ゲームの戦略
– Nim って知ってますか？ –
１９９９年度名古屋大学数学公開講座

内藤 久資
名古屋大学多元数理科学研究科
naito@math.nagoya-u.ac.jp

はじめに

１９９７年はコンピュータの世界において, 忘れることのできない事件の起こった年である. ＩＢＭの並列計算機がチェスの世界チャンピオンである, ゲイリー・カスパロフに勝利を収めたという歴史的な事件が起きた.

このことに象徴されるように, コンピュータの世界では「ゲームの戦略」というテーマが古くから研究されていて, いくつかのゲームにおいては, その「必勝法」と呼ばれるアルゴリズムが知られている.

チェス, 将棋, 囲碁, オセロなどは, 各場面において「最善の手」を探すことにより, その場面での意思決定を行なうゲームであるが, 一方で, ここで紹介する Nim （「三山くずし」または「石取りゲーム」と呼ばれることもある）は, 「必勝法」の存在するゲームである. ここで, 「必勝法」とは, ある定められた条件の元では, その条件から決定できる手を打つことにより, 必ず勝つことができるためのアルゴリズムである.

Nim ってなあに

Nim とは, ２人のプレイヤーが交互にプレイを行なうゲームである. はじめに, 何個かの石の集まりを３つ（この集まりを「山」と呼ぶ）用意する. プレイヤーは自分の番の時, １つの山から勝手な（正の）個数の石を取り去る. このルールで, プレイヤーが交互にプレイを行ない, すべての石がなくなるまでプレイを続ける. この時, 最後の石を取り去ることになったプレイヤーが勝ちである. （逆に, このプレイヤーを負けと決めても良い.）

このゲームに関する研究は１９００年頃 [1, 3] から始まり, 多くの変形が考えられているが, ここでは, もっとも単純な Nim について, その必勝法のアルゴリズムと, 数学的な解説を行ないたい. 時間があれば, Nim の変形のゲームに関しても必勝法の数学的内容について解説を行なう.

Date: １９９９年８月.

1 ゲームの定義

もっとも基本的な Nim は以下のようなゲームである.

- ２人のプレイヤーが交互にゲームを行なう.
- 何個かの石の集まり（これを “Pile” と呼ぼう）を３つ用意する.
- ２人のプレイヤーは自分の手順の時に, どれか一つの Pile からいくつかの（正の）個数の石を取り去る.
- この手順を順に繰り返して, 最後の石をとったプレイヤーを勝ちとする.（このようにして勝者を決める場合を “normal case” と呼ぼう.）
  逆に, 最後の石をとったプレイヤーを負けと決めても良い. （このようにして勝者を決める場合を “reverse case” と呼ぼう.）

このゲームを数学的に定義すると, 以下のようになる.

- ２人のプレイヤーが交互にゲームを行なう.
- 正の整数（これを “Pile” と呼ぼう）を３つ用意する. これを N_1, N_2, N_3 と書く.
- ２人のプレイヤーは自分の手順の時に, N_1, N_2, N_3 のうちのどれかから, 正の値を引く.
- この手順を順に繰り返して, $N_1 = N_2 = N_3 = 0$ としたプレイヤーを勝ちとする.
  逆に, $N_1 = N_2 = N_3 = 0$ としたプレイヤーを負けと決めても良い.

このゲームに対しては, 各手順において各プレイヤーが勝つための戦略を持っていることが証明できる. 以下ではそれを解説することにより, Nim の「必勝法」を考えてみよう.

そこで, もう少しゲームを一般化して, 以下のようなゲームを考える.（以下では, これを Nim と呼ぶ.）

- ２人のプレイヤーが交互にゲームを行なう.
- 正の整数（これを “Pile” と呼ぼう）を k 個用意する. これを $N_1, \cdots, N_k$ と書く.
- ２人のプレイヤーは自分の手順の時に, $N_1, \cdots N_k$ のうちのどれかから, 正の値を引く.
- この手順を順に繰り返して, すべての i に対して, $N_i = 0$ としたプレイヤーを勝ちとする.（これを “normal case” と呼ぶ.）
  逆に, すべての i に対して $N_i = 0$ としたプレイヤーを負けと決めても良い.（これを “reverse case” と呼ぶ.）

1.1 状態を表す数

Nim の各場面において, その状態を表す数を一つ定義しよう.

Definition 1.1. 正または０の整数の集まり $\{N_i\}_{i=1}^{k} = \{N_1, \cdots, N_k\}$ に対して, $\mathrm{NIM}(\{N_1, \cdots, N_k\}) = \mathrm{NIM}(\{N_i\})$ を以下のように定義する.

与えられた $\{N_i\}_{i=1}^{k}$ の各数 N_i を２進数に展開し, その各桁の数を上から

$$N_i^l \quad N_i^{l-1} \quad \cdots \quad N_i^1 \quad N_i^0$$

と並べる. すなわち,

$$N_i = N_i^l 2^l + N_i^{l-1} 2^{l-1} + \cdots + N_i^1 2 + N_i^0$$

とする．（ここで, $N_i^l = 0, 1$ である．）この時,

$$\begin{aligned}\mathrm{NIM}(\{N_i\}) &= (N_1^l + \cdots + N_k^l, N_1^{l-1} + \cdots + N_k^{l-1}, \cdots, N_1^1 + \cdots + N_k^1, N_1^0 + \cdots + N_k^0)_2 \\ &= (N_1^l + \cdots + N_k^l)2^l + (N_1^{l-1} + \cdots + N_k^{l-1})2^{l-1} + \cdots \\ &\quad + (N_1^1 + \cdots + N_k^1)2 + (N_1^0 + \cdots + N_k^0)\end{aligned}$$

と定義する．ただし, 和は 2 を法とする和をとることにする．

2 進数で展開した各桁は 0 または 1 になるので, その 2 を法とした和とは, 各 N_i^j に含まれる 1 の数が偶数ならば 0 となり, 奇数ならば 1 となる．

Example 1.2. 具体的に $\mathrm{NIM}(\{N_i\})$ を計算してみよう．

1. $N_1 = 3$, $N_2 = 4$, $N_3 = 5$ の時．
   N_1, N_2, N_3 をそれぞれ 2 進数で展開してみると,

$$\begin{aligned} N_1 = 3 &= 0 \quad 1 \quad 1 \\ N_2 = 4 &= 1 \quad 0 \quad 0 \\ N_3 = 5 &= 1 \quad 0 \quad 1 \\ \mathrm{NIM}(\{3,4,5\}) &= 0 \quad 1 \quad 0 = 2 \end{aligned}$$

   となり, $\mathrm{NIM}(\{3,4,5\}) = (0,1,0)_2 = 2$ である．
2. $N_1 = 2$, $N_2 = 5$, $N_3 = 7$ の時．
   N_1, N_2, N_3 をそれぞれ 2 進数で展開してみると,

$$\begin{aligned} N_1 = 2 &= 0 \quad 1 \quad 0 \\ N_2 = 5 &= 1 \quad 0 \quad 1 \\ N_3 = 7 &= 1 \quad 1 \quad 1 \\ \mathrm{NIM}(\{2,5,7\}) &= 0 \quad 0 \quad 0 = 0 \end{aligned}$$

   となり, $\mathrm{NIM}(\{2,5,7\}) = (0,0,0)_2 = 0$ である．

はじめに NIM が満たす性質を調べておこう．

Proposition 1.3. NIM は以下の性質を持っている．

1. $\{N_i\}$ の順序を並び変えたものを $\{N_i'\}$ とおくと, $\mathrm{NIM}(\{N_i\}) = \mathrm{NIM}(\{N_i'\})$ が成り立つ．
2. $\mathrm{NIM}(\{M, M\}) = 0$ が成り立つ．
3. $\mathrm{NIM}(\{N_1, \cdots, N_k\}) = \mathrm{NIM}(\{N_1, \cdots, N_l\}, \mathrm{NIM}(\{N_{l+1}, \cdots, N_k\}))$ が成り立つ．
4. N_i の 2 進展開のある桁から上位だけを取り出した数を N_{i_1}, 残りの下の桁の数を N_{i_2} とおくと, $\mathrm{NIM}(\{N_1, \cdots, N_k\}) = \mathrm{NIM}(\{N_1, \cdots, N_{i_1}, N_{i_2}, \cdots, N_l\})$ が成り立つ．

Proof. これらを証明するための基本的なことをはじめに見ておこう．NIM の演算は, 2 進数で展開した数値の各桁の 1 の数が偶数か奇数かを調べているに過ぎない．これは, $\{N_i\}$ の各数の 2 進展開の第 m 桁の数値 $\{N_i^m\}$ に対して,

$$N_1^m + \cdots + N_k^m \bmod 2$$

を計算していることになる．mod2 の計算においては, 足し算と引き算は同じ意味を持つ．さらに, 次の事実を考えれば, 上の結果は明らかである．

1. mod2 の計算は $a+b=b+a$ を満たすことから明らか.
2. M の 2 進展開の各桁の数値は同じであるので, $1+1=0$, $0+0=0$ より $\mathrm{NIM}(\{M,M\})=0$ が成り立つ.

□

Theorem 1.4. Nim において, 状態 $\{N_i\}$ が $\mathrm{NIM}(\{N_i\})=0$ である時, 正当な Nim のプレイを 1 回行なうと, （どのようなプレイであっても）$\mathrm{NIM}(\{N_i'\})\neq 0$ となる.

逆に, 状態 $\{N_i\}$ が $\mathrm{NIM}(\{N_i\})\neq 0$ である時, 正当な Nim のプレイで, 次の状態 $\{N_i'\}$ を $\mathrm{NIM}(\{N_i'\})=0$ とする手が存在する.

Proof. はじめに, 現在の状態 $\{N_i\}$ が $\mathrm{NIM}(\{N_i\})=0$ を満たしていると仮定しよう. この時に正当なプレイを行なうと, $\{N_i\}$ のうちのどれか 1 つの値だけが変化する. それを N_{i_0} とし, 変化した後の値を N_{i_0}' とおく. この時, 定義によって $0\leq N_{i_0}'<N_{i_0}$ が成り立っている. したがって, N_{i_0} と N_{i_0}' の 2 進展開の各桁を比較すると, 少なくとも 1 箇所は 0 と 1 が異なっていなければならない. ここで, $\mathrm{NIM}(\{N_i\})$ は 2 進展開の各桁の 1 の個数を数えていて, そのうち N_{i_0} だけが変化するので, $\mathrm{NIM}(\{N_i'\})$ のうちのどこか 1 箇所は 0 から 1 に変化する. これを厳密に計算すると, 以下のようになる.

最初の状態 $\{N_i\}$ に対して, 正当なプレイを行なった後の状態 $\{N_i'\}$ は, $i\neq i_0$ に対しては, $N_i=N_i'$ が成り立ち, $N_{i_0}>N_{i_0}'$ が成り立つ. ここで, $\mathrm{NIM}(\{N_i\})=0$ より, すべて $j=0,\cdots,l$ に対して

$$N_1^j+\cdots+N_k^j=0$$

が成り立つ. ここで, $N_{i_0}\neq N_{i_0}'$ より, 少なくとも一つの $j=j_0$ に対して

$$N_{i_0}^{j_0}\neq (N_{i_0}')^{j_0}$$

が成り立つ. したがって,

$$((N_1')^{j_0}+\cdots+(N_{i_0}')^{j_0}+\cdots+(N_k')^{j_0})-(N_1^{j_0}+\cdots+N_{i_0}^{j_0}+\cdots+N_k^{j_0})=N_{i_0}^{j_0}-(N_{i_0}')^{j_0}=1$$

が成り立つ. 仮定より,

$$N_1^{j_0}+\cdots+N_{i_0}^{j_0}+\cdots+N_k^{j_0}=0$$

であるので, よって,

$$(N_1')^{j_0}+\cdots+(N_{i_0}')^{j_0}+\cdots+(N_k')^{j_0}=1$$

が成り立つ. すなわち $\mathrm{NIM}(\{N_i'\})\neq 0$ が成り立つ.

逆に, $\mathrm{NIM}(\{N_i\})\neq 0$ である場合を考えよう. $M=\mathrm{NIM}(\{N_i\})$ とおく. ここで, M の 2 進展開の桁数を $l+1$ とおく. 次に $\{N_i\}$ の中からその 2 進展開の $l+1$ 桁目が 1 になっているものを一つ選び, N_{i_0} とおく. ここで, M の $l+1$ 桁目が 1 であることから, 少なくとも一つはそのようなものが存在する. さらに, N_{i_0} の $l+2$ 桁目より上の部分（ $l+1$ 桁目以下は 0 で埋める）を N_{i_1}, $l+1$ 桁目以下の部分を N_{i_2} とおき, さらに, $L=\mathrm{NIM}(N_{i_2},M)$ とおく. M はそれ以上の桁を持たないので, N_{i_2} と M の 2 進展開の $l+1$ 桁目はともに 1 であるので, L の 2 進展開の $l+1$ 桁目は 0 となることから, $N_{i_2}>L$ がわかる.

そこで, N_{i_0} の $l+1$ 桁目以下 N_{i_2} を L に置き換えて見よう. $\{N_{i_2}\}_{i_2}$ で $\{N_i\}$ から N_{i_0} を除き, N_{i_1} を付け加えたものを表す. Proposition 1.4 より,

$$\begin{aligned}\mathrm{NIM}(\{N_i\}_{i_2},L)&=\mathrm{NIM}(\{N_i\}_{i_2},\mathrm{NIM}(\{N_{i_2},M\}))=\mathrm{NIM}(\{N_i\}_{i_2},N_{i_2},M\})\\&=\mathrm{NIM}(\{N_i\},M)=\mathrm{NIM}(\mathrm{NIM}(\{N_i\}),M)=\mathrm{NIM}(M,M)\\&=0\end{aligned}$$

が成り立つ. したがって, i_0 番めの山を $(N_{i+1}L)_2$ 個にするように石を取り除き, それを N'_{i_0} とすれば,

$$\mathrm{NIM}(N'_i) = 0$$

が成り立つ. □

Example 1.5. 1. $N_1 = 7$, $N_2 = 6$, $N_3 = 5$ の時.

$$\begin{aligned} N_1 = 7 &= 1 \quad 1 \quad 1 \\ N_2 = 6 &= 1 \quad 1 \quad 0 \\ N_3 = 5 &= 1 \quad 0 \quad 1 \\ \mathrm{NIM}(\{7,6,5\}) &= 1 \quad 0 \quad 0 \end{aligned}$$

であるので, $M = 4$ である. したがって, 選ぶべき N_{i_0} は $i_0 = 1$ 良い. したがって, $L = 3$ となる. よって, N_1 から 4 を引き, $N_1 = 3$ とすると,

$$\begin{aligned} N_1 = 3 &= 0 \quad 1 \quad 1 \\ N_2 = 6 &= 1 \quad 1 \quad 0 \\ N_3 = 5 &= 1 \quad 0 \quad 1 \\ \mathrm{NIM}(\{3,6,5\}) &= 0 \quad 0 \quad 0 \end{aligned}$$

となる.

2. $N_1 = 3$, $N_2 = 4$, $N_3 = 5$ の時.

$$\begin{aligned} N_1 = 3 &= 0 \quad 1 \quad 1 \\ N_2 = 4 &= 1 \quad 0 \quad 0 \\ N_3 = 5 &= 1 \quad 0 \quad 1 \\ \mathrm{NIM}(\{3,4,5\}) &= 0 \quad 1 \quad 0 \end{aligned}$$

であるので, $M = 2$ である. この時, 選ぶべき $i_0 = 1$ である. よって, $L = \mathrm{NIM}(3,2) = 1$ となり, したがって, N_1 を $L = 1$ に置き換えると,

$$\begin{aligned} N_1 = 1 &= 0 \quad 0 \quad 1 \\ N_2 = 4 &= 1 \quad 0 \quad 0 \\ N_3 = 5 &= 1 \quad 0 \quad 1 \\ \mathrm{NIM}(\{1,4,5\}) &= 0 \quad 0 \quad 0 \end{aligned}$$

となる.

1.2 必勝法の解析 (normal case)

はじめに “normal case” の場合を考えよう. この場合は, 最終的にすべての i に対して $N_i = 0$ が成り立つようにできれば良いので, 最終的な局面では

$$\mathrm{NIM}(\{N_i\}) = \mathrm{NIM}(\{0, \cdots, 0\}) = 0$$

になっているはずである. したがって, その直前の局面では上の定理 (Theorem 1.4) によると,

$$\mathrm{NIM}(\{N_i\}) \neq 0$$

となっていなければならない. ここで, 各局面に対してその局面が「安全」かどうかの定義を与えよう.

Definition 1.6. 局面 $\{N_i\} = \{N_1, \cdots, N_k\}$ が**安全**であるとは,

$$\mathrm{NIM}(\{N_i\}) \neq 0$$

と定義する. 局面 $\{N_i\} = \{N_1, \cdots, N_k\}$ が**安全でない**とは,

$$\mathrm{NIM}(\{N_i\}) = 0$$

と定義する.

このように定義すると, Theorem 1.4 によって, 次の事実がわかる.

Theorem 1.7. 安全でない局面に出あったプレイヤーは適当な手を打つことによって, 安全な局面を作り出すことができる. 逆に安全な局面に出あったプレイヤーはどのような手を打っても, 安全でない局面しか作ることができない.

この定理より, 次を導くことができる.

Theorem 1.8. Nim の *"normal case"* において, **安全な局面を作った**プレイヤーは必勝法を持つ.

Proof. ある局面において, それが安全でないとしよう. その時, Theorem 1.7 より, 適当な手によって, 相手のプレイヤーに対して安全な局面を与えることができる. 再び Theorem 1.7 より, 次に自分の局面になった時には安全でない局面となり, 再び安全な局面を作り, 相手に渡すことができる. この手順を繰り返すことにより, 有限回のプレイの後, 安全な局面 $\{N_i\}$ であって, だた一つの N_{i_0} を除いて他がすべて 0 であるような局面を作ることができる. その時, N_{i_0} を取り去ることによって, 勝つことができる. □

1.3 必勝法の解析 (reverse case)

この場合, 相手にどのような局面を渡せば勝てるかを考えてみる. それは, 「相手に, ただ一つの山だけが１つの石を含み, 他の山はすべて０」という局面を作ってしまえば良い.

したがって, 前の「安全」の定義の代わりに, 次のような定義をすれば良いことがわかる.

Definition 1.9. 局面 $\{N_i\} = \{N_1, \cdots, N_k\}$ が**安全**であるとは, normal case の安全な局面のうち, $N_i = 1$ となるものが偶数個で残りは 0 という局面でないか, または, $N_i = 1$ となるものが奇数個で残りは 0 という局面である時のことをいう.

この定義の下, normal case と同様に以下を証明することができる.

Theorem 1.10. 安全でない局面に出あったプレイヤーは適当な手を打つことによって, 安全な局面を作り出すことができる. 逆に安全な局面に出あったプレイヤーはどのような手を打っても, 安全でない局面しか作ることができない.

Proof. normal case では安全でないが, reverse case では安全となる局面, すなわち, 「 $N_i = 1$ となるものが奇数個で残りは 0 という局面」の場合には, 次の手により $N_i = 1$ となるものが偶数個となるので, 安全でない局面に変化する.

また, normal case では安全でないが, reverse case では安全となる局面, すなわち, 「 $N_i = 1$ となるものが偶数個で残りは 0 という局面」の場合には, 次の手により $N_i = 1$ となるものが奇数個となるので, 安全な局面に変化する.

従って, 次を証明すればよい.

1. 「現在安全でない局面であって, その後に作った normal mode では安全な手が, reverse mode では安全でない時, 別の手によって安全とできる」
2. 「現在安全な局面である時, どのような方法によっても, reverse mode でも安全でない局面となる」

まず, 前者の場合, reverse mode では安全でない時は, $N_i = 1$ の個数が偶数個となり, 残りがすべて 0 の場合であるので, この時, 変化させた pile が変化したあと 0 となっている時には, 取り去る数を一つ減らせば, $N_i = 1$ の個数が奇数個で残りがすべて 0 となり, reverse mode において, 安全な局面となる. 一方, 変化させた pile が変化したあと 1 となっている時には, それを 0 にするようにすれば, $N_i = 1$ となる個数は奇数個となり, reverse mode において, 安全な局面となる.

後者の場合, normal mode で安全でない局面ができ, それが reverse mode では安全な時には, $N_i = 1$ の個数が偶数個となっている. この時, 直前が安全であるためには, $N_i = 1$ の個数が奇数個となり, 他のすべてが 0 でなければならない. なぜなら, $N_i > 1$ となる pile を含み, 安全な局面であるためには, $N_i > 1$ となる pile が 2 個以上含まれなければならない. この場合, どのような方法によっても, normal mode では安全だが, reverse mode では安全でないという状況を作ることはできない. □

この定理より, 次を導くことができる.

Theorem 1.11. Nim の *"reverse case"* において, **安全な局面を作った**プレイヤーは必勝法を持つ.

2 一般化されたゲーム

前の section で定義したゲームをもう少し一般化してみよう．（以下では, これを Nim_K と呼ぶ.）

- ２人のプレイヤーが交互にゲームを行なう.
- 正の整数を k 個用意する．ただし, $k \le K$ とする．これを $N_1, \cdots, N_k$ と書く.
- ２人のプレイヤーは自分の手順の時に, $N_1, \cdots N_k$ のうちのどれか最大 K 個から, 正の値を引く.
- この手順を順に繰り返して, すべての i に対して, $N_i = 0$ としたプレイヤーを勝ちとする．（“normal case”）
  逆に, すべての i に対して $N_i = 0$ としたプレイヤーを負けと決めても良い．（“reverse case”）

前の section で定めたゲーム Nim は Nim_K において, $K = 1$ としたゲームである.

2.1 状態を表す数

Nim_K においても Nim と同様に状態を表す数を定義することができる.

Definition 2.1. 正または０の整数の集まり $\{N_i\}_{i=1}^k$ に対して, $\mathrm{NIM}_K(\{N_1, \cdots, N_k\}) = \mathrm{NIM}_K(\{N_i\})$ を以下のように定義する．与えられた $\{N_i\}_{i=1}^k$ を２進数に展開し, その各桁の数を上から

$$N_i^l \quad N_i^{l-1} \quad \cdots \quad N_i^1 \quad N_i^0$$

と並べる．すなわち,

$$N_i = N_i^l 2^l + N_i^{l-1} 2^{l-1} + \cdots + N_i^1 2 + N_i^0$$

とする．（ここで, $N_i^l = 0, 1$ である．）この時,

$$\begin{aligned}\mathrm{NIM}_K(\{N_i\}) &= (N_1^l + \cdots + N_k^l, N_1^{l-1} + \cdots + N_k^{l-1}, \cdots, N_1^1 + \cdots + N_k^1, N_1^0 + \cdots + N_k^0)_2 \\ &= (N_1^l + \cdots + N_k^l)(K+1)^l + (N_1^{l-1} + \cdots + N_k^{l-1})(K+1)^{l-1} + \cdots \\ &\quad + (N_1^1 + \cdots + N_k^1)(K+1) + (N_1^0 + \cdots + N_k^0)\end{aligned}$$

と定義する．ただし, 和は $K+1$ を法とする和をとることにする.

Remark 2.2. $\mathrm{NIM}(\{N_i\})$ と $\mathrm{NIM}_K(\{N_i\})$ との本質的な違いは, 法 2 で和をとるか, 法 $K+1$ で和をとるかの違いである．（最終的にその数を２進数で計算するか, $K+1$ 進数で計算するかは本質的な問題ではない.）

Example 2.3. 具体的に $\mathrm{NIM}_K(\{N_i\})$ を計算してみよう.

1. $K = 2$, $N_1 = 3$, $N_2 = 4$, $N_3 = 5$ の時.
   N_1, N_2, N_3 をそれぞれ２進数で展開してみると,

$$\begin{aligned} N_1 = 3 &= 0 \quad 1 \quad 1 \\ N_2 = 4 &= 1 \quad 0 \quad 0 \\ N_3 = 5 &= 1 \quad 0 \quad 1 \\ \mathrm{NIM}_2(\{3,4,5\}) &= 2 \quad 1 \quad 2 = 2 \cdot 3^2 + 3 + 2 = 23 \end{aligned}$$

   となり, $\mathrm{NIM}_2(\{3,4,5\}) = (2,1,2)_3 = 23$ である.

Theorem 2.4. Nim_K において, 状態 $\{N_i\}$ が $\mathrm{NIM}_K(\{N_i\}) = 0$ である時, 正当な Nim_K のプレイを１回行なうと, （どのようなプレイであっても）$\mathrm{NIM}_K(\{N_i'\}) \neq 0$ となる.

逆に, 状態 $\{N_i\}$ が $\mathrm{NIM}_K(\{N_i\}) \neq 0$ である時, 正当な Nim_K のプレイで, 次の状態 $\{N_i'\}$ を $\mathrm{NIM}_K(\{N_i'\}) = 0$ とする手が存在する.

Proof. はじめに, 現在の状態 $\{N_i\}$ が $\mathrm{NIM}_K(\{N_i\}) = 0$ を満たしていると仮定しよう. この時に正当なプレイを行なうと, $\{N_i\}$ のうちの最大で K 個の値が変化する. それらを $N_1, \cdots, N_m$, $0 < m \leq m$ とし, 変化した後の値を $N_1', \cdots, N_m'$ とおく. この時, 定義によって $0 \leq N_s' < N_s$ がすべての $s = 1, \cdots m$ に対して成り立っている. したがって, 各 N_s と N_s' の２進展開の各桁を比較すると, 少なくとも１箇所は 0 と 1 が異なっていなければならない. ここで, $\mathrm{NIM}_K(\{N_i\})$ は２進展開の各桁の 1 の個数を数えていて, そのうち $N_1, \cdots, N_m$ が変化する. ここで, 各桁で変化する個数は最大でも K 個であるので, $\mathrm{NIM}_K(\{N_i'\})$ のうちのどこか１箇所は 0 から 0 より大きな数に変化する. これを厳密に計算すると, 以下のようになる.

最初の状態 $\{N_i\}$ に対して, 正当なプレイを行なった後の状態 $\{N_i'\}$ は, $i > m$ に対しては, $N_i = N_i'$ が成り立ち, $i \leq m$ に対しては $N_i > N_i'$ が成り立つ. ここで, $\mathrm{NIM}_K(\{N_i\}) = 0$ より, すべて $j = 0, \cdots, l$ に対して

$$N_1^j + \cdots + N_k^j = 0$$

が成り立つ. ここで, $i \leq m$ に対しては $N_i \neq N_i'$ より, 少なくとも一つの $j = j_0$ と少なくとも一つの i（ただし $i = 1, \cdots, m$ ） に対して

$$N_i^{j_0} \neq (N_i')^{j_0}$$

が成り立つ. したがって,

$$|((N_1')^{j_0} + \cdots + (N_k')^{j_0}) - (N_1^{j_0} + \cdots + N_k^{j_0})| = |N_1^{j_0} - (N_1')^{j_0} + \cdots N_m^{j_0} - (N_m')^{j_0}| \leq K$$

が成り立つ. 仮定より,

$$N_1^{j_0} + \cdots + N_k^{j_0} = 0$$

であるので, よって,

$$(N_1')^{j_0} + \cdots + (N_k')^{j_0} \neq 0$$

が成り立つ. すなわち $\mathrm{NIM}_K(\{N_i'\}) \neq 0$ が成り立つ.

逆に, $\mathrm{NIM}_K(\{N_i\}) \neq 0$ である場合を考えよう. Nim_K の場合は複雑な方法で手順を構成する.

$M = \mathrm{NIM}_K(\{N_i\})$ とおこう. この時, M の $K+1$ 進展開の０でない最上位の桁の数を M^l, その桁を下から $l+1$ 桁目であるとする. すると, $\{N_i\}$ の中でその２進展開の $l+1$ 桁目が 1 になっているものが少なくとも M^l 個は存在する. （実際には n を０以上の整数として, $M^l + n(K+1)$ 個ある可能性がある.）それらを $N_{i_1}, \cdots, N_{i_{M^l}}$ とする. これが減らすべき数の候補である.

第１段として, これらの数を以下のような値になるように変化させる. N_i （ただし, $i = i_1, \cdots, i_{M_l}$ ）の２進展開の $l+1$ 桁目を 0 にして, それより下の桁をすべて 1 になるようにする. すなわち, N_i の下 l 桁を $2^l - 1$ に置き換える. この時, 置き換えられた数に対する $\mathrm{NIM}_K(\{N_i\})$ の値の $K+1$ 進展開の $l+1$ 桁目は 0 となる. しかし, l 桁目以下の数値は変化するが, その値は K 以下になっている.

次に, 置き換えられた $\mathrm{NIM}_K(\{N_i\})$ の値を M とし, その $K+1$ 進展開の０でない最上位の桁を l' とおき, その数を $M^{l'}$ とする. すると, 仮定により, $l' < l$ が成り立つ. ここで, 前のステップで選んだ N_{i_j} の２進展開の l' 桁目はすべて 1 になっていることに注意すると, 次の２つの場合が考えられる. ただし, M^l は前のステップで決まった数値である.

1. $M^l \geq M^{l'}$.
   この場合には, 前のステップで選んだ N_{i_j} の中から, $M^{l'}$ 個の第 l' 桁目を 0 に変えるように値を変化させる.

2. $M^l < M^{l'}$.
この場合には, 前のステップで選んだ N_{i_j} の第 l' 桁目を 0 に変えるように値を変化させ（この時点で NIMK を計算すると, その $K+1$ 進展開の l' 桁目の値は $M^{l'} - M^l$ になっているはず.）, さらに, 残った N_i の中から, その 2 進展開の l' 桁目のが 1 になっているものを $M^{l'} - M^l$ 個選び, それらに対して前のステップと同じ手続きを行なう.

これにより, 置き換えられた数に対する $\mathrm{NIM}_K(\{N_i\})$ の数値は, その $K+1$ 進展開は $l'-1$ 桁以下になる. この手続きを順に繰り返すことにより, 最大 K 個の数値を変化させることで, $\mathrm{NIM}_K(\{N_i\}) = 0$ とすることができる. □

Example 2.5. 具体的に $\mathrm{NIM}_K(\{N_i\})$ を 0 にする手続きを計算してみよう.

1. $K = 2$, $N_1 = 3$, $N_2 = 4$, $N_3 = 5$ の時.

$$\begin{array}{rl} N_1 = 3 = & 0 \quad 1 \quad 1 \\ N_2 = 4 = & 1 \quad 0 \quad 0 \\ N_3 = 5 = & 1 \quad 0 \quad 1 \\ \mathrm{NIM}_2(\{3,4,5\}) = & 2 \quad 1 \quad 2 \end{array}$$

となっている. したがって, N_i の中から 3 桁目が 1 になっているものを選ぶと, N_1, N_2 であるので, これらを 011 に変更すると,

$$\begin{array}{rl} N_1 = 3 = & 0 \quad 1 \quad 1 \\ N_2 = 3 = & 0 \quad 1 \quad 1 \\ N_3 = 3 = & 0 \quad 1 \quad 1 \\ \mathrm{NIM}_2(\{3,3,3\}) = & 0 \quad 0 \quad 0 = 0 \end{array}$$

となる.

2. $K = 2$, $N_1 = 3$, $N_2 = 4$, $N_3 = 5$, $N_4 = 9$ の時.

$$\begin{array}{rl} N_1 = 3 = & 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \\ N_2 = 4 = & 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \\ N_3 = 5 = & 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \\ N_4 = 9 = & 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \\ \mathrm{NIM}_2(\{3,4,5,9\}) = & 1 \quad 2 \quad 1 \quad 0 \end{array}$$

となっている. したがって, N_i の中から 4 桁目が 1 になっているものを選ぶと, N_4 であるので, これらを 0111 に変更する.

$$\begin{array}{rl} N_1 = 3 = & 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \\ N_2 = 4 = & 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \\ N_3 = 5 = & 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \\ N_4 = 7 = & 0 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \\ \mathrm{NIM}_2(\{3,4,5,7\}) = & 0 \quad 0 \quad 2 \quad 0 \end{array}$$

次に 2 桁目を見ると 2 であるので, N_4 以外に N_1 が変化させるものに該当する．これらの 2 桁目以下を 01 にすると,

$$\begin{aligned} N_1 = 1 &= 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \\ N_2 = 4 &= 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \\ N_3 = 5 &= 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \\ N_4 = 5 &= 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \\ \mathrm{NIM}_2(\{1,4,5,5\}) &= 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \end{aligned}$$

となる．

2.2 必勝法の解析 (normal case)

はじめに “normal case” の場合を考えよう．前の Section で証明したのと全く同様に,「安全性」の定義をしよう．

Definition 2.6. 局面 $\{N_i\} = \{N_1, \cdots, N_k\}$ が**安全**であるとは,

$$\mathrm{NIM}_K(\{N_i\}) \neq 0$$

と定義する．局面 $\{N_i\} = \{N_1, \cdots, N_k\}$ が**安全でない**とは,

$$\mathrm{NIM}_K(\{N_i\}) = 0$$

と定義する．

このように定義すると, Theorem 1.7 の証明と全く同様に, 次の事実がわかる．

Theorem 2.7. 安全でない局面に出あったプレイヤーは適当な手を打つことによって, 安全な局面を作り出すことができる．逆に安全な局面に出あったプレイヤーはどのような手を打っても, 安全でない局面しか作ることができない．

この定理より, 次を導くことができる．

Theorem 2.8. Nim_K の *“normal case”* において, **安全な局面を作った**プレイヤーは必勝法を持つ．

2.3 必勝法の解析 (reverse case)

この場合, 相手にどのような局面を渡せば勝てるかを考えてみる．$K \geq 2$ の場合には, $K = 1$ の場合ほど単純ではない．なぜなら, 相手に,「 K 個以下（これを n とおく）の山だけが石を含み, 他の山はすべて０」という局面を渡した時, 相手が $n-1$ 個の山からすべての石を取り除いてしまうと, 自分には,「 1 個の山だけが石を含み, 他の山はすべて０」という局面が来て, 最後の石をとることになる．

そこで, 前の「安全」の定義の代わりに, 次のような定義をすれば良いことがわかる．

Definition 2.9. 局面 $\{N_i\} = \{N_1, \cdots, N_k\}$ が**安全**であるとは, normal case の安全な局面のうち, $N_i = 1$ となるものが $K+1$ で割り切れ, 残りは 0 という局面でないかまたは, $N_i = 1$ となるものが $K+1$ で割りきれず, 残りは 0 という局面である時のことをいう．

この定義の下, normal case と同様に以下を証明することができる．

Theorem 2.10. 安全でない局面に出あったプレイヤーは適当な手を打つことによって, 安全な局面を作り出すことができる. 逆に安全な局面に出あったプレイヤーはどのような手を打っても, 安全でない局面しか作ることができない.

Proof. normal case では安全でないが, reverse case では安全となる局面, すなわち, 「 $N_i = 1$ となるものが $K+1$ で割りきれ, 残りは 0 という局面」の場合には, 次の手により $N_i = 1$ となるものは $K+1$ 割り切れないようになるので, 安全でない局面に変化する.

また, normal case では安全でないが, reverse case では安全となる局面, すなわち, 「 $N_i = 1$ となるものが $K+1$ で割り切れず, 残りは 0 という局面」の場合には, 次の手により $N_i = 1$ となるものの個数を $K+1$ で割り切れるようにできるので, したがって, 安全な局面に変化する.

従って, 次を証明すればよい.

1. 「現在安全でない局面であって, その後に作った normal mode では安全な手が, reverse mode では安全でない時, 別の手によって安全とできる」
2. 「現在安全な局面である時, どのような方法によっても, reverse mode でも安全でない局面となる」

まず, 前者の場合, reverse mode では安全でない時は, $N_i = 1$ の個数が $K+1$ の倍数となり, 残りがすべて 0 の場合であるので, この時, 変化させた pile が変化したあと 0 となっているものには, 取り去る数を一つ減らし, 変化したあと 1 となっているものには, 取り去る数を一つ増やすという操作を変化しているどれが一つだけの pile に対して行なえば, $N_i = 1$ の個数が $K+1$ の倍数ではなく, 残りがすべて 0 となる. 従って, reverse mode において, 安全な局面となる.

後者の場合, normal mode で安全でない局面ができ, それが reverse mode では安全な時には, $N_i = 1$ の個数が $K+1$ で割り切れれる値になっている. この時, 直前が安全であるためには, $N_i = 1$ の個数が $K+1$ であり, 他のすべてが 0 でなければならない. なぜなら, $N_i > 1$ となる pile を含み, 安全な局面であるためには, $N_i > 1$ となる pile が K 個以上含まれなければならない. この場合, どのような方法によっても, normal mode では安全だが, reverse mode では安全でないという状況を作ることはできない. □

この定理より, 次を導くことができる.

Theorem 2.11. Nim_K の *"reverse case"* において, **安全な局面を作った**プレイヤーは必勝法を持つ.

3 より多くのプレイヤーによるゲーム

ここまでに考えたゲームは２人のプレイヤーによるゲームであった．ここでは, より多くのプレイヤーによるゲームのルールを考えてみよう．以下では, n 人のプレイヤーが順にプレイを行なうゲームを考える．

3.1 ゲームのルール

ここでは, 文献 [2] にそって, n 人による Nim_K (normal case) を考えよう．そこで, もう少しゲームを一般化して, 以下のようなゲームを考える．（以下では, これを Nim_K^n と呼ぶ.）

- n 人のプレイヤー $P_1, \cdots, P_n$ が順にプレイを行なう.
- 正の整数を k 個用意する．これを $N_1, \cdots, N_k$ と書く.
- n 人のプレイヤーは自分の手順の時に, $N_1, \cdots N_k$ のうちのどれかから, 正の値を引く.
- この手順を順に繰り返して, すべての i に対して, $N_i = 0$ としたプレイヤーを勝ちとする.

ここで, 最後のプレイを行なったプレイヤー（すなわち, 勝ったプレイヤー）を P_i として, 各プレイヤーの順位を以下のように定める.

- P_{i+1} を先頭に順序を入れ換えて,

$$P_{i+1}, \cdots, P_{i-1}, P_i$$

  と並び替えて, 後ろから順に１位, ２位と順序を決める.

各プレイヤーが自分の順序を最も良くするような手が存在するかどうかを考えてみよう.

3.2 プレイヤーの状態

Nim_K の時と同様に, 各プレイヤーの状態を考えてみよう.

Definition 3.1. あるプレイヤーが l-position にいるとは, そのプレイヤーが正当な手を行なった時, l 位以上になる可能性がある状態を表す.

すなわち, $n = 2$ の時には, 安全な局面を作れば 1-position となることを表している．次に, Nim_K における $\mathrm{NIM}K$ に該当する量を定義しよう.

Definition 3.2. 正または０の整数の集まり $\{N_i\}_{i=1}^k$ に対して, $\mathrm{NIM}_K^n(\{N_1, \cdots, N_k\}) = \mathrm{NIM}_K^n(\{N_i\})$ を, NIM_K で和をとる時に $nK - K + 1$ による法で和をとったものと定義する.

$n = 2$ の時, $nK - K + 1 = K + 1$ となり, NIM_K に一致する．この時, 次を示すことができる.

Theorem 3.3. $\mathrm{NIM}_K^n(\{N_i\}) = 0$ *という局面を作ることができれば, 1-position である.*

Proof. これを示すには, 次を証明すれば良い．$\mathrm{NIM}_K^n(\{N_i\})$ の最も大きな桁の数を δ とおく．この時,

- $\delta = 0$ ならば, $n - 1$ 人のプレイによっては, $\delta = 0$ とできない.
- $\delta \neq 0$ ならば, $n - 1$ 人以内のプレイによって, $\delta = 0$ となりうる.

この２つの事実は, これまでに証明したことから容易に導くことができる. □

参考文献

[1] Charles. L. Bouton, *Nim, a game with a complete mathematical theorey*, Ann. of Math. (2) (1902), no. 3, 35–39.

[2] S.-Y. R. Li, *N-person Nim and N-person Moore's games*, Internat. J. Game Theory **7** (1978), no. 1, 31–36.

[3] E.H. Moore, *A generalization of the game called Nim*, Ann. of Math. (2) (1910), no. 11, 93–94.