ([NZ12]).  $D$ を交換行列 $B_t$ たちに共通の反対称化子とする。以下の等式がなりたつ。

$$DB_t = C_t^T (DB_{t_0}) C_t, \quad (30)$$

$$\text{(ユニモジュラー性)} \quad |C_t| = |G_t| = \pm 1, \quad (31)$$

$$\text{(双対性)} \quad D^{-1} G_t^T D C_t = I. \quad (32)$$

ここで, 行列  $M$  の転置を  $M^T$  と表す.

### 1.7. 同期性

この節では団パターンにおける同期性について説明する. これも分離公式と前節の二つの基本定理を経由して得られるものである.

引き続き  $n$  を団パターン  $\Sigma$  のランクとして,  $S_n$  を  $n$  次対称群とする. 置換  $\sigma \in S_n$  の  $x$  変数,  $y$  変数, 交換行列,  $C$  行列,  $G$  行列への左作用を以下で定める.

$$\mathbf{x}' = \sigma \mathbf{x}_t, \quad x'_i = x_{\sigma^{-1}(i);t}, \quad (33)$$

$$\mathbf{y}' = \sigma \mathbf{y}_t, \quad y'_i = y_{\sigma^{-1}(i);t}, \quad (34)$$

$$B' = \sigma B_t, \quad b'_{ij} = b_{\sigma^{-1}(i)\sigma^{-1}(j);t}, \quad (35)$$

$$C' = \sigma C_t, \quad c'_{ij} = c_{i\sigma^{-1}(j);t}, \quad (36)$$

$$G' = \sigma G_t, \quad g'_{ij} = g_{i\sigma^{-1}(j);t}. \quad (37)$$

以上の定義は分離公式 (28), (29) と両立することに注意する. また, 種子への  $\sigma$  の作用を  $\sigma \Sigma_t = \sigma(\mathbf{x}_t, \mathbf{y}_t, B_t) = (\sigma \mathbf{x}_t, \sigma \mathbf{y}_t, \sigma B_t)$  で定める.

**定義 1.19.** 種子の変異の列

$$\Sigma_0 \xrightarrow{\mu_{k_1}} \Sigma_1 \xrightarrow{\mu_{k_2}} \cdots \xrightarrow{\mu_{k_L}} \Sigma_L$$

と置換  $\sigma \in S_n$  に対して  $\Sigma_L = \sigma \Sigma_0$  が成り立つとき, この変異の列を  $\sigma$  周期的 ( $\sigma$ -periodic) であるという.

例えば,  $A_2$  型の団パターン (10) において,  $\Sigma(0)$  から  $\Sigma(5)$  への変異の列は,  $\tau_{12}$  を 1 と 2 の互換とすると,  $\tau_{12}$  周期的である.

**定理 1.20** (同期性 (synchronicity phenomenon) [Nak20]). 任意の団パターン  $\Sigma$  とそれに付随する  $C$  行列,  $G$  行列について, 置換  $\sigma \in S_n$  および  $t_1, t_2 \in \mathbb{T}_n$  に対する以下の周期条件は互いに同値である.

- (i).  $\mathbf{x}_{t_1} = \sigma \mathbf{x}_{t_2}$ .
- (ii).  $\mathbf{y}_{t_1} = \sigma \mathbf{y}_{t_2}$ .
- (iii).  $C_{t_1} = \sigma C_{t_2}$ .
- (iv).  $G_{t_1} = \sigma G_{t_2}$ .
- (v).  $\Sigma_{t_1} = \sigma \Sigma_{t_2}$ .

(iii) と (iv) が同値であるのは双対性 (32) の帰結である. この定理の中でとりわけ重要な事実は, (iii) から (ii) が, また, (iv) から (i) が従うことである. 1.5 節で述べたように,  $C$  行列は  $y$  変数の組  $\mathbf{y}_t$  のトロピカル化と,  $G$  行列は  $x$  変数の組  $\mathbf{x}_t$  の (ある意味の) トロピカル化と同一視された. また, トロピカル化とは,  $F$  多項式を 1 とおく (多項式の非定数項をすべて忘れる) という非常に粗い近似であった. それにも関わらず,  $\mathbf{x}_t, \mathbf{y}_t$  はそのトロピカル部分  $G_t, C_t$  から一意的に定まるのである. これは, もちろん団パターンが変異の定める非常に特別な変換にしたがうということの帰結である. この事実を標語的に言えば, 「団パターンにおいては脱トロピカル化 (detropicalization) がなりたつ」ということになる. また, (i) と (ii) の同値性は, 1.3 節の例で見た  $x$  変数と  $y$  変数の同期性が任意の団パターンに成り立つことを意味するが, これも上の脱トロピカル化を経由して示される非自明な事実である.

この反トロピカル化の事実は, 団パターンに帰着できる離散力学系に対する強力な応用を持つ. 例えば, 90 年代に, 共形場理論における様々な  $Y$  系に対して, Zamolodchikov 周期性という周期性が予想されていた [Zam91]. これを解決するために, 団代数導入以前 (B.C.= Before Cluster algebra) に様々な努力が成されたが, 特別な場合以外には解決されなかった. これを, 団



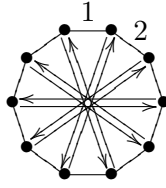


図 1:  $A_2$  型の (ラベル付き) 交換グラフ

代数導入後 (A.D.) に, この周期性のある団パターンの周期性に帰着させ, さらに (ルート系と関連する)  $C$  行列の周期性に帰着させることにより, この予想が解決されたのである [IJK<sup>+</sup>13].

### 1.8. 団代数とは何か

一通りの準備ができたので, いよいよ本講の主題である「団代数とは何か」ということについて著者の視点を述べる.

まずすでに述べたように, 著者は定義 1.7 で与えた「団代数」そのものでなく, その背後にある「団パターン」をより基本的な「団構造 (cluster structure)」の核心と考える. したがって, 「団パターンとは何か」という問題に転じて論ずる.

話に先立って, 亜群の定義を思い出しておく.

**定義 1.21.** 全ての射が可逆である圏を亜群 (groupoid) という.

例えば, 群とは, ただ一つの対象を持つ亜群に対して射の集合に合成により積の演算を定めたものに他ならない.

さて, 団パターン  $\Sigma$  とは,  $n$  正則木  $\mathbb{T}_n$  上に種子を変異にしたがって配置したものであった.  $\Sigma$  において, 異なる頂点  $t_1, t_2 \in \mathbb{T}_n$  に対して  $\Sigma_{t_1} = \Sigma_{t_2}$  が成り立つときに  $t_1$  と  $t_2$  を同一視することにより,  $\mathbb{T}_n$  の商グラフが ( $\mathbb{T}_n$  の辺のラベルを保ちながら) 矛盾なく定まる. さらに, この商グラフの異なる頂点 (の代表元)  $t_1, t_2$  と置換  $\sigma \in S_n$  に対して  $\Sigma_{t_1} = \sigma \Sigma_{t_2}$  が成り立つとき,  $t_2$  から  $t_1$  へ矢 (向きのついた辺) を加えラベル  $\sigma$  をつけることにする. このグラフ  $\Gamma(\Sigma)$  を, 団パターン  $\Sigma$  の (ラベル付き) 交換グラフ (labeled exchange graph) という. 例えば, 1.3 節の  $A_2$  型の団パターンの例では,  $\Gamma(\Sigma)$  は正 10 角形に対して各対頂点を結ぶラベル  $\tau_{12}$  の矢を双方向に加えたものとなる (図 1).

**注意 1.22.** 上の (ラベル付き) 交換グラフは [Nak20] によるもので, [FZ07] の (ラベルなし) 交換グラフを  $\sigma$  の情報を加えて精密化したものである.

交換グラフ  $\Gamma(\Sigma)$  は亜群とみなせる. すなわち,  $\Sigma$  の互いに異なる全ての種子を対象として, 恒等射に変異  $\mu_k$  と  $\sigma$  周期に対応する置換  $\sigma$  を射に加えた亜群が交換グラフに他ならない. この亜群を  $\Sigma$  に付随する **団亜群** (cluster groupoid) と呼ぶのは自然であろう. (Fock-Goncharov [FG09] は, これを cluster modular groupoid と呼んでいる.)

ここで, 有限鏡映群と Coxeter 群の関係とのアナロジーを考える. 鏡映群に対応するものが団パターンに付随する交換グラフ (= 団亜群) であり, 鏡映に対応するものが種子の変異である.

一方, 有限鏡映群を抽象群として記述するものが Coxeter 群であり, よく知られた生成元  $s_1, \dots, s_n$  と基本関係式

$$s_i^2 = \text{id}, \quad (s_i s_j)^{m_{ij}} = \text{id} \quad (i \neq j) \quad (38)$$

という形で与えられる. そこで, 団亜群  $\Gamma(\Sigma)$  を亜群として (射の) 生成元と基本関係式で記述することが基本的な問題となる. 例えば, 生成元として,  $\mathbb{T}_n$  の頂点  $t$  における変異と置換に対応する射  $\mu_k^t, \sigma^t$  たちをとろう. (ただし, 射  $\sigma^t$  の始対象, 終対象が何か, また, どれだけの  $\sigma^t$  が必要か

は先見的にはわからない。) このとき, 以下の関係式が「必要」であることはわかる. (以下では, 射の等号は両辺の射の始対象および終対象がそれぞれ等しいことも意味する.)

(i) 変異の対合性:

$$\mu_i^{t_1} \mu_i^t = \text{id}^t. \quad (39)$$

ただし,  $t_1 \in \mathbb{T}_n$  は  $t$  とラベル  $i$  の辺で隣接する頂点とする.

(ii). 可換な変異:  $b_{ij}^t = 0$  となる  $i, j$  に対して,

$$\mu_i^{t_1} \mu_j^t = \mu_j^{t_2} \mu_i^t. \quad (40)$$

ただし,  $t_1, t_2 \in \mathbb{T}_n$  は  $t$  とそれぞれラベル  $j, i$  の辺で隣接する頂点とする.

(iii). 五角関係式 (1.3節の  $A_2$  型周期):  $|b_{ij}^t| = |b_{ji}^t| = 1$  となる  $t$  と  $i, j$  に対して,

$$\mu_j^{t_4} \mu_i^{t_3} \mu_j^{t_2} \mu_i^{t_1} \mu_j^t = \tau_{ij}^t, \quad \tau_{ij}^{t_5} \tau_{ij}^t = \text{id}^t. \quad (41)$$

ただし,  $t_1, \dots, t_5 \in \mathbb{T}_n$  は  $t$  から順にラベル  $j, i, j, i, j$  の辺で隣接する頂点し, また  $\tau_{ij}^t = \tau_{ji}^t$  を ( $i$  と  $j$  の互換  $\tau_{ij}$  に対応する)  $t$  から  $t_5$  への射とする.

(iv). (iii) における互換  $\tau_{ij}^t$  たちのみたす対称群の関係式に由来する関係式.

これらは Coxeter 群の関係式 (38) の自然な類似とみなせる. ところで, 「交換行列が反対称行列である団パターンに対して, 上の (i)–(iv) は交換グラフの基本関係式である」という楽観的な期待に対しては, 多くの例で成り立つ一方で, 反例があることがすでに知られている [FST08]. (例えば, ちょうど二つの穴を持つ閉曲面に付随する団パターンが反例を与える.)

そこで, 以下の問題を重要な未解決問題としてあげておく.

**問題 1.23.** 任意の団パターン  $\Sigma$  の交換グラフ  $\Gamma(\Sigma)$  の亜群としての生成元と基本関係式を交換関係式の族  $\mathbf{B}$  を用いて記述せよ.

もう少し平たく言えば, 与えられた団パターンに対して,  $A_2$  型,  $B_2$  型,  $G_2$  型の団パターンの (明らかな) 周期に帰着できない非自明な周期はどれぐらいあるか? という問である.

さらに, 亜群の観点から, 前節の同期性 (定理 1.20) の意味を考えよう. 定理 1.20 は, 種子のみならず,  $x$  変数,  $y$  変数,  $C$  行列,  $G$  行列のいずれもが, 団パターンと全く同じ交換グラフを持つことを意味する. また, ここでは詳細を述べないが, Chekhov-Shapiro [CS14] によって一般団代数 (generalized cluster algebras) というものが導入されている. これは  $x$  変数の変異 (9) と  $y$  変数の変異 (7) における 1 次式  $1 + \hat{y}_k$ ,  $1 + y_k$  を高次の多項式に一般化したものであるが, 前節までに述べた団パターンに対する基本的性質はすべて一般化して成立する (Laurent 正值性については予想). さらに, (Laurent 正值性の予想のもとで) 任意の一般団代数における団パターンの交換グラフもまた, ある通常 of 団パターンの交換グラフと一致することが知られている [Nak20]. そこで, 見方を逆転させて, 団亜群という抽象的な亜群が始めにあって, それが, 種子,  $x$  変数,  $y$  変数,  $C$  行列,  $G$  行列, あるいはそれらの一般団代数への一般化などによるさまざまな「実現 (忠実な表現)」を持つと見なすことは自然である. それは, 元来は行列により定義される Lie 代数  $\mathfrak{gl}_n$  に対して, 抽象 Lie 代数として様々な表現を考えることとパラレルな視点である.

話が長くなったが, このように考えると, Fomin-Zelevinsky による種子の変異というのは, 団亜群の最も基本的な実現として Laurent 性の観点からたまたま (あるいは歴史の必然として) 発見されたものであって, 団構造の実体は抽象的な団亜群であり, その定義 (基本関係式) がわかっていないことは致命的な問題である, という見方が可能である. したがって本稿の冒頭で述べたように, 団代数 (団構造) の本質的な定義にはいまだ達していない, と著者は考えるのである.

## 2. ルート系との関係

鏡映群と Coxeter 群はルート系と深く結びついているが、団代数も、例えば定理 1.11 で見たように、ルート系と関連が深い。あるいは一歩進めて、団代数の理論自体をルート系の理論のある種の拡張理論と考えることもできるかもしれない。この章では、特に  $c$  ベクトルとルート系の関係および、その双対である  $g$  ベクトルの生成する錐と扇を紹介し次章の散乱図式への橋渡しとする。

### 2.1. $c$ ベクトルとルート系

$C$  行列  $C_t$  ( $t \in \mathbb{T}_n$ ) は、団パターン  $\Sigma$  (あるいは  $B$  パターン) と初期頂点  $t_0$  により定まるのであった。  $C$  行列  $C_t$  の第  $i$  列を  $\mathbf{c}_{i,t}$  と表し、これらを  $c$  ベクトル ( $c$ -vectors) という。分離公式 (29) より、 $c$  ベクトル  $\mathbf{c}_{i,t}$  は  $y$  変数  $y_{i,t}$  のトロピカル化と同一視された。また、定理 1.13 より、これらは符号同一性を持つのであった。符号同一性というのはルート系の特質 (任意のルートは正ルートまたは負ルートになる) であるから、 $c$  ベクトルがなんらかのルート系のルートであることを期待させる。

一般に、反対称化可能行列  $B$  に付随する (一般) 対称化可能 Cartan 行列  $A(B)$  に対して、 $A(B)$  の定めるルート系 [Kac90] (すなわち  $A(B)$  の定める Kac-Moody Lie 代数のルートの集合) を  $\Phi(A(B))$  とする。

Nakanishi-Stella [NS14] は Zelevinsky とともに以下の予想を与えた。

**予想 2.1** (ルート予想 [NS14]). 任意の  $c$  ベクトル  $\mathbf{c}_{i,t}$  はルート系  $\Phi(A(B_{t_0}))$  のルートである。

実際、初期交換行列  $B$  が反対称行列の場合は、 $B$  を簡  $Q = Q(B)$  と同一視して得られる道代数  $kQ$  の表現論と関連づけることにより上の予想は成立することが示される。もう少し詳しく述べると以下ようになる。有名な Kac の定理により、直既約な  $kQ(B)$  加群  $M$  の次元ベクトルはルート系  $\Phi(A(B))$  の正ルートとなり、またその逆も成り立つ。特に、直既約な  $kQ(B)$  加群  $M$  が  $\text{End}_{kQ(B)}(M) = k$  をみたすとき、 $M$  の次元ベクトルを Schur ルートという。Chávez による以下の結果より、この場合に予想 2.1 が成立する。

**定理 2.2** ([Chá15]). 反対称な交換行列を持つ団パターン  $\Sigma$  と任意の初期頂点  $t_0$  に対して、任意の  $c$  ベクトルはルート系  $\Phi(A(B_{t_0}))$  の Schur ルートになる。

一方、Nakanishi と Stella は、有限型団パターンに対して、 $c$  ベクトルの明示的な表示 (ダイアグラム表示) と与えることにより予想 2.1 が成立することを示した。

**定理 2.3** ([NS14]). 有限型団パターン  $\Sigma$  と任意の初期頂点  $t_0$  に対して、任意の  $c$  ベクトルはルート系  $\Phi(A(B_{t_0}))$  のルートとなる。

**例 2.4.** 1.3 節の  $A_2$  型団パターンと (11) の初期交換行列  $B$  に対して、ルート系  $\Phi(A(B))$  は  $A_2$  型のルート系であり、団パターンに対する全ての  $c$  ベクトル

$$\pm(1, 0), \pm(0, 1), \pm(1, 1) \quad (42)$$

は  $\Phi(A(B))$  をつくす。

**例 2.5.** 以下の二つの行列は、どちらも  $A_3$  型 (有限型) 団パターンの交換行列として現れる。 ( $B_2$  は  $B_1$  の 2 における変異である.)

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (43)$$

$B_1$ が初期交換行列の場合, ルート系 $\Phi(A(B_1))$ は $A_3$ 型のルート系であり, 団パターンに対する全ての $c$ ベクトル

$$\pm(1, 0, 0), \pm(0, 1, 0), \pm(0, 0, 1), \pm(1, 1, 0), \pm(0, 1, 1), \pm(1, 1, 1) \quad (44)$$

は $\Phi(A(B_1))$ をつくす. 一方,  $B_2$ が初期交換行列の場合, ルート系 $\Phi(A(B_2))$ は無定型のルート系であり, 団パターンに対する全ての $c$ ベクトル

$$\pm(1, 0, 0), \pm(0, 1, 0), \pm(0, 0, 1), \pm(1, 1, 0), \pm(0, 1, 1), \pm(1, 0, 1) \quad (45)$$

は $\Phi(A(B_2))$ の一部のみを与える. (有限型団パターンに対しては,  $c$ ベクトルの個数は初期頂点 $t_0$ の取り方に依存しない.)

以下の問は, 団構造がどのような意味でルート系の理論の拡張理論になっているかを問うものである.

**問題 2.6.** 予想2.1が成立する団パターンに対して, 全ての $c$ ベクトルのなすルート系 $\Phi(A(B_{t_0}))$ の部分集合をルート系の言葉で特徴づけよ.

なお, 団代数とルート系の別の方向の関連として, 対称化可能 Kac-Moody 代数の Weyl 群 (Coxeter 群) が団パターンにより実現できるという事実が知られている [IIO19].

## 2.2. $g$ ベクトル扇

前節の $c$ ベクトルと平行に, 団パターン $\Sigma$ と初期頂点 $t_0$ により定まる各 $G$ 行列 $G_t$  ( $t \in \mathbb{T}_n$ ) に対して, その第 $i$ 列を $\mathbf{g}_{i;t}$ と表し, これらを $g$ ベクトル ( $g$ -vectors) という. 分離公式 (28) より,  $g$ ベクトル $\mathbf{g}_{i;t}$ は $x$ 変数 $x_{i;t}$ の(ある意味の)トロピカル化と同一視された. また, 各 $G$ 行列 $G_t$ に対して,  $|\det G_t| = \pm 1$ がなりたつことが知られている.

**定義 2.7.**  $\mathbb{R}^n$ において頂点 $t$ における $g$ ベクトルたち $\mathbf{g}_{1;t}, \dots, \mathbf{g}_{n;t}$ の張る(単体的)有理強凸多面錐を $g$ ベクトル錐 ( $g$ -vector cone) という.

**注意 2.8.**  $C$ 行列と $G$ 行列の双対性 (32) により,  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ の内積を $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \mathbf{u}^T D \mathbf{v}$ で定めたものに関して,  $c$ ベクトル $\mathbf{c}_{i;t}$ は $i$ 番目以外の $g$ ベクトルの張る $g$ ベクトル錐の面の法ベクトルとなる.

扇の定義を思い出しておこう.

**定義 2.9.** 空でない $\mathbb{R}^n$ の有理強凸多面錐の集合 $\Delta$ に対して以下がなりたつとき,  $\Delta$ を扇 (fan) という. ( $\Delta$ が有限集合であることは要請しない.)

- $\sigma \in \Delta$ の任意の面は $\Delta$ に含まれる.
- 任意の $\sigma, \tau \in \Delta$ に対して $\sigma \cap \tau$ は $\sigma$ の面かつ $\tau$ の面となる.

$\Delta(\Sigma)$ を, 団パターン $\Sigma$ の全ての $g$ ベクトル錐の(自分自身を含む全ての次元の)面全体の集合とする.  $G$ 行列の変異の定義 (24) より,  $k$ における変異に対して,  $k$ 番目の $g$ ベクトル $\mathbf{g}_{k;t}$ のみが変化する. すなわち, 新しい $g$ ベクトル錐は元の $g$ ベクトル錐と( $\mathbf{g}_{k;t}$ を除く) $k-1$ 個の $g$ ベクトルの張る錐の面で張り合う. しかし, ある $g$ ベクトル錐から変異を何度か繰り返して得られる $g$ ベクトル錐が元の $g$ ベクトル錐と面以外では交わらないかは直ちにはわからない.

以下の事実はやはり Gross たち [GHKK18] によるものである (定理 3.7 を参照).

**定理 2.10** ([GHKK18]). 任意の団パターン $\Sigma$ と任意の初期頂点 $t_0$ に対して,  $\Delta(\Sigma)$ は扇となる.

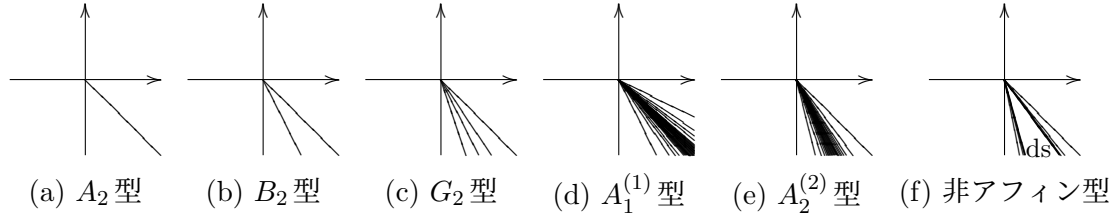


図 2: ランク 2 の  $g$  ベクトル扇

扇  $\Delta(\Sigma)$  を団パターン  $\Sigma$  に付随する  $g$  ベクトル扇 ( $g$ -vector fan) という.

以下ではランク 2 の場合に具体的な  $g$  ベクトル扇の様子を図示する. 団代数の型は, 初期交換行列に対応する Cartan 行列の型を表す [Kac90].

(I). 有限型団パターン.

(a).  $A_2$  型: 初期交換行列  $B_{t_0}$  は以下のものとする.

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (46)$$

1.3 節の結果から, 変異  $\mu_1, \mu_2$  を順に繰り返すと  $G$  行列は以下のものが得られる.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (47)$$

最後の  $G$  行列と初期  $G$  行列は同じ  $g$  ベクトル錐を定めることに注意する.

(b).  $B_2$  型: 初期交換行列  $B_{t_0}$  は以下のものとする.

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}. \quad (48)$$

$G_{t_0} = I$  から変異  $\mu_1, \mu_2$  を順に繰り返すと, 以下の  $g$  ベクトルが順に現れ周期的になる.

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (49)$$

(c).  $C_2$  型: 初期交換行列  $B_{t_0}$  は以下のものとする.

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}. \quad (50)$$

$G_{t_0} = I$  から変異  $\mu_1, \mu_2$  を順に繰り返すと, 以下の  $g$  ベクトルが順に現れ周期的になる.

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (51)$$

以上をそれぞれ図 2 (a)–(c) に図示すると, いずれも  $g$  ベクトル錐が扇をなし,  $\mathbb{R}^2$  を埋め尽くす (扇が完備となる) ことがわかる. また,  $A_2, B_2, G_2$  の Coxeter 数  $h = 3, 4, 6$  に対して,  $h+2 = 5, 6, 8$  がそれぞれの錐の個数を与えることがわかる. この図は対応する鏡映群 (Coxeter 群) の基本領域による  $\mathbb{R}^2$  の分割のある種の類似と見ることができる.

(II). 無限型団パターン.

(d).  $A_1^{(1)}$  型: 初期交換行列  $B_{t_0}$  は以下のものとする.

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}. \quad (52)$$

$G_{t_0} = I$  から変異  $\mu_1, \mu_2$  を順に繰り返すと, 以下の  $g$  ベクトルが順に現れる.

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}, \dots \quad (53)$$

また,  $G_{t_0} = I$  から変異  $\mu_2, \mu_1$  を順に繰り返すと, 以下の  $g$  ベクトルが順に現れる.

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix}, \dots \quad (54)$$

以上を図 2 (d) に図示すると, 無限個の  $g$  ベクトル錐が扇をなし,  $\mathbb{R}^2$  から半直線  $\mathbb{R}_+(1, -1)$  を除いた部分を埋め尽くすことがわかる.

(e).  $A_2^{(2)}$  型: 初期交換行列  $B_{t_0}$  は以下のものとする.

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}. \quad (55)$$

$A_1^{(1)}$  型と同様に, 無限個の  $g$  ベクトル錐が扇をなし,  $\mathbb{R}^2$  から半直線  $\mathbb{R}_+(1, -2)$  を除いた部分を埋め尽くす (図 2 (e)).

(f). 非アフィン型: 初期交換行列  $B_{t_0}$  は以下のものとする. ( $b, c > 0, bc \geq 5$ .)

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -c \\ b & 0 \end{pmatrix}. \quad (56)$$

この場合,  $G_{t_0} = I$  から変異  $\mu_1, \mu_2$  を順に繰り返して得られる  $g$  ベクトルと, 変異  $\mu_1, \mu_2$  を順に繰り返して得られる  $g$  ベクトルは, それぞれ, 半直線

$$\mathbb{R}_+ \begin{pmatrix} \frac{-bc + \sqrt{bc(bc-4)}}{2b} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{R}_+ \begin{pmatrix} \frac{-bc - \sqrt{bc(bc-4)}}{2b} \\ 1 \end{pmatrix} \quad (57)$$

へと近づく. そして, 図 2 (f) のように, 無限個の  $g$  ベクトル錐が扇をなし,  $\mathbb{R}^2$  からこの二つの半直線のなす錐 (図で ds = dark side と書かれている部分) を除いた部分を埋め尽くす.

### 3. 散乱図式

散乱図式 (scattering diagram) は, 元々は Kontsevich-Soibelman [KS06] がホモロジカル・ミラー対称性における Calabi-Yau 多様体のトーリック縮退の逆問題に関連して 2次元の場合に導入し, Gross-Schibert [GS11] が高次元に一般化したものである. 1.6 節で述べたように Gross-Hacking-Keel-Kontsevich [GHKK18] は, 散乱図式を用いて団パターンに対する  $C$  行列の符号同一性予想や  $F$  多項式の正值性予想を肯定的に解決した.

#### 3.1. Fock-Goncharov による種子の変異の定式化

散乱図式を定義するにあたって, まずは背景となる Fock-Goncharov [FG09] による種子とその変異の定式化について述べる. 彼らは  $x$  変数,  $y$  変数を, それぞれ  $A$  変数,  $X$  変数と呼び, また交換行列の習慣が Fomin-Zelevinsky のものの転置であるので注意が必要である. 以下では [GHKK18] の記号にしたがって述べる.

(a). 固定データ: まず始めに次のものを一つ選び, 固定する. これを**固定データ** (fixed data) という.

- $N$  を  $n$  次元の格子とする.
- $\{, \}: N \times N \rightarrow \mathbb{Q}$  を反対称双線形形式とする.
- $N^\circ$  を  $N$  の有限指数の部分格子で,  $\{N^\circ, N\} \subset \mathbb{Z}$  をみたすものとする.
- $M = \text{Hom}(N, \mathbb{Z})$ ,  $M^\circ = \text{Hom}(N^\circ, \mathbb{Z})$  をそれぞれ  $N$ ,  $N^\circ$  の双対格子とする.  $M$  を  $M^\circ$  の部分格子とみなす.
- $d_1, \dots, d_n$  を互いに素の正整数とする.

ただし, Fomin-Zelevinsky [FZ07] の交換行列の習慣に合わせるために, 本稿では反対称双線形形式を [GHKK18] のものと第1成分, 第2成分を入れ替えた (以下同様).

(b). 種子データ: 以下をみたす  $N$  の元の  $n$  組  $\mathbf{s} = (e_1, \dots, e_n)$  を固定データに対する**種子データ** (seed data) という.

- $e_1, \dots, e_n$  は  $N$  の基底であり,  $d_1 e_1, \dots, d_n e_n$  は  $N^\circ$  の基底である.

以下では少なくとも一つ種子データをもつ固定データを考える. 種子データに対して,  $M$  の双対基底  $e_1^*, \dots, e_n^*$  および  $M^\circ$  の基底  $f_1 = d_1^{-1} e_1^*, \dots, f_n = d_n^{-1} e_n^*$  が得られる.

Fomin-Zelevinsky の種子は種子データから以下のように構成される.

- $x$  変数:  $x_i = x^{f_i}$  (ただし,  $x^m$  ( $m \in M^\circ$ ) は変数  $x$  の形式的指数 (formal exponential))
- $y$  変数:  $y_i = y^{e_i}$  (ただし,  $y^n$  ( $n \in N$ ) は変数  $y$  の形式的指数)
- 交換行列:  $b_{ij} = \{d_i e_i, e_j\}$ .

( $B$  の反対称化子は  $D = \text{diag}(d_0 d_1^{-1}, \dots, d_0 d_n^{-1})$ ,  $d_0 = \text{LCM}(d_1, \dots, d_n)$  で与えられる. よって, (1) の  $d_i$  は  $d_0 d_i^{-1}$  で与えられることに注意する.)

(c). 種子データの変異: 種子データ  $\mathbf{s} = (e_1, \dots, e_n)$  の  $k$  方向への**変異**  $\tau_k(e_1, \dots, e_n) = (e'_1, \dots, e'_n)$  を以下で定める. ( $B$  は上で与えた交換行列である.)

$$e'_i = \begin{cases} -e_k & i = k, \\ e_i + [b_{ki}]_+ e_k & i \neq k. \end{cases} \quad (58)$$

これは,  $(f_1, \dots, f_n)$  と  $B$  の以下への変異  $(f'_1, \dots, f'_n)$ ,  $B'$  を誘導する.

$$f'_i = \begin{cases} -f_k + \sum_{j=1}^n [-b_{jk}]_+ f_j & i = k, \\ f_i & i \neq k, \end{cases} \quad (59)$$

$$b'_{ij} = \begin{cases} -b_{ij} & i = k \text{ or } j = k, \\ b_{ij} + b_{ik} [b_{kj}]_+ + [-b_{ik}]_+ b_{kj} & i, j \neq k. \end{cases} \quad (60)$$

$B$  の変異は交換行列の変異 (5) と一致する. 一方, (58), (59) は, 前項 (b) の対応を用いて  $x$  変数,  $y$  変数で表すと, 以下のようなになる.

$$x'_i = \begin{cases} x_k^{-1} \prod_{j=1}^n x_j^{[-b_{ji}]_+} & i = k, \\ x_i & i \neq k, \end{cases} \quad (61)$$

$$y'_i = \begin{cases} y_k^{-1} & i = k, \\ y_i y_k^{[b_{ki}]_+} & i \neq k. \end{cases} \quad (62)$$

これは、それぞれの変異 (9), (7) の単項式の部分であり、変異とは一致しない。また、 $\tau_k$  は対称的でもない。この差を埋めるために、まず変異をそれぞれ以下で定まる  $x, y$  の形式的指数のそれぞれの有理関数体の自己同型写像とみなす。

$$\tau_k^s(x_i) = \begin{cases} x_k^{-1} \prod_{j=1}^n x_j^{[-b_{ji}]_+} & i = k, \\ x_i & i \neq k, \end{cases} \quad (63)$$

$$\tau_k^s(y_i) = \begin{cases} y_k^{-1} & i = k, \\ y_i y_k^{[b_{ki}]_+} & i \neq k. \end{cases} \quad (64)$$

つぎに、 $s$  より定まる以下の自己同型写像を考える。

$$\rho_k^s(x_i) = x_i(1 + \hat{y}_k)^{-\delta_{ik}}, \quad \hat{y}_k = \prod_{j=1}^n x_j^{b_{jk}}, \quad (65)$$

$$\rho_k^s(y_i) = y_i(1 + y_k)^{-b_{ki}}. \quad (66)$$

すると、合成

$$\hat{\mu}_k^s := \rho_k^s \circ \tau_k^s \quad (67)$$

に対して、

$$\hat{\mu}_k^s(x_i) = \begin{cases} x_k^{-1} \left( \prod_{j=1}^n x_j^{[-b_{ji}]_+} \right) (1 + \hat{y}_k) & i = k, \\ x_i & i \neq k, \end{cases} \quad (68)$$

$$\hat{\mu}_k^s(y_i) = \begin{cases} y_k^{-1} & i = k, \\ y_i y_k^{[b_{ki}]_+} (1 + y_k)^{-b_{ki}} & i \neq k \end{cases} \quad (69)$$

となり、種子の変異が再現される。(67) を、変異の **Fock-Goncharov 分解** と呼ぶ。

**注意 3.1.** 変異 (58) および (59) は、それぞれ、「 $c$  ベクトル  $\mathbf{c}_{k;t}$  の符号が正である場合における」 $g$  ベクトルの変異 (24) および  $c$  ベクトルの変異 (22) に一致する。

**注意 3.2.** 変換 (65), (66) は  $x, y$  の一般のベキに対しては以下のように表される。

$$\rho_k^s(x^m) = x^m (1 + x^{p_1^*(e_k)})^{-\langle d_k e_k, m \rangle} \quad (m \in M^\circ), \quad p_1^*(e_k) := \{\cdot, e_k\} \in M^\circ, \quad (70)$$

$$\rho_k^s(y^n) = y^n (1 + y^{e_k})^{-\{d_k e_k, n\}} \quad (n \in N). \quad (71)$$

ただし、 $\langle n, m \rangle$  は  $n \in N^\circ$  と  $m \in M^\circ$  の標準ペアリングである。

### 3.2. 散乱図式

以下では [GHKK18] にしたがって散乱図式の定義と基本事項を述べる。より包括的な定式化は紙数を要するので [GHKK18] に譲り、ここでの最低限必要な事項に絞って述べる。

前節の固定データに対して、写像  $p_1^*: N \rightarrow M^\circ$  を  $n \mapsto \{\cdot, n\}$  で定める。本節を通して、以下の技術的な仮定をする。



**仮定 3.3** (単射性の仮定). 写像  $p_1^*$  は単射である.

上の仮定は, 種子データで定まる交換行列  $B$  が正則であることと同値である (注意 3.4 を参照).

以下では, 前節の種子データ  $\mathbf{s} = (e_1, \dots, e_n)$  を一つ固定する. これは, 団パターンにおいて初期頂点  $t_0$  と初期シード  $\Sigma_{t_0}$  を与えることに相当する.

(a). モノイド環  $\widehat{\mathbf{k}[P]}$ : 種子データ  $\mathbf{s} = (e_1, \dots, e_n)$  に対して,  $P \subset M^\circ$  を

$$P := \sigma \cap M^\circ, \quad \sigma = \left\{ \sum_{i=1}^n a_i p_1^*(e_i) \mid a_i \in \mathbb{R}_{\geq 0} \right\} \subset M_{\mathbb{R}} := M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \quad (72)$$

と定める.  $P$  はモノイド (単位元を持つ半群) である. 標数 0 の体  $\mathbf{k}$  に対して,  $\mathbf{k}[P]$  を  $\mathbf{k}$  上のモノイド環  $\mathbf{k}[P]$  とする. イデアル  $J := \mathbf{k}[P] - \mathbf{k}0$  による  $\mathbf{k}P$  の完備化を  $\widehat{\mathbf{k}[P]}$  とする. 形式的な変数  $z$  を用いて,  $\widehat{\mathbf{k}[P]}$  の元を無限和

$$\sum_{m \in P} a_m z^m, \quad (a_m \in \mathbf{k}) \quad (73)$$

で表す.

**注意 3.4.** 写像  $p_1^*$  の団パターンにおける意味を説明する.  $\langle p_1^*(e_i), e_j \rangle = \{e_j, e_i\} = d_j^{-1} b_{ji}$  に注意すると,  $p_1^*(e_i) = \sum_{j=1}^n d_j^{-1} b_{ji} e_j^* = \sum_{j=1}^n b_{ji} f_j$  となる. したがって, (73) における  $z$  を前節 (b) 項における変数  $x$  と同一視すれば,  $z^{p_1^*(e_i)} = \prod_j x_j^{b_{ji}}$  となり, これは (8) の  $\hat{y}$  変数  $\hat{y}_i$  である. すなわち, 写像  $p_1^*$  により初期  $y$  変数  $y_i = y^{e_i}$  が初期  $\hat{y}$  変数  $\hat{y}_i = z^{p_1^*(e_i)}$  に対応する. さらに,  $p_1^*$  の準同形性により, この  $\hat{y}$  変数は種子データの変異のもとで,  $y$  変数と同じ変換 (62) にしたがう.

(b). 壁: 種子データ  $\mathbf{s} = (e_1, \dots, e_n)$  に対して,  $N^+ \subset N$  を

$$N^+ := \left\{ \sum_{i=1}^n a_i e_i \in N \mid a_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \sum_{i=1}^n a_i > 0 \right\} \quad (74)$$

と定める. 以下をみたすペア  $(\mathfrak{d}, f_{\mathfrak{d}})$  を壁 (wall) という.

- ある原始的な  $n_0 \in N^+$  に対して,  $f_{\mathfrak{d}} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^{k p_1^*(n_0)} \in \widehat{\mathbf{k}[P]}$ .
- $\mathfrak{d}$  は, 上の  $n_0$  に対して  $\mathfrak{d} \subset n_0^\perp \subset M_{\mathbb{R}}$  をみたす  $n-1$  次元の (強凸とは限らない) 有理凸多面錐である.

$\mathfrak{d}$  を壁  $(\mathfrak{d}, f_{\mathfrak{d}})$  の台 (support) という. 台  $\mathfrak{d}$  のこともしばしば壁という. また, (本稿のみの用語として)  $n_0, f_{\mathfrak{d}}$  を, それぞれ壁  $(\mathfrak{d}, f_{\mathfrak{d}})$  の正法ベクトル, 壁関数という. 注意 3.4 より, 壁関数  $f_{\mathfrak{d}}$  は初期  $\hat{y}$  変数の形式的ベキ級数とみなせる. 自然数  $l$  に対して,  $f_{\mathfrak{d}}$  の 1 以外の (非自明な) 項の初期  $\hat{y}$  変数に関する (全) 次数がすべて  $l$  より大きいとき,  $f_{\mathfrak{d}}$  は次数  $l$  以下で自明という.

(c). 散乱図式: 以下をみたす (有限個とは限らない) 壁の集合  $\mathfrak{D}$  を散乱図式 (scattering diagram) という.

- 任意の自然数  $l$  に対して, 壁関数  $f_{\mathfrak{d}}$  が次数  $l$  以下で非自明となる壁  $(\mathfrak{d}, f_{\mathfrak{d}})$  は有限個しかない.

また,

$$\text{Supp}(\mathfrak{D}) := \bigcup_{\mathfrak{d} \in \mathfrak{D}} \mathfrak{d}, \quad \text{Sing}(\mathfrak{D}) := \bigcup_{\mathfrak{d} \in \mathfrak{D}} \delta \mathfrak{d} \cup \bigcup_{\substack{\mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2 \in \mathfrak{D} \\ \dim \mathfrak{d}_1 \cap \mathfrak{d}_2 = n-2}} \mathfrak{d}_1 \cap \mathfrak{d}_2 \quad (75)$$

を, それぞれ散乱図式  $\mathfrak{D}$  の台 (support), 特異点集合 (singular locus) という.

以上で散乱図式の定義ができた. 次に, 散乱図式に関する基本的な定理を述べるために, さらにいくつかの定義を与える.

(d). 自己同型写像  $\mathfrak{p}_{f_0}$ : 壁関数  $f_0 = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^{kp_1^*(n_0)} \in \widehat{\mathbf{k}[P]}$  に対して,  $\widehat{\mathbf{k}[P]}$  の自己同形写像  $\mathfrak{p}_{f_0}$  を

$$\mathfrak{p}_{f_0}(z^m) = z^m f_0^{\langle n'_0, m \rangle}, \quad (m \in P) \quad (76)$$

と定める. ただし,  $n'_0$  はモノイド  $\mathbb{R}_{\geq 0} n_0 \cap N^\circ$  の生成元であり,  $\langle n'_0, m \rangle$  は  $n'_0 \in N^\circ$  と  $m \in M^\circ$  の標準ペアリングである.

**注意 3.5.** 特に, 二項式  $f_0 = 1 + z^{p_1^*(e_k)}$  に対しては,  $\mathfrak{p}_{f_0}^{-1}(z^m) = z^m f_0^{-\langle d_k, e_k, m \rangle}$  となる. これは, 変数  $z$  と  $x$  の同一視のもとで, (70) と一致する.

(e) 壁越え自己同形写像  $\mathfrak{p}_{\gamma, \mathfrak{D}}$ : 散乱図式  $\mathfrak{D}$  に対して,  $\gamma$  を  $M_{\mathbb{R}} - \text{Sing}(\mathfrak{D})$  内のなめらかな曲線で, 始点と終点は  $\text{Supp}(\mathfrak{D})$  に含まれず, また  $\mathfrak{D}$  の壁 (の台) とは横断的に交わるものとする. 任意の自然数  $\ell$  に対して, 散乱図式の条件より,  $\gamma$  と交わる壁で壁関数  $f_0$  が次数  $\ell$  以下で非自明なものは有限個しかない. それらを, 始点から順に  $(\mathfrak{d}_1, f_{\mathfrak{d}_1}), \dots, (\mathfrak{d}_s, f_{\mathfrak{d}_s})$  とする. 各壁との交わりの符号  $\epsilon_i$  ( $i = 1, \dots, s$ ) を

$$\epsilon_i = \begin{cases} +1 & \langle n_0, \gamma' \rangle < 0 \\ -1 & \langle n_0, \gamma' \rangle > 0 \end{cases} \quad (77)$$

と定める. ここで,  $n_0 \in N^+$  は  $\mathfrak{d}_i$  の正法ベクトルであり,  $\gamma' \in M_{\mathbb{R}}$  は  $\mathfrak{d}_i$  との交点における  $\gamma$  の速度ベクトルである. このとき,  $\widehat{\mathbf{k}[P]}$  の自己同形写像  $\mathfrak{p}_{\gamma, \mathfrak{D}}^\ell$  を

$$\mathfrak{p}_{\gamma, \mathfrak{D}}^\ell = \mathfrak{p}_{f_{\mathfrak{d}_s}}^{\epsilon_s} \cdots \mathfrak{p}_{f_{\mathfrak{d}_1}}^{\epsilon_1} \quad (78)$$

と定め, さらに  $\widehat{\mathbf{k}[P]}$  の自己同形写像  $\mathfrak{p}_{\gamma, \mathfrak{D}}$  を極限

$$\mathfrak{p}_{\gamma, \mathfrak{D}} = \lim_{\ell \rightarrow \infty} \mathfrak{p}_{\gamma, \mathfrak{D}}^\ell \quad (79)$$

により定める. これを, 曲線  $\gamma$  に沿った壁越え自己同形写像 (wall-crossing automorphism) という.

(f). 同値性: 二つの散乱図式  $\mathfrak{D}, \mathfrak{D}'$  が以下をみたすとき,  $\mathfrak{D}$  と  $\mathfrak{D}'$  は同値 (equivalent) という.

- $\mathfrak{p}_{\gamma, \mathfrak{D}}, \mathfrak{p}_{\gamma, \mathfrak{D}'}$  がともに定義される任意の曲線  $\gamma$  に対して  $\mathfrak{p}_{\gamma, \mathfrak{D}} = \mathfrak{p}_{\gamma, \mathfrak{D}'}$  が成り立つ.

(g). 整合性: 散乱図式  $\mathfrak{D}$  が以下をみたすとき,  $\mathfrak{D}$  は整合的 (consistent) という.

- $\mathfrak{p}_{\gamma, \mathfrak{D}}$  が定義される任意の曲線  $\gamma$  に対して, 壁越え自己同形写像  $\mathfrak{p}_{\gamma, \mathfrak{D}}$  は  $\gamma$  の始点と終点のみ依存する. (すなわち,  $\mathfrak{p}_{\gamma, \mathfrak{D}}$  が定義される任意の閉曲線  $\gamma$  に対して,  $\mathfrak{p}_{\gamma, \mathfrak{D}} = \text{id}$  となる.)

(h). 壁の向き: 始めに,  $n_0 \in N^+$  に対して,  $\langle p^*(n_0), n_0 \rangle = \{n_0, n_0\} = 0$ , すなわち,  $p^*(n_0) \in n_0^\perp \subset M_{\mathbb{R}}$  であることに注意する. そこで, 原始元  $n_0 \in N^+$  を正法ベクトルに持つ壁  $\mathfrak{d}$  において,  $p^*(n_0) \in \mathfrak{d}$  となるとき壁を内向き (incoming), そうでないとき外向き (outgoing) という. また,  $-p^*(n_0)$  を壁の向き (direction) という.

例えば,  $e_i \in N^+$  を正法ベクトルに持つ壁  $\mathfrak{d} = e_i^\perp$  に対して,  $p^*(e_i) \in \mathfrak{d}$  であるので,  $\mathfrak{d}$  は内向きの壁である.

以上の準備のもとに, 散乱図式に対する最も基本的な二つの定理を述べる.

**定理 3.6** ([GS11, KS14, GHKK18]). 任意の種子データ  $\mathfrak{s}$  に対して, 以下をみたす散乱図式  $\mathfrak{D}_\mathfrak{s}$  が同値を除き一意に存在する.

- $\mathfrak{D}_s$  は整合的である.
- $\mathfrak{D}_s$  は内向きの壁の集合  $\mathfrak{D}_{\text{in},s} = \{(e_i^\perp, 1 + z^{p_1^*(e_i)}) \mid i = 1, \dots, n\}$  を含む.
- $\mathfrak{D}_{\text{in},s}$  の壁以外のすべての  $\mathfrak{D}_s$  の壁は外向きである.

任意の初期データと種子データから定まる反対称化可能行列  $B$ ,  $b_{ij} = \{d_i e_i, e_j\}$ , に対して,  $\Sigma(B)$  を  $B$  を初期頂点  $t_0 \in \mathbb{T}_n$  における初期交換行列に持つ団パターンとする.

**定理 3.7** ([GHKK18], [Rea20]).  $B$  を初期交換行列に持つ団パターン  $\Sigma$  の初期  $g$  ベクトルである  $\mathbb{Z}^n$  の単位ベクトル  $e_1, \dots, e_n$  を  $M_{\mathbb{R}}$  の基底  $f_1, \dots, f_n$  と同一視することにより,  $\Sigma$  の  $g$  ベクトル扇  $\Delta(\Sigma)$  は定理 3.6 における散乱図式  $\mathfrak{D}_s$  の台に自然に埋め込まれる.

**注意 3.8.** 定理 3.6 および定理 3.7 はともに単射性の仮定 (3.3) の元で成立するが, 初期データを  $2n$  次元に適当に拡大することで単射性の仮定はみたされ, これらの定理の団代数へのさまざまな帰結は単射性の条件を外しても成立する.

**注意 3.9.** 散乱図式という用語を導入したのは Gross-Siebert [GS11] である. 彼らは, 始めに内向きの壁をインプットとして与え, それらを整合的に拡張するために外向きの壁を逐次付け加えるという構成を, 内向きの壁が原点で衝突して外向きの壁を散乱させるととらえ, 散乱図式と呼んだ. 次節の図 3 を参照されたし.

### 3.3. ランク 2 の例

ランクが 2 の場合に, 定理 3.6 および定理 3.7 を 2.2 節の  $g$  ベクトル扇を用いて説明する.

(I). 有限型.

例として一番簡単な  $A_2$  型を考える. 固定データを  $N = N^\circ = \mathbb{Z}^2$ ,  $d_1 = d_2 = 1$ , 反対称双線形式  $\{\cdot, \cdot\}$  を  $N$  の標準基底  $e_1, e_2$  に対して,  $\{e_1, e_2\} = -1$  で定まるものとする.

また, 種子データ  $s = (e_1, e_2)$  として上の標準基底そのものをとる.  $f_1, f_2$  を  $M = M^\circ$  の双対基底とする. このとき,  $b_{ij} = \{e_i, e_j\}$  は (46) の行列  $B$  を与える. また, 写像  $p_1^*: N \rightarrow M^\circ$  に対して,  $p_1^*(e_1) = f_2, p_1^*(e_2) = -f_1$  となる.

$$x_1 = z^{f_1}, x_2 = z^{f_2}, \hat{y}_1 = z^{p_1^*(e_1)} = x_2, \hat{y}_2 = z^{p_1^*(e_2)} = x_1^{-1} \text{ とおく.}$$

このとき, 定理 3.6 における  $\mathfrak{D}_{\text{in},s}$  の壁

$$(e_1^\perp, 1 + \hat{y}_1), (e_2^\perp, 1 + \hat{y}_2) \quad (80)$$

に, 外向きの壁

$$(\mathbb{R}_{\geq 0}(f_1 - f_2), 1 + \hat{y}_1 \hat{y}_2), \quad (81)$$

を加えた散乱図式  $\mathfrak{D}$  を考える (図 3).  $\mathfrak{D}$  の台は, 図 2 (a) の  $A_2$  型の  $g$  ベクトル扇に他ならない. 一方, 壁関数の非自明項は壁における団の変異に対応するトロピカル  $\hat{y}$  変数 (トロピカル  $y$  変数を  $\hat{y}$  に置き換えたもの) で与えられる. もう少し正確に言うと,  $\gamma_1, \gamma_2$  を図 3 の曲線とする.  $\gamma_1$  に沿った  $C$  行列の変異は, 以下のものとなる.

$$C(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mu_1} C(1) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mu_2} C(2) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (82)$$

このとき, 変異に対応する  $c$  ベクトルは  $\mathbf{c}_1(0) = e_1, \mathbf{c}_2(1) = e_2$  であり, トロピカル  $y$  変数は  $y_1(0) = y_1, y_2(1) = y_2$  となり, これらが (80) の壁関数に対応している. 一方,  $\gamma_2$  に沿った  $C$  行列の変異は, 以下のものとなる.

$$C(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mu_3} C(-1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mu_4} C(-2) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mu_5} C(-3) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (83)$$

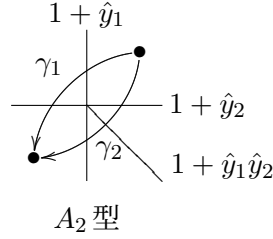


図 3:  $A_2$  型の整合的散乱図式

このとき, 変異に対応する  $c$  ベクトルは  $\mathbf{c}_2(0) = e_2$ ,  $\mathbf{c}_1(-1) = e_1 + e_2$ ,  $\mathbf{c}_1(-2) = e_1$  であり, トロピカル  $y$  変数は  $y_2(0) = y_2$ ,  $y_1(-1) = y_1 y_2$ ,  $y_2(-2) = y_1$  となり, これらが (80), (81) の壁関数に対応している.

**事実 3.10.** 上の  $c$  ベクトルの符号  $\mathbf{c}_1(0) = e_1$ ,  $\mathbf{c}_2(1) = e_2$ ,  $\mathbf{c}_2(0) = e_2$ ,  $\mathbf{c}_1(-1) = e_1 + e_2$ ,  $\mathbf{c}_1(-2) = e_1$  はすべて正である.

このとき, 散乱図式  $\mathfrak{D}$  は整合的になり, 定理 3.6 の散乱図式  $\mathfrak{D}_s$  を与える.

散乱図式  $\mathfrak{D}$  が整合的となること, すなわち, 上の  $\gamma_1, \gamma_2$  に対して  $\mathbf{p}_{\gamma_1, \mathfrak{D}} = \mathbf{p}_{\gamma_2, \mathfrak{D}}$  となることは直接両辺を計算して簡単に確かめられる. ここではむしろ,  $\mathfrak{D}$  の整合性と团パターンの周期性との関係を明らかにする. (このことをていねいに説明した文献を著者は知らないのでこの場を借りてややていねいに説明する.)

まず, 2.2 節の  $A_2$  型の团パターンにおける  $x$  変数に対して, 図 3 の曲線  $\gamma_1$  と曲線  $\gamma_2$  に対応する変異を考える. すると, 互換  $\tau_{12}$  に対する  $\tau_{12}$  周期性より,

$$\mu_2 \mu_1 = \tau_{12} \mu_2 \mu_1 \mu_2. \quad (84)$$

という関係がなりたつ. これを, (68) の写像  $\hat{\mu}_k^s$  を用いて書き直すと, (写像の合成の順序が逆になることに注意して)

$$\hat{\mu}_1 \hat{\mu}_2 = \hat{\mu}_2 \hat{\mu}_1 \hat{\mu}_2 \tau_{12} \quad (85)$$

となる. ただし, 種子データの添字  $s$  および写像の合成の記号  $\circ$  は省略した. ここで Fock-Goncharov の分解 (67) を代入して,

$$\rho_1 \tau_1 \rho_2 \tau_2 = \rho_2 \tau_2 \rho_1 \tau_1 \rho_2 \tau_2 \tau_{12}. \quad (86)$$

$\tau_1, \tau_2$  を右に集めると,

$$\rho_1 \rho_2' \tau_1 \tau_2 = \rho_2 \rho_1' \rho_2'' \tau_2 \tau_1 \tau_2 \tau_{12} \quad (87)$$

ただし,  $\rho_2' = \tau_1 \rho_2 \tau_1^{-1}$ ,  $\rho_1' = \tau_2 \rho_1 \tau_2^{-1}$ ,  $\rho_2'' = \tau_2 \tau_1 \rho_2 \tau_1^{-1} \tau_2^{-1}$  とおいた. ここで, 事実 3.10, 注意 3.1, そして  $G$  行列の  $\tau_{12}$  周期性より,

$$\tau_1 \tau_2 = \tau_2 \tau_1 \tau_2 \tau_{12} \quad (88)$$

が得られる. これを (87) に代入すると,

$$\rho_1 \rho_2' = \rho_2 \rho_1' \rho_2'' \quad (89)$$

となり, 両辺の逆をとると

$$\rho_2'^{-1} \rho_1^{-1} = \rho_2''^{-1} \rho_1'^{-1} \rho_2^{-1} \quad (90)$$

が得られる. 一方, 再び, 事実 3.10 と注意 3.1, 3.4, 3.5 より,

$$\rho_1 = \mathfrak{p}_{1+\hat{y}_1}^{-1}, \rho'_2 = \mathfrak{p}_{1+\hat{y}_2}^{-1}, \rho_2 = \mathfrak{p}_{1+\hat{y}_2}^{-1}, \rho'_1 = \mathfrak{p}_{1+\hat{y}_1\hat{y}_2}^{-1}, \rho''_2 = \mathfrak{p}_{1+\hat{y}_1}^{-1} \quad (91)$$

となる. したがって, (90) がまさに整合性の条件

$$\mathfrak{p}_{\gamma_1, \mathfrak{D}} = \mathfrak{p}_{\gamma_2, \mathfrak{D}} \quad (92)$$

に他ならないことがわかる. 以上により, 散乱関式  $\mathfrak{D}$  が整合的であることが確かめられた. また, 上の導出をよく見ると, 散乱関式の整合性は,  $G$  行列  $G_t$  (トロピカル  $x$  変数) の周期性から  $x$  変数の組 (団)  $\mathbf{x}_t$  の周期性がしたがうという脱トロピカル化の性質に他ならないことがわかった.

関心のある読者は,  $B_2, G_2$  型についても同様のことを確かめられたい.

(II). アフィン無限型. 一方, 無限型の場合は, 有限型と本質的に異なる現象が起こる. 例えば,  $A_1^{(1)}$  型に対応する散乱関式  $\mathfrak{D}_s$  は, 有限型と同様に図 2(d) の  $g$  ベクトル扇とトロピカル  $\hat{y}$  変数の壁関数により得られる壁たちに加えて, ちょうど  $g$  ベクトル扇の空白部分を埋める壁  $\mathfrak{d} = \mathbb{R}_{\geq 0}(1, -1)$  が付け加わり, その壁関数  $f_{\mathfrak{d}}$  は以下の無限和

$$f_{\mathfrak{d}} = \left( \sum_{k=0}^{\infty} \hat{y}_1^k \hat{y}_2^k \right)^2, \quad \hat{y}_1 = x_2^2, \hat{y}_2 = x_1^{-2} \quad (93)$$

で与えられる [Rei11]. (これが, 完備化  $\widehat{\mathbf{k}[P]}$  が必要な理由である.)

(III). 非アフィン無限型. 非アフィン無限型の場合は, さらに一層複雑な状況となる. 図 2(f) の  $g$  ベクトル扇の壁に加えて, さらに図 2(f) の dark side と呼んだ部分にも無限個の壁が存在する. この具体的な記述は実はまだわかっていないが, Gross たち [GHKK18] はその錐に含まれる任意の有理的な傾きを持つ半直線が  $\mathfrak{D}_s$  の壁になると予想している.

以上見たように, 散乱関式は任意の団パターンを包含するのみならず, 団パターンの変異では到達できない未知なる団パターンの親類を無数に含むものであり, 今後のさらなる研究が必要である.

**問題 3.11.** 散乱関式における dark side は団パターンのどのような拡張を与えるのか?

**問題 3.12.** 散乱関式はなんらかの意味でルート系の理論の拡張とみなせるか?

### 3.4. 団代数への応用

1.6 節で述べたとおり, Gross たち [GHKK18] は散乱関式を用いて団代数理論における二つの大きな課題であった  $C$  行列の符合同一性予想 (定理 1.13) と Laurent 正值性予想 (定理 1.14) を解決した. それらについてごく簡単に説明して本稿を終える.

まず,  $C$  行列の符合同一性については,  $G$  行列と  $C$  行列の双対性 (32) の元で, 散乱関式の壁 ( $g$  ベクトル錐の極大面) の正法ベクトル  $n_0 \in N^+$  は  $c$  ベクトルの  $\pm 1$  倍と同一視できる. 一方,  $n_0$  はもちろん正ベクトルであるので, これより  $c$  ベクトルの符号同一性がわかる. (正確には, 双対性 (32) と符合同一性をセットで変異に関する帰納法で示す.) すなわち,  $C$  行列の符合同一性自体はあらかじめ散乱関式の定義に含まれていて, 非自明なのは定理 3.6 における散乱関式  $\mathfrak{D}_s$  の存在と,  $g$  ベクトル錐を  $\mathfrak{D}_s$  に埋め込めるという事実 (定理 3.7) である. ただし, Gross たちは以上のことには言及せず, 符合同一性をトーリック幾何的な性質に帰着させて示しているのでそちらの方面に興味がある方は原論文を参照されたい.

一方, Laurent 正值性予想は, 前節と同様の考察により, 壁越え自己同形写像の像  $\mathfrak{p}_{\gamma, \mathfrak{D}}(z^m)$  の Laurent 正值性に帰着できる. そして, Gross たちは散乱関形に対する折線 (broken line) という初等幾何的なデータを用いて  $\mathfrak{p}_{\gamma, \mathfrak{D}}(z^m)$  の組み合わせ論的非負表示を与えることにより, Laurent 正值性を示した.

## 参考文献

- [CF99] L. Chekhov and V. V. Fock, *Quantum Teichmüller space*, Theor. Math. Phys. **120** (1999), 1245–1259; arXiv:math/9908165.
- [Chá15] A. Chávez, *On the  $c$ -vectors of an acyclic cluster algebra*, Int. Math. Res. Not. **2015** (2015), 1590–1600; arXiv:1203.1415.
- [CS14] L. Chekhov and M. Shapiro, *Teichmüller spaces of Riemann surfaces with orbifold points of arbitrary order and cluster variables*, Int. Math. Res. Notices **2014** (2014), 2746–2772; arXiv:1111.3963 [math-ph].
- [DWZ10] H. Derksen, J. Weyman, and A. Zelevinsky, *Quivers with potentials and their representations II: Applications to cluster algebras*, J. Amer. Math. Soc. **23** (2010), 749–790; arXiv:0904.0676 [math.RA].
- [FG09] V. V. Fock and A. B. Goncharov, *Cluster ensembles, quantization and the dilogarithm*, Annales Sci. de l'École Norm. Sup. **42** (2009), 865–930; arXiv:math/0311245 [math.AG].
- [FST08] S. Fomin, M. Shapiro, and D. Thurston, *Cluster algebras and triangulated surfaces. Part I: Cluster complexes*, Acta Math. **201** (2008), 83–146; arXiv:math/0608367 [math.RA].
- [FZ02] S. Fomin and A. Zelevinsky, *Cluster algebras I. Foundations*, J. Amer. Math. Soc. **15** (2002), 497–529 (electronic); arXiv:math/0104151 [math.RT].
- [FZ03a] ———, *Cluster algebras II. Finite type classification*, Invent. Math. **154** (2003), 63–121; arXiv:math/0208229 [math.RA].
- [FZ03b] ———,  *$Y$ -systems and generalized associahedra*, Ann. of Math. **158** (2003), 977–1018; arXiv:hep-th/0111053.
- [FZ07] ———, *Cluster algebras IV. Coefficients*, Compositio Mathematica **143** (2007), 112–164; arXiv:math/0602259 [math.RT].
- [GHKK18] M. Gross, P. Hacking, S. Keel, and M. Kontsevich, *Canonical bases for cluster algebras*, J. Amer. Math. Soc. **31** (2018), 497–608; arXiv:1411.1394 [math.AG].
- [GS11] M. Gross and B. Siebert, *From affine geometry to complex geometry*, Annals of Math. **174** (2011), 95–138; arXiv:math/0703822.
- [IIK<sup>+</sup>10] R. Inoue, O. Iyama, A. Kuniba, T. Nakanishi, and J. Suzuki, *Periodicities of  $T$  and  $Y$ -systems*, Nagoya Math. J. **197** (2010), 59–174; arXiv:0812.0667 [math.QA].
- [IIK<sup>+</sup>13] R. Inoue, O. Iyama, B. Keller, A. Kuniba, and T. Nakanishi, *Periodicities of  $T$  and  $Y$ -systems, dilogarithm identities, and cluster algebras I: Type  $B_r$* , Publ. RIMS **49** (2013), 1–42; arXiv:1001.1880 [math.QA].
- [IIO19] R. Inoue, T. Ishibashi, and H. Oya, *Cluster realizations of Weyl groups and higher Teichmüller theory*, 2019, arXiv:1902.02716 [math.RT].
- [Kac90] V.G. Kac, *Infinite dimensional lie algebras*, 3rd ed., Cambridge University Press, 1990.
- [KS06] M. Kontsevich and Y. Soibelman, *Affine structures and non-Archimedean analytic spaces*, Prog. Math. **244** (2006), 321–385; arXiv:math/0406564.
- [KS14] M. Kontsevich and Y. Soibelman, *Wall-crossing structures in Donaldson-Thomas invariants, integrable systems and mirror symmetry*, Homological mirror symmetry and tropical geometry, Lect. Notes Unione Ital., vol. 15, Springer, 2014, pp. 197–308; arXiv:1303.3253 [math.AG].
- [LS15] K. Lee and R. Schiffler, *Positivity for cluster algebras*, Ann. of Math. **182** (2015), 72–125; arXiv:1306.2416.
- [Nak20] T. Nakanishi, *Synchronicity phenomenon in cluster patterns*, J. London Math. Soc. (2020), online first; arXiv:arXiv:1906.12036 [math.RA].
- [NS14] T. Nakanishi and S. Stella, *Diagrammatic description of  $c$ -vectors and  $d$ -vectors of cluster algebras of finite type*, Electron. J. Combin. (2014), #P1.3, 107 pages; arXiv:1210.6299 [math.RA].
- [NZ12] T. Nakanishi and A. Zelevinsky, *On tropical dualities in cluster algebras*, Contemp. Math. **565** (2012), 217–226, arXiv:1101.3736 [math.RA].
- [OS20] N. Ohkubo and T. Suzuki, *Generalized  $q$ -Painlevé VI systems of type  $(A_{2n+1} + A_1 + A_1)^{(1)}$  arising from cluster algebra*, Int. Math. Res. Notices (2020), rnaa283; arXiv:1810.03252 [math.QA].
- [Rea20] N. Reading, *Scattering fans*, Int. Math. Res. Notices **23** (2020), 9640–9673;

arXiv:1712.06968.

[Rei11] M. Reineke, *Cohomology of quiver moduli, functional equations, and integrality of Donaldson-Thomas type invariants*, Compos. Math. **147** (2011), 943–964; arXiv:0903.0261 [math.AG].

[Zam91] Al. B. Zamolodchikov, *On the thermodynamic Bethe ansatz equations for reflectionless ADE scattering theories*, Phys. Lett. **B253** (1991), 391–394.