

第1章 Introduction

1.1 三角関数

Fourier 変換を学ぶ上で、三角関数とは何かということを復習しておくことは重要なテーマである。ここでは、三角関数の定義を復習しておこう。

1.1.1 微分方程式による三角関数の定義

天下りの的ではあるが、 \mathbb{R} 上で定義された次の微分方程式の解を調べよう：

$$\begin{cases} y''(t) = -y(t), \\ y(0) = a, \\ y'(0) = b. \end{cases} \quad (1.1.1)$$

ここで、 a, b は与えられた定数とする。この常微分方程式は2階線形であり、その初期値問題の解を定めるためには、2つの初期条件を与える必要があることは、常微分方程式の一般論から導くことができる。

この方程式 (1.1.1) の解を調べてみよう。はじめに、 $y'(t) = p(y(t))$ と書いてみると、微分方程式 (1.1.1) は

$$\begin{cases} p'(t) = -y(t), \\ y'(t) = p(t), \\ y(0) = a, \\ p(0) = b \end{cases} \quad (1.1.2)$$

という連立1階線形微分方程式系に書きなおすることができる。一方、

$$y'' = \frac{dp}{dt} = \frac{dp}{dy} \frac{dy}{dt} = p' \cdot p$$

が成り立つので、(1.1.1) に代入すれば、

$$p' \cdot p = -y, \quad p \frac{dp}{dy} = -y \quad (1.1.3)$$

が成り立つ。したがって、両辺を積分すれば

$$p^2 = C - y^2$$

が成り立つ。ここで、 $y(0) = a, p(0) = b$ であることより、 $C = a^2 + b^2$ が成り立つので、

$$H(t) = (p(t))^2 + (y(t))^2 = (y'(t))^2 + (y(t))^2 = a^2 + b^2 \quad (1.1.4)$$

が成り立つことがわかる。すなわち、関数 $H(t)$ は、方程式 (1.1.1) または (1.1.2) の解の軌道に沿って一定の値を持つ関数である。

微分方程式 (1.1.1), (1.1.2) の解を調べるために, 時刻 t に対して, $(y(t), p(t))$ を対応させる写像を yp -平面にプロットしてみよう. すなわち, $t \mapsto (y(t), p(t))$ という曲線を調べる. この曲線を相曲線と呼び, このような平面を相空間と呼ぶ. すると, 曲線は $y^2 + p^2 = a^2 + b^2$ という曲線となるので, $a^2 + b^2 \neq 0$ ならば, 半径が $\sqrt{a^2 + b^2}$ となる原点を中心とする円を描く. さらに, $H(t) = (y(t))^2 + (p(t))^2$ は各 t における曲線の速度ベクトルを与えていて, この値は 0 とはならない. 与えられた初期条件 $y(0) = a, p(0) = b, a^2 + b^2 \neq 0$ の下では, 相曲線は閉曲線となることがわかり, 解はその上を速度一定で運動していることがわかる. したがって, ある時刻 $T > 0$ が存在して,

$$y(0) = y(T), \quad p(0) = p(T)$$

が成り立つ. また, $t \mapsto t + t_0$ と変数変換を行なっても, $a^2 + b^2 = 1$ という条件が保存されているので, 任意の t に対して,

$$y(t) = y(t + T), \quad p(t) = p(t + T)$$

が成り立つ. この T のことを解の周期と呼ぶ.

次に微分方程式 (1.1.1), (1.1.2) の解に対して, その周期を求めることを考えてみる. 簡単のため, $a^2 + b^2 = 1$ を満たす初期条件をとることにすると, この場合, 解の相曲線は原点を中心とする半径 1 の円周となり, その速度ベクトルの大きさは常に 1 である. したがって, 半径 1 の円周を 1 周するために必要な時間は, その曲線の長さに等しい. すなわち, 周期は $T = 2\pi$ であることがわかる¹. このことにより, 次を示すことができた.

Proposition 1.1.1. 微分方程式 (1.1.1) の初期条件 $y(0) = a, y'(0) = b, a^2 + b^2 = 1$ を満たす解は周期 2π を持つ.

このことより, 次の定義ができる.

Definition 1.1.2. 微分方程式 (1.1.1) の初期条件 $y(0) = 0, y'(0) = 1$ に対する解を正弦関数と呼び, $\sin(t)$ と書く. 微分方程式 (1.1.1) の初期条件 $y(0) = 1, y'(0) = 0$ に対する解を余弦関数と呼び, $\cos(t)$ と書く.

ここで, $(\sin(t))'$ は, 再び (1.1.1) を $y(0) = 1, y'(0) = 0$ の条件の下に満たす解であることから, 線形常微分方程式の解の一意性定理を用いれば,

$$\frac{d}{dt} \sin(t) = \cos(t), \quad \frac{d}{dt} \cos(t) = -\sin(t)$$

が成り立つことがわかる. また, 方程式 (1.1.1) は線形であることから,

$$y(t) = a \cos(t) + b \sin(t)$$

とおくと, $y(t)$ は再び (1.1.1) の解となる. よって,

$$a = \cos(t_0), \quad b = -\sin(t_0),$$

$$a = \sin(t_0), \quad b = \cos(t_0)$$

とおくことにより, それぞれ $y(t) = \cos(t + t_0), y(t) = \sin(t + t_0)$ が (1.1.1) の解となる. したがって,

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \cos(\beta) - \sin(\alpha) \sin(\beta),$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha) \cos(\beta) + \cos(\alpha) \sin(\beta)$$

が成り立つ. 以上をまとめると, 次の結果を得る.

¹ ここで, π とは, 半径 1 の円周の長さの半分と定義している.

Theorem 1.1.3. $\sin(t)$, $\cos(t)$ は以下の性質を持つ.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \sin(t) &= \cos(t), & \frac{d}{dt} \cos(t) &= -\sin(t), \\ \cos^2(t) + \sin^2(t) &= 1, \\ \cos(t + 2\pi) &= \cos(t), & \sin(t + 2\pi) &= \sin(t), \\ \cos(\alpha + \beta) &= \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta), \\ \sin(\alpha + \beta) &= \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta).\end{aligned}$$

Remark 1.1.4. ここまでは, (1.1.1) の初期条件に対して, $a^2 + b^2 = 1$ という条件を課してきた. しかしながら, 実は次の定理が成り立つことがわかる.

Theorem 1.1.5. 1階定数係数連立線形微分方程式 $y' = Ay$ の自明でない周期解 y を持つと仮定すると, 自明な解を除くすべての解は同じ周期を持つ周期解となる.

ここで, 自明な解とは, $y(t) \equiv 0$ となる解のことである. この定理を (1.1.2) に適用すると, 自明な解は $a^2 + b^2 = 0$ の場合に限られるので, $a^2 + b^2 \neq 0$ ならば, 解は周期 2π を持つことがわかる.

微分方程式 (1.1.1) を一般化して,

$$\begin{cases} y''(t) = -ky(t), \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = 1 \end{cases} \quad (1.1.5)$$

を考えよう. ここで, $k > 0$ は定数とする. この時, $y_0(t) = \sin(t)$ は (1.1.5) の $k = 1$ の時の解であるので, $t \mapsto \sqrt{k}t$ と変数変換をすれば, $y(t) = \frac{1}{\sqrt{k}} \sin(\sqrt{k}t)$ が (1.1.5) の解であることが容易にわかる. この時, (1.1.5) の自明でない解は周期 $\frac{2\pi}{\sqrt{k}}$ を持つことがわかる.

1.1.2 複素変数の指数関数と三角関数

c が実数の時, 指数関数 e^{ct} は, 微分方程式

$$\begin{cases} y'(t) = cy(t), \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

を満たす関数として定義される. そこで, c を複素数の時も,

$$\begin{cases} y'(t) = cy(t), \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad (1.1.6)$$

を満たす解を $y(t) = e^{ct}$ と定義しよう. 特に $c = \sqrt{-1}$ の時の解 $y(t) = e^{\sqrt{-1}t}$ を考えると,

$$\begin{cases} y''(t) = -y(t), \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = \sqrt{-1} \end{cases}$$

となるので, $y(t)$ を実部と虚部に分解して

$$y(t) = u(t) + \sqrt{-1}v(t)$$

と書くと, $u(t), v(t)$ はそれぞれ

$$\begin{cases} u''(t) = -u(t), \\ u(0) = 1, \\ u'(0) = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} v''(t) = -v(t), \\ v(0) = 0, \\ v'(0) = 1, \end{cases}$$

を満たす解となる. したがって, $u(t) = \cos(t), v(t) = \sin(t)$ であることがわかるので,

$$e^{\sqrt{-1}t} = \cos(t) + \sqrt{-1}\sin(t) \quad (1.1.7)$$

が成り立つ. このことより, $c = a + \sqrt{-1}b$ の時には,

$$e^{ct} = e^a(\cos(bt) + \sqrt{-1}\sin(bt))$$

が成り立つ. 特に,

$$e^{2\pi\sqrt{-1}} = 1 \quad (1.1.8)$$

が成り立つ.

1.1.3 逐次近似法

ここでは, 定数係数線形常微分方程式の解の存在を示す, Picard の逐次近似法を利用して, 三角関数, 指数関数の Taylor 展開を計算してみよう.

Definition 1.1.6. 一般に, 微分方程式

$$Y'(t) = f(t, Y(t)) \quad (1.1.9)$$

と, その2つの解 $Y_0(t), Y_1(t)$ に対して, 解の線形結合 $aY_0(t) + bY_1(t)$ が再び (1.1.9) の解となる時, 微分方程式 (1.1.9) は線形であるという.

Example 1.1.7. $Y(t) = \begin{pmatrix} y_{n-1}(t) \\ \vdots \\ y_0(t) \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} a_{n-1n-1} & \cdots & a_{n-10} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{0n-1} & \cdots & a_{00} \end{pmatrix}$ と定義すると, 微分方程式

$$Y'(t) = AY(t), \quad Y(0) = Y_0 \quad (1.1.10)$$

は線形な微分方程式である.

線形常微分方程式に対しては, 次の定理が知られている.

Theorem 1.1.8. 線形常微分方程式

$$y' = f(t, y)$$

は任意の初期値に対して, $t = \infty$ までの一意的な解が存在する.

一般に, 常微分方程式の解の存在定理としては, 次のものが知られている.

Theorem 1.1.9. 常微分方程式

$$y' = f(t, y)$$

が *Lipschitz* 条件を満たす時, 任意の初期値に対して, 時間局所的な一意的な解が存在する.

ここで, Lipschitz 条件とは以下のものである.

Definition 1.1.10. 常微分方程式

$$y' = f(t, y)$$

が Lipschitz 条件を満たすとは, 任意の $(t, x), (t, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ に対して,

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq L|x - y|$$

を満たす正の定数 L が存在することである.

ここでは, このような解の存在定理は認めた上で, 実際に解をどのように構成するかを考えてみる.

Theorem 1.1.11 (Picard の逐次近似法). 常微分方程式

$$y' = f(t, y), \quad y(0) = y_0 \quad (1.1.11)$$

が Lipschitz 条件を満たしているとする. この時,

$$y_{n+1}(t) = y_0 + \int_0^t f(s, y_n(s)) ds \quad (1.1.12)$$

によって, 帰納的に関数 $y_n(t)$ を定めると, $\{y_n(t)\}$ は $t = 0$ のある近傍で関数 y に一様に収束し, y は微分方程式 (1.1.11) の解となる.

ここで, Lipschitz 条件は, 解の近似列 $\{y_n(t)\}$ が一様収束することの証明に用いられ, 一様収束することで, 極限と微分の交換が可能になり, y が解であることが証明できる.

Example 1.1.12. ここでは, 与えられた初期条件に対して, 解が一意的に存在しない例を見てみよう.

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{|x|}, \quad x(0) = 0$$

の解を考えてみる.

$x > 0$ の時, $x' = \sqrt{x}$, $x < 0$ の時, $x' = \sqrt{-x}$ であるので,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\pm x}} = \pm 2\sqrt{\pm x}$$

より,

$$x(t) = \begin{cases} \frac{1}{4}t^2 & (t \geq 0), \\ -\frac{1}{4}t^2 & (t < 0) \end{cases}$$

が一つの解となる.

一方, $x(t) \equiv 0$ を考えると, これもこの方程式の解であることがわかる. したがって, この方程式は与えられた初期条件に対して, 一意的な解を持たない. 特に, $-\infty \leq t_1 \leq 0 \leq t_2 \leq \infty$ に対して,

$$x(t) = \begin{cases} \frac{1}{4}(t - t_2)^2 & (t \geq t_2), \\ 0 & (t_1 \leq t \leq t_2), \\ -\frac{1}{4}(t - t_1)^2 & (t < t_1) \end{cases}$$

も上の微分方程式の解となる.

1.1.4 逐次近似と Taylor 展開

Picard の逐次近似法で、具体的に微分方程式 (1.1.1) の解を構成してみよう。
はじめに (1.1.1) の特別な場合

$$\begin{cases} y''(t) = -y(t), \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = 1 \end{cases} \quad (1.1.13)$$

の逐次近似を考えてみる。そこで、 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $Y(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$ とおくと、(1.1.13) は

$$Y' = AY, \quad Y_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1.1.14)$$

と書くことができる。そこで Picard の逐次近似にしたがって、

$$Y_{n+1}(t) = Y_0 + \int_0^t AY_n(s) ds \quad (1.1.15)$$

と定義する。これを実際に計算してみると、

$$\begin{aligned} Y_1(t) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} \\ Y_2(t) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} 1 \\ -t \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} t \\ 1 - \frac{1}{2}t^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

と計算することができる。この計算と Theorem 1.1.11 を用いると、一般に次の展開を得ることができる。

$$\begin{aligned} y(t) = \sin(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} t^{2k+1}, \\ y'(t) = \cos(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} t^{2k}. \end{aligned} \quad (1.1.16)$$

この展開式は、良く知られた三角関数の Taylor 展開であり、右辺のべき級数の収束半径は $+\infty$ である。

演習問題

Exercise 1.1.1. Theorem 1.1.5 を証明しなさい。

Exercise 1.1.2. a, b を実数として、 $c = a + \sqrt{-1}b$ とする。この時、

$$e^c = e^a(\cos(b) + \sqrt{-1}\sin(b))$$

が成り立つことを証明しなさい。

Exercise 1.1.3. 常微分方程式 (1.1.10) は線形であることを確かめなさい。

Exercise 1.1.4. Section 1.1.4 の計算を完結しなさい。

Exercise 1.1.5. Section 1.1.4 の方法によって、

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k$$

を証明し、これを利用して、(1.1.16) の展開式を証明しなさい。

1.2 境界値問題と固有値

1.2.1 常微分方程式の境界値問題

ここでは, Section 1.1.1 で考えた常微分方程式

$$y''(t) = -ky(t), \quad k \text{ は正の定数} \quad (1.2.1)$$

を考えてみよう. (1.2.1) を区間 $[0, 2\pi]$ で考え, 区間の端点 $t = 0$ と $t = 2\pi$ において, 与えられた値をとる解を探すことを考える. 特に

$$\begin{cases} y''(t) = -ky(t), \\ y(0) = y(2\pi) = 0 \end{cases} \quad (1.2.2)$$

という微分方程式の解を考えたい. このように, 区間の端点での値を指定して微分方程式を考える問題を, 境界値問題と呼ぶ.

方程式 (1.2.1) の一般的な解は, a, b を定数として

$$y(t) = a \cos(\sqrt{k}t) + b \sin(\sqrt{k}t) \quad (1.2.3)$$

と書けることが知られている. そこで, (1.2.3) がいつ境界条件を満たすかを考えてみよう. すなわち,

$$y(0) = a = 0, \quad y(2\pi) = a \cos(2\sqrt{k}\pi) + b \sin(2\sqrt{k}\pi) = 0 \quad (1.2.4)$$

を満たすための a, b, k の満たす条件を書き下してみると,

$$\begin{aligned} a &= b = 0, \\ a &= 0, 2\sqrt{k} \text{ は } 0 \text{ でない整数} \end{aligned}$$

のいずれかであることがわかる. このうち, $a = b = 0$ は $y(t) = 0$ を導くので, 自明な解であることを示している. したがって, (1.2.2) が自明でない解を持つためには,

$$k = \left(\frac{n}{2}\right)^2, \quad n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \quad (1.2.5)$$

を満たす必要があることがわかる.

一方, (1.2.2) とは異なった境界条件を考えてみよう.

$$\begin{cases} y''(t) = -ky(t), \\ y'(0) = y'(2\pi) = 0 \end{cases} \quad (1.2.6)$$

という問題を考えると,

$$y'(t) = -a\sqrt{k} \sin(\sqrt{k}t) + b\sqrt{k} \cos(\sqrt{k}t)$$

であるので, 条件として,

$$\begin{aligned} y'(0) &= b = 0, \quad y'(2\pi) = -a\sqrt{k} \sin(2\sqrt{k}\pi) + b\sqrt{k} \cos(2\sqrt{k}\pi) = 0, \\ a &= b = 0, \\ b &= 0, 2\sqrt{k} \text{ は整数} \end{aligned} \quad (1.2.7)$$

というものが得られる. したがって, (1.2.6) が自明でない解を持つためには,

$$k = \left(\frac{n}{2}\right)^2, \quad n \in \mathbb{Z} \quad (1.2.8)$$

を満たす必要があることがわかる.

Definition 1.2.1. 区間 $[a, b]$ 上での 2 階常微分方程式

$$f(t, y, y', y'') = 0$$

に対して, 境界 $\{a, b\}$ での y の値に制限をつけた条件を, Dirichlet 境界条件と呼び, その境界値問題を Dirichlet 境界値問題と呼ぶ. 境界 $\{a, b\}$ での y' の値に制限をつけた条件を, Neumann 境界条件と呼び, その境界値問題を Neumann 境界値問題と呼ぶ.

この定義の下, 上の計算をまとめると, 以下のような命題を得る.

Proposition 1.2.2. $k > 0$ を定数とした時, 区間 $[0, 2\pi]$ 上で定義された微分方程式の Dirichlet 境界値問題

$$\begin{cases} y'' = -ky, \\ y(0) = y(2\pi) = 0 \end{cases}$$

が自明でない解を持つための必要十分条件は $k = \left(\frac{n}{2}\right)^2$, $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ であり, C を任意定数として,

$$y(t) = C \sin(\sqrt{kt})$$

が求める解となる. また, Neumann 境界値問題

$$\begin{cases} y'' = -ky, \\ y'(0) = y'(2\pi) = 0 \end{cases}$$

が自明でない解を持つための必要十分条件は $k = \left(\frac{n}{2}\right)^2$, $n \in \mathbb{Z}$ であり, C を任意定数として,

$$y(t) = C \cos(\sqrt{kt})$$

が求める解となる.

1.2.2 固有値と固有関数

Definition 1.2.3. V, W をベクトル空間とし, $f: V \rightarrow W$ を線形写像とする. この時, 方程式

$$f(v) = \lambda v \tag{1.2.9}$$

を満たす自明でない (すなわち 0 でない) 解が存在する時, λ を線形写像 f の固有値と呼び, v を固有値 λ に対応する固有関数と呼ぶ.

固有値, 固有関数は, 有限次元の線形代数で出てきた, 固有値, 固有ベクトルと同一の概念である.

Example 1.2.4. V, W をともに \mathbb{R}^2 であるとし, 線形写像 f を行列

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

が定める線形写像とすると, その固有値は $3 \pm \sqrt{2}$ となり, 固有ベクトルは C を任意定数として,

$$C \begin{pmatrix} -1 \mp \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

となる.

Example 1.2.5. V, W をともに \mathbb{R}^2 であるとし、線形写像 f を行列

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -2 \\ 2 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

が定める線形写像とすると、その固有値は $\sqrt{3} \pm 2\sqrt{-1}$ となり、固有ベクトルは C を任意定数として、

$$C \begin{pmatrix} \pm\sqrt{-1} \\ 1 \end{pmatrix}$$

となる。

Example 1.2.5 のように、実数体上定義されたベクトル空間の間の線形写像であっても、その固有値が必ずしも実数になるとは限らないことに注意する。

Section 1.2.1 の常微分方程式の境界値問題を、固有値の言葉で記述してみよう。

1.2.2.1 Dirichlet 境界値問題の場合

V として、 $[0, 2\pi]$ 上の C^2 級関数であって、 $\{0, 2\pi\}$ で 0 となるものの全体をとり、 W を $[0, 2\pi]$ 上の C^0 級関数とする。すなわち、

$$\begin{aligned} V &= C_0^2(0, 2\pi) := \{f \in C^2(0, 2\pi) : f(0) = f(2\pi) = 0\}, \\ W &= C^0(0, 2\pi) \end{aligned}$$

とおくと、 V, W は線形空間となる。この時、

$$f = -\frac{d^2}{dt^2}$$

は V から W への線形写像となり、微分方程式 (1.2.2) は

$$f(y) = \lambda y$$

という固有値問題を解くことに他ならない。(f の符号が変わっていることに注意。) この場合、固有値は n を正の整数として、 $\lambda = \left(\frac{n}{2}\right)^2$ であり、それに対応する固有関数は C を任意定数として、

$$C \sin\left(\frac{n}{2}t\right)$$

となることがわかる²

1.2.2.2 Neumann 境界値問題の場合

V として、 $[0, 2\pi]$ 上の C^2 級関数であって、 $\{0, 2\pi\}$ で微分が 0 となるものの全体をとり、 W を $[0, 2\pi]$ 上の C^0 級関数とする。すなわち、

$$\begin{aligned} V &= C_v^2(0, 2\pi) := \{f \in C^2(0, 2\pi) : f'(0) = f'(2\pi) = 0\}, \\ W &= C^0(0, 2\pi) \end{aligned}$$

とおくと、 V, W は線形空間となる。この時、

$$f = -\frac{d^2}{dt^2}$$

² Dirichlet 境界値問題 (1.2.2) が $k \leq 0$ の時には、自明な解しか存在しないことを利用している。

は V から W への線形写像となり、微分方程式 (1.2.6) は

$$f(y) = \lambda y$$

という固有値問題を解くことに他ならない。この場合、固有値は n を整数として、 $\lambda = \left(\frac{n}{2}\right)^2$ であり、それに対応する固有関数は C を任意定数として、

$$C \cos\left(\frac{n}{2}t\right)$$

となることがわかる^{3 4}。

1.2.3 スケール変換と固有値

ここまでは微分方程式 (1.2.1) を区間 $[0, 2\pi]$ で考えてきた。ここでは、区間の長さを変えた時、固有値がどのように変わるかを観察してみよう。

区間 $[0, 2\pi]$ を区間 $[0, 2\pi\ell]$ に変えてみよう。ここで、 s は正の実数とする。この時、元の変数 t に対して、 $s = t\ell$ とおくと、 $t \in [0, 2\pi]$ と $s \in [0, 2\pi\ell]$ が 1 対 1 に対応している。したがって、(1.2.2) または (1.2.6) の解 $y(t)$ に対して、 $\tilde{y}(s) = y(s(t))$, $s(t) = t\ell$ とおけば、区間 $[0, 2\pi\ell]$ における微分方程式 (1.2.1) の解であって、その端点 $\{0, 2\pi\ell\}$ で Dirichlet 境界条件、または Neumann 境界条件を満たすものが得られる。したがって、

$$-\frac{d^2}{ds^2}\tilde{y}(s) = -\ell^2 \frac{d^2}{dt^2}y(t(s)) = \ell^2 \lambda y(t(s)) = \ell^2 \lambda \tilde{y}(s) \frac{d^2}{ds^2} = \ell^{-2} \frac{d^2}{dt^2}$$

となるので、 $y(t)$ が区間 $[0, 2\pi]$ における (1.2.1) の Dirichlet 問題または Neumann 問題の固有値 λ に対応する固有関数である時、 $\tilde{y}(s) = y(t\ell)$ は、区間 $[0, 2\pi\ell]$ における Dirichlet 問題または Neumann 問題の固有値 $\ell^2\lambda$ に対応する固有関数となる。

1.2.4 周期境界条件と固有値

Definition 1.2.6. \mathbb{R} 上の関数 f が周期的であるとは、ある $T > 0$ が存在して、任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して

$$f(t) = f(t+T)$$

を満たすことをいい、そのような最小の $T > 0$ を f の周期と呼ぶ。

ここでは \mathbb{R} 上の周期 2π を持つ周期関数全体を考えよう。すなわち、

$$C_T^r(\mathbb{R}) = \{f \in C^r(\mathbb{R}) : f \text{ は周期 } T \text{ を持つ}\}$$

とおく。この時、 $C_T^r(\mathbb{R})$ はベクトル空間になる。したがって、 $f : C_T^2(\mathbb{R}) \rightarrow C_T^0(\mathbb{R})$, ただし、

$$f = \frac{d^2}{dt^2}$$

となる線形写像が定義できる。このように周期関数に対して、微分方程式を考えたものを周期境界条件を考えると呼ぶ。この時に、線形写像 $f : C_T^2(\mathbb{R}) \rightarrow C_T^0(\mathbb{R})$ の固有値と固有関数を調べてみよう。特に周期 $T = 2\pi$ の場合について、詳しく調べてみる。

³ Neumann 境界値問題 (1.2.6) が $k < 0$ の時には、自明な解しか存在しないことを利用している。

⁴ Dirichlet 境界値問題とは違い、 $n = 0$ が固有値となっていることに注意しよう。その時の固有関数は 0 でない定数関数である。

\mathbb{R} 上の周期 2π を持つ関数は、以下のようにして S^1 上の関数と同一視することができる。 \mathbb{R} の座標を $t \in \mathbb{R}$ とした時、写像 $\pi: \mathbb{R} \rightarrow S^1$ を、

$$\pi(t) = e^{2\pi t\sqrt{-1}} \in S^1 \subset \mathbb{C}$$

で定義すると、 $f \in C_{2\pi}^r(\mathbb{R})$ に対して、

$$\tilde{f}(e^{2\pi t\sqrt{-1}}) = f(t)$$

とおくことで、 S^1 上の関数 \tilde{f} を一つ決めることができる。ここで、 f が周期 2π を持つことが本質的に利用されていることに注意。逆に、 S^1 上の関数 \tilde{f} に対して、

$$f(t) = \tilde{f}(\theta), \quad e^{2\pi t\sqrt{-1}} = \theta$$

と定めることにより、 \mathbb{R} 上の周期 2π を持つ関数が一つ定まる。

さらに、 $\pi: \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \rightarrow S^1$ は微分同相を定めているので、これにより、任意の $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ に対して、

$$C_{2\pi}^r(\mathbb{R}) \cong C^r(S^1)$$

が線形同形であり、そのノルムも同値であることがわかる。このようにして、 \mathbb{R} 上の周期 2π を持つ関数と、 S^1 上の関数を同一視することができる。

このことにより、 θ を S^1 の座標とすると、前に出てきた周期境界条件を持つ微分方程式は、 S^1 上の微分作用素の固有値問題

$$f(v) = \lambda v, \quad f = -\frac{d^2}{d\theta^2}, \quad f: C^2(S^1) \rightarrow C^0(S^1) \quad (1.2.10)$$

とみなすことができる。

そこで、固有値問題 (1.2.10) の解を調べることにしよう。すなわち、(1.2.10) の自明でない解が存在する時の λ と、それに対応する関数を調べることにする。はじめに、 $\lambda \geq 0$ が必要であることを証明しよう。

Lemma 1.2.7. v を固有値問題 (1.2.10) の解と仮定すると、

$$\int_{S^1} |v'|^2 d\theta = \lambda \int_{S^1} |v|^2 d\theta \quad (1.2.11)$$

が成り立つ。

Proof. 方程式 $f(v) = \lambda v$ の両辺に v を掛けて積分して、部分積分を行なえば良い。 \square

Lemma 1.2.7 により、 $\lambda \geq 0$ が必要となることは、明らかである。したがって、Section 1.1 で述べた通り、(1.2.10) の解は、 $\lambda \geq 0$ の時、 a, b を任意定数として、

$$v(t) = a \cos(\sqrt{\lambda}t) + b \sin(\sqrt{\lambda}t)$$

と書ける。仮定より、 $v \in C^2(S^1)$ であるので、任意の $t \in [0, 2\pi)$ に対して、 $v(t) = v(t + 2\pi)$ が成り立つことが必要である。そこで、 $v(0) = v(2\pi)$ を計算すると、

$$a(\cos(2\pi\sqrt{\lambda}) - 1) + b \sin(2\pi\sqrt{\lambda}) = 0 \quad (1.2.12)$$

が成り立つ。また、 $t = \pi$ で同じ計算を行なうと、

$$b \sin(\pi\sqrt{\lambda}) = 0 \quad (1.2.13)$$

が成り立つことが必要であることがわかる。したがって、(1.2.13) より、 $b = 0$ または、 $\lambda = n^2$ 、ただし、 $n \in \mathbb{N}$ 。(1.2.12) より、 $b = 0$ の時、 $\lambda = n^2$ 、ただし、 $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ であることがわかる。また、 C, C_1, C_2 を 0 でない任意定数とすると、 $\lambda = 0$ の時、固有関数は $v(t) = C$ 、 $\lambda = n^2$ 、($n \in \mathbb{N}$) の時、固有関数は、 $C_1 \cos(\sqrt{\lambda}t) + C_2 \sin(\sqrt{\lambda}t)$ であることがわかる。

1.2.5 固有空間

これまで見た来た固有値問題においては、各固有値に対応する固有関数には 1 個または 2 個の 0 でない任意定数が含まれていた。すなわち、各固有値に対する固有関数は線形作用素の定義域内の部分ベクトル空間をなすことがわかる。

Definition 1.2.8. 各固有値に対応する固有関数のなす (線形作用素の定義域内の) 部分ベクトル空間を、各固有値に対応する固有空間と呼ぶ。固有空間の次元をその固有値の重複度と呼ぶ。重複度が 1 である固有値を単純な固有値という。

ここまで見てきた固有値問題では、固有値はトビトビの値をとっていて、下に有界であった。そこで、固有値を重複度を込めて、

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n \leq \dots \rightarrow +\infty$$

と書くことにしよう。すると、ここまで得られた結果をまとめると、以下ようになる。

Theorem 1.2.9. $[0, L]$ 上の *Dirichlet* 境界値の固有値問題

$$y'' = -\lambda y, \quad y(0) = y(L) = 0$$

の固有値は、

$$\lambda_n = (\pi n/L)^2, \quad n \in \mathbb{N}$$

であり、それに対応する固有関数は

$$\phi_n(t) = C \sin(\pi n t/L)$$

である。また、すべての固有値は単純である。

Theorem 1.2.10. $[0, L]$ 上の *Neumann* 境界値の固有値問題

$$y'' = -\lambda y, \quad y'(0) = y'(L) = 0$$

の固有値は、

$$\lambda_n = (\pi n/L)^2, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

であり、それに対応する固有関数は

$$\phi_n(t) = C \cos(2\pi n t/L)$$

である。また、すべての固有値は単純である。

Theorem 1.2.11. S^1 上の固有値問題

$$y'' = -\lambda y, \quad y \in C^2(S^1)$$

の固有値は、

$$\lambda_1 = 0,$$

$$\lambda_{2n} = \lambda_{2n+1} = n^2, \quad n \in \mathbb{N}$$

であり、それに対応する固有関数は

$$\phi_n(t) = \begin{cases} a \cos(nt) + b \sin(nt), & n > 1, \\ C, & n = 0 \end{cases}$$

であり、第一固有値 $\lambda_1 = 0$ に対応する固有値のみが単純であり、それ以外の固有値は重複度 2 である。

演習問題

Exercise 1.2.1. 微分方程式 (1.2.1) の一般解は, a, b を定数として,

$$y(t) = a \cos(\sqrt{kt}) + b \sin(\sqrt{kt})$$

と書けることを証明せよ.

Exercise 1.2.2. Example 1.2.4, Example 1.2.5 を確かめよ.

Exercise 1.2.3. Dirichlet 境界値問題 (1.2.2) は $k \leq 0$ の時, 自明な解しか持たないことを証明せよ. また, Neumann 境界値問題 (1.2.6) は $k < 0$ の時, 自明な解しか持たないことを証明せよ.

Exercise 1.2.4. Section 1.2.2.1, Section 1.2.2.2 における, V, W が線形空間となることを証明し, f が線形写像であることを示せ.

1.3 Hilbert 空間と Laplacian と固有値の完全性

ここでは、Fourier 級数展開の意味を考える準備として、Laplacian の固有値の完全性ということを考えよう。

この section では、 Ω は \mathbb{R}^n の有界領域、もしくは有限次元のコンパクトな滑らかな Riemann 多様体とする。

1.3.1 Hilbert 空間

ここでは、 V は内積を持つ \mathbb{R} 上のベクトル空間とし、その内積を $\langle \cdot, \cdot \rangle$ で表す。（特に、無限次元ベクトル空間を考えるので注意すること。）

Definition 1.3.1. V 上の内積から決まるノルムとは、

$$\|v\|^2 = \langle v, v \rangle, \quad v \in V$$

のことである。

一般に線形空間 V 上のノルムとは、

$$\|\cdot\|: V \rightarrow \mathbb{R}$$

であって、

1. 任意の $v \in V$ に対して、 $\|v\| \geq 0$ が成り立ち、 $\|v\| = 0$ であることと $v = 0$ であることは同値。
2. 任意の $v, w \in V$ に対して、

$$\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$$

が成り立つ。

3. 任意の $\alpha \in \mathbb{R}$ と任意の $v \in V$ に対して、

$$\|\alpha v\| = |\alpha| \|v\|$$

が成り立つ。

という3条件をみたすものである。

ノルムの入った線形空間をノルム空間と呼ぶ。

Remark 1.3.2. V 上にノルムが与えられると、

$$d(v, w) = \|v - w\|$$

によって V 上には距離が定まる。この距離によって V に位相が入る。

Definition 1.3.3. V をノルム空間とする。 V の点列 $\{v_n\}$ が v に収束するとは、

$$\|v_n - v\| \rightarrow 0, \quad \text{as } n \rightarrow \infty$$

が成り立つことである。

Proposition 1.3.4. V をノルム空間とする。 V のノルムは連続である。すなわち、 $\{v_n\}$ を V の収束点列とし、その極限を v とすると、 $\{\|v_n\|\}$ は $\|v\|$ に収束する。

Proof. 任意の $v, w \in V$ に対して,

$$\left| \|v\| - \|w\| \right| \leq \|v - w\|$$

が成り立つことは容易にわかる。したがって,

$$\left| \|v_n\| - \|v\| \right| \leq \|v_n - v\| \rightarrow 0$$

となり, $\{\|v_n\|\}$ は $\|v\|$ に収束する. □

Corollary 1.3.5. V をノルム空間とし, $\{v_n\}$ を V の収束点列とする. この時, $\{v_n\}$ は V の有界点列となる.

Proof. $\{\|v_n\|\}$ は収束列であるので, ある $M > 0$ が存在して, $\|v_n\| \leq M$ となる. これは, $\{v_n\}$ が有界列であることを表している. □

Definition 1.3.6. ノルム空間 V が完備であるとは, V の任意の Cauchy 列が収束することである. 内積から定まるノルムを持つノルム空間が完備である時, Hilbert 空間と呼ばれる.

Theorem 1.3.7 (Schwarz の不等式). 内積空間 V において, 任意の $v, w \in V$ に対して

$$|\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \cdot \|w\|$$

が成り立つ.

証明は演習問題とする.

Example 1.3.8. $V = C^0(\Omega)$ とおき, その内積を

$$\langle f, g \rangle = \left(\int_{\Omega} f(x) \cdot g(x) dx \right)^{1/2}$$

で定義すると, V は内積を持つノルム空間となる.

Proposition 1.3.9. V を *Example 1.3.8* で定義した空間とする. V は完備ではない. すなわち, V の Cauchy 列で極限が存在しないものがある.

Proof. 局所的に考えれば十分であるので, $\Omega = [0, 1]$ とし, $f_n(x) = x^{n/2}$ とおく. この時, $\|f_n\|_{L^2}^2 = \frac{1}{n+1}$ であり, これは Cauchy 列となるが, 収束先は, 連続関数ではない. したがって, V は完備ではない. □

Definition 1.3.10. *Example 1.3.8* をそのノルムによって完備化した空間を $L^2(\Omega)$ と書き, Ω 上の L^2 空間と呼ぶ. そのノルムを $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$, $\|\cdot\|_{L^2}$ と書く. 同様に $C^1(\Omega)$ 上の内積を

$$\langle v, w \rangle^2 = \int_{\Omega} f(x) \cdot g(x) dx + \int_{\Omega} \nabla f(x) \cdot \nabla g(x) dx$$

によって完備化した空間を $H^1(\Omega)$ と書き, Ω 上の H^1 空間と呼ぶ.

Definition 1.3.11. Hilbert 空間 V の正規直交基底 $\{\phi_n\}$ が完全であるとは, 任意の $v \in V$ が

$$v = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \phi_n$$

と書き表されることである.

Theorem 1.3.12. Hilber 空間 V の正規直交基底 $\{\phi_n\}$ が完全であるための必要十分条件は, 任意の $v \in V$ に対して,

$$\|v\|_V^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle v, \phi_n \rangle|^2 \quad (1.3.1)$$

が成り立つことである. (1.3.1) を *Parseval* の等式と呼ぶ.

Proof. 正規直交基底の部分集合 $\{\phi_n\}_{n=1}^N$ の張る V の部分空間を L_N と書く. さらに, $S_N = \sum_{n=1}^N \langle v, \phi_n \rangle \phi_n$ とおく. この時, $S_N \in L_N$ であり, S_N は v の L_N への直交射影であるので,

$$\|S_N\|_V^2 + \|v - S_N\|_V^2 = \|v\|_V^2$$

が成り立つ. 一方, $\{\phi_n\}$ の直交性より,

$$\|S_N\|_V^2 = \sum_{n=1}^N |\langle v, \phi_n \rangle|^2$$

が成り立つので,

$$\sum_{n=1}^N |\langle v, \phi_n \rangle|^2 + \|v - S_N\|_V^2 = \|v\|_V^2 \quad (1.3.2)$$

が成り立つ.

ここで, $\{\phi_n\}$ が完全であると仮定すると, $\lim_{n \rightarrow \infty} \|v - S_n\|_V = 0$ より, $\|v - S_N\|_V \rightarrow 0$ が成り立つ. したがって (1.3.2) より Parseval の等式が成り立つ. 逆に Parseval の等式が成り立つならば, $\|v - S_N\|_V \rightarrow 0$ が成り立ち, これは, $\{\phi_n\}$ が完全であることを表している. \square

Corollary 1.3.13. 任意の正規直交基底 $\{\phi_n\}$ に対して,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle v, \phi_n \rangle|^2 \leq \|v\|_V^2$$

が成り立つ. これを Bessel の不等式と呼ぶ.

1.3.2 Laplacian とその固有値

Example 1.3.14. Ω が \mathbb{R}^n または, \mathbb{R}^n 上の有界領域であり, $f, g \in C_0^\infty(\Omega)$ または $C_\nu^\infty(\Omega)$ とする. この時に, ∇f を

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x^n} \right)$$

と定義すると,

$$-\int_{\Omega} \langle \nabla f, \nabla g \rangle dx = \int_{\Omega} \langle \Delta f, g \rangle dx$$

が成り立つ. ここで, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial (x^1)^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial (x^n)^2}$ である. これは, 次の Green の公式から容易にわかる:

$$\int_{\Omega} \langle v, \Delta u \rangle dx + \int_{\Omega} \langle \nabla f, \nabla g \rangle dx = \int_{\partial\Omega} \langle v, \frac{\partial u}{\partial \nu} \rangle dS.$$

Definition 1.3.15. Ω が \mathbb{R}^n または \mathbb{R}^n の有界領域の時, $C_0^\infty(\Omega)$, $C_c^\infty(\Omega)$, Ω が境界のない多様体の時, $C^\infty(\Omega)$ に作用する微分作用素で,

$$\int_{\Omega} \langle \Delta f, g \rangle dx = - \int_{\Omega} \langle \nabla f, \nabla g \rangle dx$$

を満たす作用素 Δ を Ω 上の Laplacian と呼ぶ.

Proposition 1.3.16. Δ は次の条件を満たす.

正値性 任意の f に対して,

$$- \int_{\Omega} \langle \Delta f, f \rangle dx \geq 0.$$

が成り立つ.

自己共役性 任意の f, g に対して,

$$\int_{\Omega} \langle \Delta f, g \rangle dx = \int_{\Omega} \langle f, \Delta g \rangle dx$$

が成り立つ.

以下では, Laplacian の固有値問題

$$-\Delta f = \lambda f \tag{1.3.3}$$

を考えてみよう. Ω が \mathbb{R}^n の有界領域の場合には, Dirichlet 境界条件, または Neumann 境界条件をつけて考えるのは, これまでと同様である.

Definition 1.3.17. 一般に, 方程式 (1.3.3) の自明でないような解が存在する λ は, 複素数に属する可能性があるが, Laplacian の自己共役性から, λ が存在すれば, 実数になることがわかる. また, そのような λ が存在して, 方程式を満たす解の空間が有限次元となる時, λ を Δ の固有値と呼び, 解を固有関数と呼ぶ⁵.

実は, 次の定理が成り立つ.

Theorem 1.3.18. Ω が \mathbb{R}^n の有界領域, または境界のないコンパクト多様体の時, 方程式 (1.3.3) を満たす自明でない解が存在する $\lambda \in \mathbb{R}$ は, 離散的に分布し,

$$\lambda_1 < \lambda_2 \leq \dots \leq \infty$$

となる. 各 λ_i に対して, $-\Delta f = \lambda_i f$ の解は, 滑らかな関数全体の空間の中で有限次元となる. すなわち, (1.3.3) の解はすべて固有関数となる. また, 固有関数全体として, $L^2(\Omega)$ の完全正規直交基底となるものを選ぶことができる.

この定理は, Laplacian の逆写像である Green 作用素 G が $G: L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ として, 完全連続作用素となっているという事実から導かれる. ここで, Hilbert 空間 X 上の作用素 $L: X \rightarrow X$ が完全連続であるとは, X 中の任意の弱収束列 $\{u_n\}$ に対して, $\{Lu_n\}$ が X で強収束列となることであり, Laplacian の場合には, Rellich の Lemma より, $H^2(\Omega)$ が $L^2(\Omega)$ にコンパクトに埋め込まれていることがわかり, それを利用して証明される.

本来 Theorem 1.3.18 は, 弱い意味での微分を考えた空間 $H^1(\Omega)$ において証明される定理であるので, 各固有関数が滑らかなになるかどうかは, 「解の正則性」と呼ばれる, 別種の問題である. しかしながら, Laplacian は非常に良い性質を持った作用素であるため, 各固有関数は実際には滑らかなものとして得ることができる.

⁵ この定義は一見, 前と同様な定義のように見えるが, 一般には方程式 (1.3.3) を満たす解の空間が有限次元とは限らないので, 注意が必要である.

演習問題

Exercise 1.3.1. Theorem 1.3.7 (Schwarz の不等式) を証明せよ.

Exercise 1.3.2. Ω は \mathbb{R}^n の有界領域とし, $0 \in \Omega$ とする. 数列 r_n を 0 に収束する列とし, $B_{r_n}(0)$ で 0 を中心とする半径 r_n の開球とする. 関数 f_n を

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & (x \notin B_{r_n}(0)) \\ (r_n - |x|)^n & (x \in B_{r_n}(0)) \end{cases}$$

とおく. (すなわち, グラフが円錐形をなしている.) この時, 容易にわかるように,

$$\|\sqrt{f_n}\|^2 = \frac{1}{n}$$

を証明しなさい.

第2章 Fourier 級数

ここでは、 S^1 上の Fourier 級数について考えてみよう。すなわち、 \mathbb{R} の区間 $[0, 2\pi]$ または $[-\pi, \pi]$ 上で定義され、周期 2π を持つ関数に関して、その Fourier 級数とは何かを考えてみる。

2.1 S^1 上の Fourier 級数

2.1.1 Fourier 級数とは

ここまで学んだ通り、 S^1 上の Laplacian は離散的な固有値を持ち、それらが、 C を 0 でない任意定数として、

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= 0, & \phi_1 &= C, \\ \lambda_{2n} &= \lambda_{2n+1} = n^2, & \phi_{2n} &= C \sin(nt), \phi_{2n+1} = C \cos(nt)\end{aligned}$$

と選ぶことができることがわかっている。ここで、それらのノルムと内積の値を計算しておこう。

$$\begin{aligned}\|C\|_{L^2(S^1)}^2 &= C^2 \int_0^{2\pi} dt = 2\pi C^2, \\ \|C \sin(nt)\|_{L^2(S^1)}^2 &= C^2 \int_0^{2\pi} \sin^2(nt) dt = C^2 \pi, \\ \|C \cos(nt)\|_{L^2(S^1)}^2 &= C^2 \int_0^{2\pi} \cos^2(nt) dt = C^2 \pi, \\ \langle C \sin(nt), C \rangle &= C^2 \int_0^{2\pi} \sin(nt) dt = 0, \\ \langle C \cos(nt), C \rangle &= C^2 \int_0^{2\pi} \cos(nt) dt = 0, \\ \langle C \sin(nt), C \sin(mt) \rangle &= C^2 \int_0^{2\pi} \sin(nt) \sin(mt) dt = 0, \quad (n \neq m) \\ \langle C \cos(nt), C \cos(mt) \rangle &= C^2 \int_0^{2\pi} \cos(nt) \cos(mt) dt = 0, \quad (n \neq m) \\ \langle C \cos(nt), C \sin(mt) \rangle &= C^2 \int_0^{2\pi} \cos(nt) \sin(mt) dt = 0.\end{aligned}$$

という計算が成り立つ。したがって、Laplacian の固有関数として、

$$\phi_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \phi_{2n} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(nt), \quad \phi_{2n+1} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(nt)$$

と選べば、

$$\begin{aligned}\|\phi_i\|_{L^2} &= 1, \quad i = 1, 2, \dots, \\ \langle \phi_i, \phi_j \rangle &= 0, \quad i \neq j\end{aligned}$$

が成り立つ。したがって、Theorem 1.3.18 を考慮すれば、 $\{\phi_i\}$ は $L^2(S^1)$ の完全正規直交基底をなすことがわかり、任意の $f \in L^2(S^1)$ に対して、

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \phi_n, \quad a_n = \langle f, \phi_n \rangle \quad (2.1.1)$$

と書くことができる。ここで、(2.1.1) の右辺の級数の収束の意味は、 $L^2(S^1)$ での収束を表していて、等式の意味は $L^2(S^1)$ の関数として等しいという意味を表している。これを書き直すと、次のような定理が成り立つ。

Theorem 2.1.1. \mathbb{R} 上定義された周期 2π を持つ関数 f で、それが 2 乗可積分であると仮定する。(すなわち、 $f \in L^2(S^1)$ とみなすことができる。) この時、 f は $L^2(S^1)$ の元として、

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)) \quad (2.1.2)$$

と書け、

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{S^1} f(t) dt, \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{S^1} f(t) \cos(nt) dt, \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{S^1} f(t) \sin(nt) dt, \end{aligned} \quad (2.1.3)$$

となる。

Definition 2.1.2. Theorem 2.1.1 で表された展開を、 f の Fourier 級数展開または Fourier 級数と呼び、 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ 、 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ を f の Fourier 係数と呼ぶ。

また、 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 、 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して、

$$\begin{aligned} a_n &= c_n + c_{-n}, & b_n &= \sqrt{-1}(c_{-n} - c_n), \\ c_n &= \frac{1}{2}(a_n + \sqrt{-1}b_n) = \overline{c_{-n}}, & c_0 &= \frac{a_0}{2} \end{aligned} \quad (2.1.4)$$

とおくと、(2.1.2) は

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{nt\sqrt{-1}} \quad (2.1.5)$$

と書くことができ、

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{S^1} f(t) e^{-nt\sqrt{-1}} dt \quad (2.1.6)$$

が成り立つ。このことより、次の定義ができる。

Definition 2.1.3. $f: S^1 \rightarrow \mathbb{C}$ に対して、(2.1.5) の展開を f の複素 Fourier 級数または、複素 Fourier 級数展開と呼ぶ。

以下では関数 f に対する複素 Fourier 係数 $c_n = c_n(f)$ を $\hat{f}(n)$ と書くことにする。これは、後に出てくる Fourier 変換との対応のためである。ここで、次の命題を確認しておこう。

Proposition 2.1.4. $\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\sqrt{-1}nt}\}$ は \mathbb{R} 上の周期 2π を持つ複素数値関数で、周期上 2 乗可積分な関数全体の空間 $L^2(S^1, \mathbb{C})$ の完全正規直交基底をなす。

ここで、Fourier 級数展開は $L^2(S^1)$ での展開式であるので、滑らかな関数 $C^\infty(S^1)$ や連続な関数 $C^0(S^1)$ に対して、Fourier 級数がいつ収束し、滑らか、または連続となるかを調べる必要がある。

2.1.2 Fourier 級数の例

ここでは、いくつかの例について、Fourier 級数を実際に求めてみよう。

Example 2.1.5. $[0, 2\pi]$ 上の関数 $\sin^2 x$ の Fourier 級数は、具体的に積分を計算するまでもなく、求めることができる。いわゆる「倍角の公式」より、

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x$$

が成り立つ。この時、 $a_0 = 1$ 、 $a_2 = -1/2$ であって、上の式は、他の係数はすべて 0 となる Fourier 級数（この場合は有限な級数）を与えているとみなすことができる。

Example 2.1.6. n, m を整数とした時、 $[0, 2\pi]$ 上の関数 $\sin(mx) \cos(nx)$ の Fourier 級数を求めてみよう。この場合も、いわゆる「和積（積和）の公式」より、

$$\sin(mx) \cos(nx) = \frac{1}{2}(\sin(m-n)x + \sin(n+m)x)$$

が Fourier 級数を与えている。

ここで、Fourier 級数を計算するための比較的便利な命題を用意しておこう。

Proposition 2.1.7. f は $[-\pi, \pi]$ 上で定義された周期 2π を持つ関数とする。 f が奇関数、すなわち、 $f(-x) = -f(x)$ を満たすならば、すべての n に対して $a_n = 0$ が成り立つ。

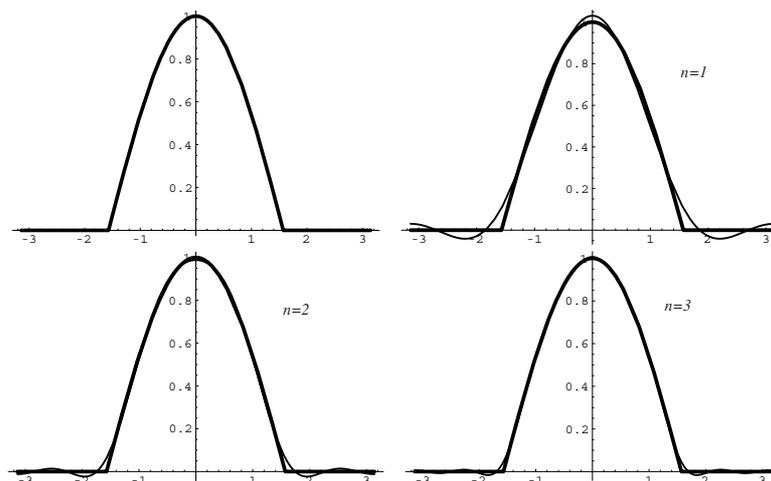
f 偶関数、すなわち、 $f(-x) = f(x)$ を満たすならば、すべての n に対して $b_n = 0$ が成り立つ。

Proof. $[-\pi, \pi]$ 上で $\sin(nt)$ が奇関数であり、 $\cos(nt)$ が偶関数であることより、容易に証明できる。 \square

Example 2.1.8. $[-\pi, \pi]$ 上で、

$$f(x) = \begin{cases} \cos x & |x| \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 & |x| > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

とおき、この関数の Fourier 級数を計算してみよう。



この関数は、偶関数であるので、 $b_n = 0$ であることがわかる。したがって、 a_n を計算すれば良い。

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x \, dx = \frac{2}{\pi},$$

$$a_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 x \, dx = \frac{1}{2},$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x \cos(nx) \, dx = \frac{1}{\pi} \frac{2 \cos(n\pi/2)}{(n+1)(n-1)} = \begin{cases} 0 & n = 2m+1, \\ (-1)^m \frac{2}{\pi(1-4m^2)} & n = 2m \end{cases}$$

となり、

$$f(x) = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \cos x + \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m \cos(2mx)}{(1-4m^2)}$$

となることがわかる。

Remark 2.1.9. Example 2.1.8 の関数を x 軸方向に $\pi/2$ 平行移動すると、

$$g(x) = \begin{cases} \sin x & 0 \leq x < \pi \\ 0 & \pi \leq x < 2\pi \end{cases}$$

となり、 $[0, 2\pi]$ 上で Dirichlet 境界条件を満たす関数となる。すなわち、 $g(x) = f(x - \pi/2)$ が成り立つ。しかしながら、 $g(x)$ の Fourier 級数展開を $f(x)$ のものから計算すると、

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m \cos\left(2m\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right)}{(1-4m^2)} \\ &= \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \sin x + \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos(2mx)}{(1-4m^2)} \end{aligned}$$

となり、Dirichlet 境界値問題の固有関数では書けていないように見える。これは、 $\cos(2mx)$ を $\{\sin(\frac{n}{2}x)\}$ で書き直せば、Dirichlet 境界値問題の固有関数で書くことができる。

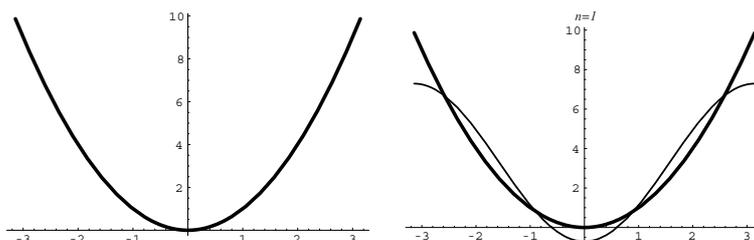
Example 2.1.10. $[-\pi, \pi]$ 上で $f(x) = x^2$ を Fourier 展開する。この関数は偶関数であるので、 $b_n = 0$ は明らかである。そこで a_n を計算すると、

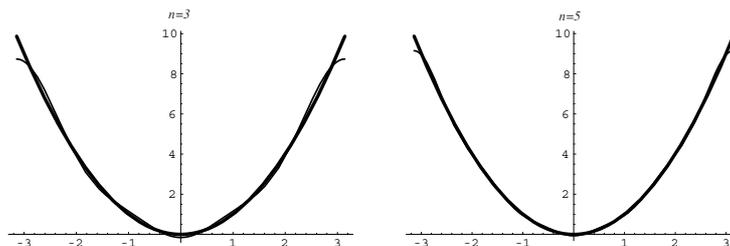
$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \, dx = \frac{1}{\pi} \frac{2\pi^3}{3} = \frac{2\pi^2}{3}, \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos(nx) \, dx = (-1)^n \frac{4}{n^2} \end{aligned}$$

となり、

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} - 4\left(\cos(x) - \frac{\cos(2x)}{2^2} + \frac{\cos(3x)}{3^2} + \dots\right)$$

であることがわかる。





Proposition 2.1.11. f, g をともに $L^2(S^1)$ に属する関数とする. f の Fourier 係数を $\{a_n(f)\}, \{b_n(f)\}$, g の Fourier 係数を $\{a_n(g)\}, \{b_n(g)\}$ とおくと, $f + g$ の Fourier 係数は $a_n(f + g) = a_n(f) + a_n(g)$, $b_n(f + g) = b_n(f) + b_n(g)$ を満たす.

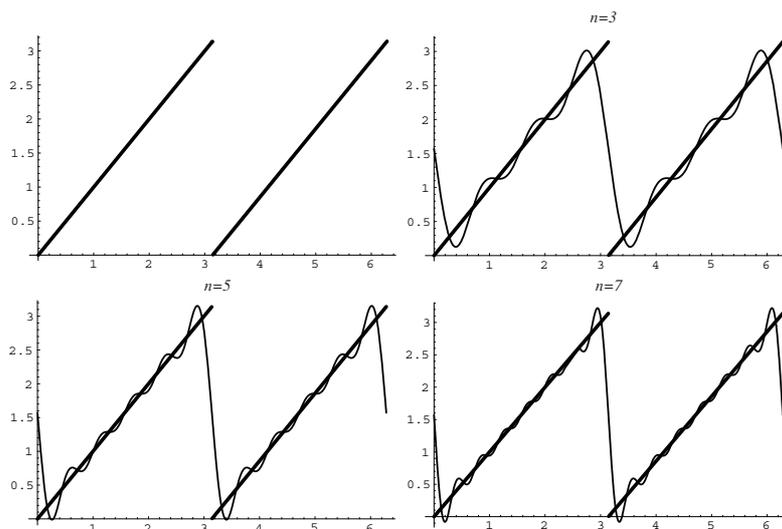
Proof. 証明は, 積分の線形性より明らかである. □

ここまでは, 連続な関数の Fourier 級数展開を扱っていたが, 連続ではない関数の Fourier 級数展開がどうなっているかを考えてみよう.

Example 2.1.12. $[0, 2\pi]$ 上で

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x < \pi, \\ x - \pi, & \pi \leq x < 2\pi \end{cases}$$

を考えてみよう.



この関数の Fourier 係数は,

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi x \, dx + \frac{1}{\pi} \int_\pi^{2\pi} (x - \pi) \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x \, dx = \pi,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi x \cos(nx) \, dx + \frac{1}{\pi} \int_\pi^{2\pi} (x - \pi) \cos(nx) \, dx = 0,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi x \sin(nx) \, dx + \frac{1}{\pi} \int_\pi^{2\pi} (x - \pi) \sin(nx) \, dx = -\frac{1}{n} \cos(n\pi) = \begin{cases} 0 & n = 2m + 1, \\ -2/n & n = 2m, \end{cases}$$

となる. したがって,

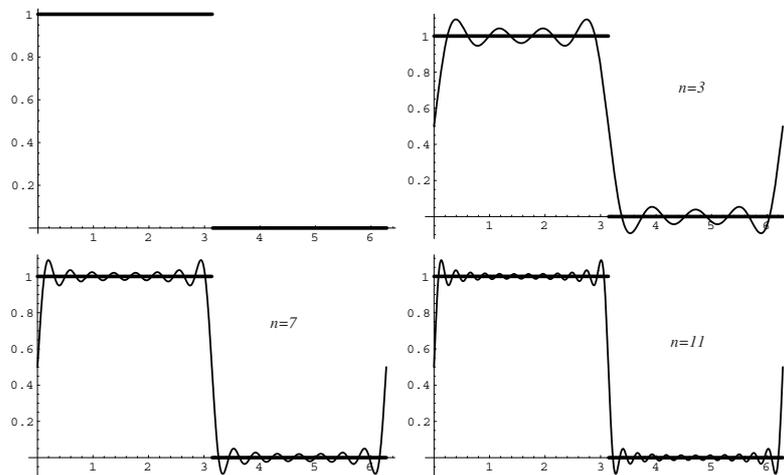
$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin(2nx)$$

となることがわかる.

Example 2.1.13. $[0, 2\pi]$ 上で

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < \pi, \\ 0 & \pi \leq x < 2\pi \end{cases}$$

を考えてみると,



Fourier 係数は,

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} dx = 1,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(nx) dx = 0,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(nx) dx = \frac{1}{n} - \frac{\cos(n\pi)}{n} = \begin{cases} 0 & n = 2m, \\ \frac{2}{n\pi} & n = 2m + 1 \end{cases}$$

となるので, Fourier 級数は

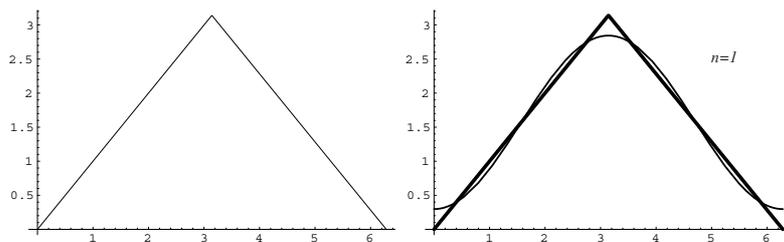
$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)\pi} \sin((2n+1)x)$$

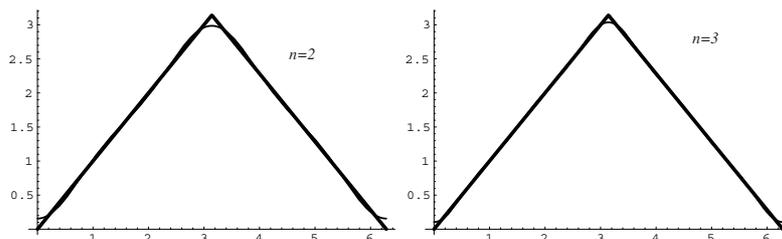
となることがわかる.

Example 2.1.14. $[0, 2\pi]$ 上で

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x < \pi, \\ 2\pi - x & \pi \leq x < 2\pi \end{cases}$$

を考えてみると,





Fourier 係数は,

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x dx + \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{2\pi} (2\pi - x) dx = \pi,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos(nx) dx + \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{2\pi} (2\pi - x) \cos(nx) dx = \begin{cases} 0 & n = 2m + 1, \\ -\frac{4}{n^2\pi} & n = 2m \end{cases}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin(nx) dx + \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{2\pi} (2\pi - x) \sin(nx) dx = 0$$

となるので, Fourier 級数は

$$f(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \cos((2n+1)x)$$

となることがわかる.

ここまでの例を観察すると, 以下のようなことに気がつく.

1. f が連続な点では, f の Fourier 級数は $f(x)$ に収束するように見える.
2. f が不連続な点では, f の Fourier 級数は $(f(x+0) + f(x-0))/2$ に収束するように見え, その近傍では「トゲ」が出てくるようにみえる.

次の章以下では, この観察を正当化してみよう.

2.1.3 Fourier 級数の収束

この章以下では, $f: S^1 \rightarrow \mathbb{C}$ とし, その Fourier 級数の第 n 項目までの部分積を

$$S_n(f, x) = \sum_{k=-n}^{k=n} \hat{f}(k) e^{kx\sqrt{-1}}$$

と書くことにしよう. この時, $S_n(f, x)$ がどのような f に対して $f(x)$ に収束するかが問題となるが, その解答としては次の Dirichlet-Jordan の定理が有名である.

Theorem 2.1.15 (Dirichlet-Jordan). f が S^1 上で区分的に連続かつ滑らかであると仮定する. さらに, f の不連続点ではその左極限と右極限が存在すると仮定する. この時, f の Fourier 級数 $S_n(f, x)$ は任意の $x \in S^1$ に対して収束して,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(f, x) = \frac{1}{2}(f(x+0) + f(x-0))$$

が成り立つ. 特に f の連続点では

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(f, x) = f(x)$$

が成り立つ.

以下では, この定理の証明の概略を述べることにより, Fourier 級数の性質を見ていこう.

2.1.3.1 Dirichlet 核と Fejèl 核

ここでは, f に対する部分和 $S_n(f, x)$ を積分により表示することを考える. 部分和 $S_n(f, x)$ は

$$\begin{aligned} S_n(f, x) &= \sum_{k=-n}^{k=n} \widehat{f}(k) e^{kx\sqrt{-1}} \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-n}^{k=n} \left(\int_{S^1} f(y) e^{-ky\sqrt{-1}} dt \right) e^{-kx\sqrt{-1}} \\ &= \int_{S^1} \left(\frac{1}{2\pi} \sum_{k=-n}^{k=n} e^{k(x-y)\sqrt{-1}} f(y) dy \right) \end{aligned} \quad (2.1.7)$$

と書ける.

$$\begin{aligned} \sum_{k=-n}^{k=n} e^{kx\sqrt{-1}} &= \frac{e^{-nx\sqrt{-1}} - e^{(n+1)x\sqrt{-1}}}{1 - e^{x\sqrt{-1}}} \\ &= \frac{e^{-(n+1/2)x\sqrt{-1}} - e^{(n+1/2)x\sqrt{-1}}}{e^{-x\sqrt{-1}/2} - e^{x\sqrt{-1}/2}} \\ &= \frac{\sin(n+1/2)x}{\sin(x/2)} \end{aligned} \quad (2.1.8)$$

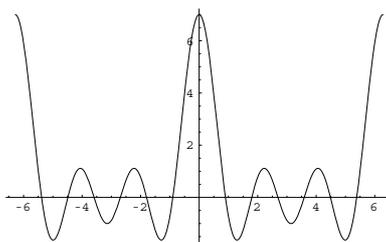
となるので, (2.1.7) と (2.1.8) を合わせると,

$$\begin{aligned} S_n(f, x) &= \int_{S^1} D_n(x-y) f(y) dy \\ D_n(x) &= \frac{1}{2\pi} \frac{\sin(n+1/2)x}{\sin(x/2)} \end{aligned} \quad (2.1.9)$$

と書くことができる. この D_n を Dirichlet 核と呼ぶ. Dirichlet 核は

$$\int_{S^1} D_n(x) dx = 1$$

なる性質を持つ, 下のような図の関数である.



次に, Fejèl 和を定義しよう. Fejèl 和とは次のような動機から定義された和である. 一般に数列 $\{a_n\}$ が与えられた時, $a_n \rightarrow a$ であれば, $s_n = \frac{a_1 + \dots + a_n}{n}$ は a に収束し, s_n が収束しても, a_n 自身が収束しないような例がある. つまり, a_n よりも s_n の方が振舞いが良くなることが知られている.

そこで, f に対して, f の Fejèl 和 $\sigma_n(f, x)$ を

$$\begin{aligned}\sigma_n(f, x) &= \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n S_j(f, x) \\ &= \sum_{k=-n}^{k=n} \frac{n+1-|k|}{n+1} \widehat{f}(k) e^{ikx\sqrt{-1}} \\ &= \int_{S^1} K_n(x-y) f(y) dy, \\ K_n(x) &= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{n+1} \left(\frac{\sin((n+1)x/2)}{\sin x/2} \right)^2\end{aligned}$$

で定義する. ここで定義した K_n を Fejèl 核と呼び,

$$\int_{S^1} K_n(x) dx = 1$$

を満たす.

2.1.3.2 Fourier 展開の一意性

Theorem 2.1.16. $f: S^1 \rightarrow \mathbb{C}$ は (Riemann) 積分可能であって, t で連続であるならば, $\sigma_n(f, t) \rightarrow f(t)$ が成り立つ. 特に, f が S^1 上で連続であれば, この収束は一様である.

Proof. f は積分可能であるので, 特に有界. したがって, $|f(x)| \leq M, x \in S^1$ が成り立つ. f は t で連続なので, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある $\delta > 0$ が存在して, $|t-s| < \delta$ ならば, $|f(t) - f(s)| \leq \varepsilon/2$ が成り立つ. この δ を固定すれば, K_n の性質より, ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して, $n \geq N$ ならば,

$$|K_n(s)| \leq \frac{\varepsilon}{4M}, \quad s \in [-\delta, \delta].$$

よって,

$$\int_{-\delta}^{\delta} |K_n(s)| ds \leq \int_{S^1} K_n(s) ds$$

なので,

$$\begin{aligned}|\sigma_n(f, t) - f(t)| &= \left| \int_{S^1} K_n(s) f(t-s) ds - \int_{S^1} K_n(s) f(t) ds \right| = \left| \int_{S^1} K_n(s) (f(t-s) - f(t)) ds \right| \\ &\leq \left| \int_{s \in [-\delta, \delta]} K_n(s) (f(t-s) - f(t)) ds + \int_{s \notin [-\delta, \delta]} K_n(s) (f(t-s) - f(t)) ds \right| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} \int_{s \in [-\delta, \delta]} |K_n(s)| ds + 2M \int_{s \notin [-\delta, \delta]} |K_n(s)| ds \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2M}{\varepsilon} 4M = \varepsilon\end{aligned}$$

が成り立つ. S^1 はコンパクトであるので, 特に f が S^1 上で連続であれば, f は一様連続となるので, ここで選んだ N は t に無関係に選べる. よって, 収束は一様である. \square

Corollary 2.1.17. $f, g: S^1 \rightarrow \mathbb{C}$ は連続であるとする. この時, f, g のそれぞれの Fourier 係数 $\widehat{f}(n), \widehat{g}(n)$ がすべての n に対して一致すれば, $f = g$ が成り立つ.

2.1.3.3 収束定理と項別微分

Theorem 2.1.18. $\sum_{k=-n}^{k=n} |a_k|$ が収束すると仮定する。この時、 $\sum_{k=-n}^{k=n} a_k e^{kt\sqrt{-1}}$ は S^1 上である連続関数 $f(t)$ に一様に収束する。この時、 f の Fourier 係数は a_k となる。

Proof. 数列の Cauchy の判定条件より、任意の $\varepsilon > 0$ に対して、ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して、 $n > m \geq N$ ならば $\sum_{m \leq |k| \leq n} |a_k| < \varepsilon$ が成り立つ。したがって、

$$\left| \sum_{m \leq |k| \leq n} a_k e^{kt\sqrt{-1}} \right| \leq \sum_{m \leq |k| \leq n} |a_k e^{kt\sqrt{-1}}| \leq \sum_{m \leq |k| \leq n} |a_k| < \varepsilon$$

となり、 $\sum_{k=-n}^{k=n} a_k e^{kt\sqrt{-1}}$ は S^1 上で一様にある f に収束する。ここで、一様収束の極限は連続関数となるので、 f は S^1 上で連続となる。

いま、この収束が一様であるので、

$$\left(\sum_{k=-n}^{k=n} a_k e^{kt\sqrt{-1}} \right) e^{-lt\sqrt{-1}} \rightarrow f(t) e^{-lt\sqrt{-1}}$$

も一様収束し、

$$\begin{aligned} a_r &= \sum_{k=-n}^{k=n} a_k \frac{1}{2\pi} \int_{S^1} e^{(k-r)t\sqrt{-1}} dt \\ &= e^{-rt\sqrt{-1}} \frac{1}{2\pi} \int_{S^1} \sum_{k=-n}^{k=n} a_k e^{kt\sqrt{-1}} dt \rightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{S^1} f(t) e^{-rt\sqrt{-1}} dt = \widehat{f}(r) \end{aligned}$$

が成り立つ。 □

Corollary 2.1.19. $f: S^1 \rightarrow \mathbb{C}$ は連続であるとする。この時、 $\sum_{k=-\infty}^{k=\infty} |\widehat{f}(n)|$ が収束すれば、 $S_n(f, t)$ は S^1 上 $f(t)$ に一様収束する。

Proof. Theorem 2.1.18 より、 $S_n(f, t)$ はある連続関数 g に一様に収束し、 $\widehat{g}(n) = \widehat{f}(n)$ が成り立つ。したがって、 $f = g$ が成り立つ。 □

Theorem 2.1.20 (項別微分). 連続関数 $f: S^1 \rightarrow \mathbb{C}$ に対して、 $\sum_{k=-\infty}^{k=\infty} |k| |\widehat{f}(k)|$ が収束すると仮定する。この時、 f は C^1 となり、

$$\sum_{k=-n}^{k=n} \sqrt{-1} k \widehat{f}(k) e^{kt\sqrt{-1}} \rightarrow f'(t)$$

は一様である。

Proof. $k \neq 0$ に対しては、 $|\widehat{f}(n)| \leq |k| |\widehat{f}(n)|$ であるので、 $\sum_{k=-n}^{k=n} |\widehat{f}(n)|$ は収束する。したがって、一様に $S_n(f, t) \rightarrow f(t)$ である。一方、

$$S'_n(f, t) = \sum_{k=-n}^{k=n} \sqrt{-1} k \widehat{f}(k) e^{kt\sqrt{-1}}$$

であるので、Theorem 2.1.19 より、 $S'_n(f, t)$ はある $g(t)$ に一様に収束する。したがって、収束がともに一様であるので、極限と微分を交換できて、結論が従う。 □

Example 2.1.13 と Example 2.1.14 がちょうど、項別微分の関係にあることを注意しよう。

Lemma 2.1.21. $f: S^1 \rightarrow \mathbb{C}$ は C^{n-1} 級であり, $f^{(n-1)}$ は有限個の点 x_i を除き, 微分可能で連続な導関数を持つと仮定する. この時, $t \neq x_i$ に対して, $|f^{(n)}(t)| \leq M$ ならば, 任意の $k \neq 0$ に対して, $|\widehat{f}(k)| \leq Mk^{-n}$ が成り立つ.

Proof. 部分積分を実行すれば,

$$\widehat{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{S^1} f(t)e^{-kt\sqrt{-1}} dt = \frac{1}{2\pi k\sqrt{-1}} \int_{S^1} f'(t)e^{-kt\sqrt{-1}} dt = \frac{(k\sqrt{-1})^{-n}}{2\pi} \int_{S^1} f^{(n)}(t)e^{-kt\sqrt{-1}} dt$$

が成り立つ. したがって,

$$|\widehat{f}(k)| \leq \left| \frac{(k\sqrt{-1})^{-n}}{2\pi} \right| \int_{S^1} |f^{(n)}(t)e^{-kt\sqrt{-1}}| dt \leq Mk^{-n}$$

が成り立つ. □

Theorem 2.1.22. $f: S^1 \rightarrow \mathbb{C}$ が C^2 ならば, 一様に $S_n(f, \cdot) \rightarrow f$ が成り立つ.

Proof. Lemma 2.1.21 より, $|\widehat{f}(k)| \leq Mk^{-n}$ が成り立つ. したがって, $\sum_{k=-n}^{k=n} |\widehat{f}(k)|$ は収束するので, Theorem 2.1.20 により, 結論が従う. □

2.1.3.4 不連続点における振舞い

ここでは, 不連続点のまわりにおける $S_n(f, t)$ の収束の様子を見てみよう. 次の Lemma を証明するには, ここまででは証明を与えていないが, 次の定理が成り立つことを利用する.

Theorem 2.1.23. $f: S^1 \rightarrow \mathbb{C}$ は (Riemann) 積分可能で, $|k| \rightarrow \infty$ の時, $\widehat{f}(k) = O(|k|^{-1})$ と仮定する. この時, f が t で連続であれば, $S_n(f, t) \rightarrow f(t)$. さらに S^1 上で連続であれば, この収束は一様となる.

特に, f が至るところ連続で, 有限個の点以外では連続な導関数を持てば, 一様に $S_n(f, \cdot) \rightarrow f$ が成り立つ.

この定理の証明には, Fejèl とよりも詳しい解析が必要となる.

Lemma 2.1.24. $f: S^1 \rightarrow \mathbb{C}$ は (Riemann) 積分可能で, $|k| \rightarrow \infty$ の時, $\widehat{f}(k) = O(|k|^{-1})$ と仮定する. さらに, $\lim_{t \rightarrow \pi-0} f(t)$ と $\lim_{t \rightarrow \pi+0} f(t)$ が存在して, それぞれの値を $f(\pi-0)$, $f(\pi+0)$ と書く. この時,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(f, t) = \frac{f(\pi-0) + f(\pi+0)}{2}$$

が成り立つ.

Proof. 関数 $g: S^1 \rightarrow \mathbb{C}$ を

$$g(t) = \begin{cases} f(t) + \frac{f(\pi+0) - f(\pi-0)}{2\pi} h(t), & (t \neq \pi) \\ \frac{f(\pi-0) + f(\pi+0)}{2} & (t = \pi) \end{cases}$$

で定める. ここで, $h: S^1 \rightarrow \mathbb{C}$ は,

$$h(t) = t, \quad (-\pi < t < \pi), \quad h(\pi) = 0$$

と定めた関数である. (Example 2.1.12 参照) すると,

$$g(t) \rightarrow f(\pi-0) + \frac{f(\pi+0) - f(\pi-0)}{2} = g(\pi) \quad (t \rightarrow \pi-0)$$

$$g(t) \rightarrow f(\pi+0) - \frac{f(\pi+0) - f(\pi-0)}{2} = g(\pi) \quad (t \rightarrow \pi+0)$$

となり, g は $t = \pi$ で連続となる. 一方,

$$\widehat{g}(k) = \widehat{f}(k) - \frac{f(\pi-0) + f(\pi+0)}{2} \widehat{h}(k)$$

が成り立ち, $\widehat{f}(k) = O(|k|^{-1})$ かつ, $\widehat{h}(k) = O(|k|^{-1})$ であるので, $\widehat{g}(k) = O(|k|^{-1})$ が成り立つ. したがって, $n \rightarrow \infty$ の時,

$$S_n(f, \pi) - \frac{f(\pi+0) - f(\pi-0)}{2\pi} S_n(h, \pi) = S_n(g, \pi) \rightarrow g(\pi) = \frac{f(\pi+0) + f(\pi-0)}{2}$$

が成り立つ. さらに, $S_n(h, \pi) = 0$ であるので,

$$S_n(f, \pi) = \frac{f(\pi+0) + f(\pi-0)}{2}$$

が成り立つ. □

Theorem 2.1.25. $f: S^1 \rightarrow \mathbb{C}$ は (Riemann) 積分可能で, $|k| \rightarrow \infty$ の時, $\widehat{f}(k) = O(|k|^{-2})$ と仮定する. この時, $x \in S^1$ において, $\lim_{t \rightarrow x-0} f(t)$ と $\lim_{t \rightarrow x+0} f(t)$ が存在すれば,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(f, t) = \frac{\lim_{t \rightarrow x-0} f(t) + \lim_{t \rightarrow x+0} f(t)}{2}$$

が成り立つ.

Proof. $f_y(t) = f(y+t)$ とおくと, $\widehat{f}_y(k) = \widehat{f}(k) e^{yk\sqrt{-1}}$ が成り立つ. したがって,

$$S_m(f_y, t) = \sum_{k=-m}^{k=m} (e^{ky\sqrt{-1}} \widehat{f}(k)) e^{kt\sqrt{-1}} = \sum_{k=-m}^{k=m} \widehat{f}(k) e^{k(y+t)\sqrt{-1}} \rightarrow f(y+t) = f_y(t)$$

が成り立つ. したがって, Lemma 2.1.24 より, 結論が成り立つ. □

2.1.3.5 Theorem 2.1.15 の証明

Theorem 2.1.26. $f: S^1 \rightarrow \mathbb{C}$ が連続で, 有限個の点を除いて有界連続な導関数を持つとする. この時, $\lim_{t \rightarrow x-0} f(t)$, $\lim_{t \rightarrow x+0} f(t)$ が存在して,

$$S_n(f, t) = \frac{\lim_{t \rightarrow x-0} f(t) + \lim_{t \rightarrow x+0} f(t)}{2}$$

が成り立つ.

Proof. Lemma 2.1.21 より $\widehat{f}(k) = O(|k|^{-1})$ が成り立つ. したがって, Theorem 2.1.25 より結論が成り立つ. □

Remark 2.1.27. Du Bois-Reymond により, 至るところで連続であるが, その Fourier 級数が $\limsup_{n \rightarrow \infty} S_n(f, 0) = +\infty$ となる関数 f の例が構成されている. したがって, Fourier 級数の収束の条件はむやみに弱めることはできない.

2.1.4 収束の速さと Gibbs 現象

一般に級数 $\sum a_n$ の収束の速さとは, その極限を α とした時,

$$\left| \sum_{k=1}^n a_n - \alpha \right|$$

が n に関してどの程度の order となるかを考えることによって、収束の速さとみなす。

ここでは、 f が導関数を持たない点、不連続点の近傍ではその Fourier 級数が一良う収束していないという事実を現象論的に確認することができることに注意しよう。

2.1.4.1 Fourier 級数の収束の速さ

$f: S^1 \rightarrow \mathbb{C}$ の Fourier 級数が f に収束している時を考えよう。この時、

$$|f(x) - S_n(f, x)| = \left| \sum_{|k| \geq n+1} \widehat{f}(k) e^{kx\sqrt{-1}} \right| \leq \sum_{|k| \geq n+1} |\widehat{f}(k)|$$

が成り立つ。したがって、 $f \in C^{m-1}(S^1)$ で、 $f^{(m-1)}$ が有限個の点を除き、連続有界な導関数を持てば Lemma 2.1.21 により、

$$|f(x) - S_n(f, x)| \leq \sum_{|k| \geq n+1} |\widehat{f}(k)| \leq M \sum_{|k| \geq n+1} k^{-m} = O(|n|^{-m+1})$$

であることがわかる。

ここで、 f が S^1 上で C^k であり、 $t = t_0$ を除いて滑らかな場合を考えてみよう。すると、

$$\widehat{f}(n) e^{nt\sqrt{-1}} = \frac{(n\sqrt{-1})^{-k}}{2\pi} \int_{S^1} f^{(k)}(s) e^{n(t-s)\sqrt{-1}} ds = (n\sqrt{-1})^{-k} f^{(n)}(t) * e^{-nt\sqrt{-1}}$$

が成り立つ。ここで、

$$(f^{(n)}(t) * (n\sqrt{-1})^{-1} e^{-nt\sqrt{-1}})' = f^{(n)}(t) * e^{-nt\sqrt{-1}} = f^{(n+1)}(t) * (n\sqrt{-1})^{-1} e^{-nt\sqrt{-1}}$$

が成り立つので、なめらかな点の近傍での収束は、滑らかでない点の近傍の収束よりも速くなることがわかる。

2.1.4.2 Gibbs 現象

最初に述べた通り、不連続点の回りでの Fourier 級数の収束には、「トゲ」のようなものが出てきている。このようなものが表れる現象を Gibbs 現象と呼ぶ。

$h: S^1 \rightarrow \mathbb{C}$ を

$$h(x) = x, \quad (x \neq \pi), \quad h(\pi) = 0$$

で定義する。(Example 2.1.12 参照)

Theorem 2.1.28. $n \rightarrow \infty$ の時、

$$S_n(h, \pi - \frac{\pi}{n}) \rightarrow A\pi, \quad S_n(h, -\pi + \frac{\pi}{n}) \rightarrow -A\pi$$

ただし、

$$A = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin x}{x} dx > 1.17$$

が成り立つ。

Proof.

$$S_n(h, x) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{2}{k} \sin(kx)$$

が成り立つ。したがって、

$$\begin{aligned} S_n(h, \pi - \frac{\pi}{n}) &= \sum_{k=1}^n \frac{2}{k} \sin \frac{k\pi}{n} = 2 \sum_{k=1}^n \frac{\pi}{n} \left(\frac{n}{k\pi} \sin \frac{k\pi}{n} \right) \\ &\rightarrow 2 \int_0^\pi \frac{\sin x}{x} dx \\ S_n(h, -\pi + \frac{\pi}{n}) &\rightarrow -2 \int_0^\pi \frac{\sin x}{x} dx \end{aligned}$$

が成り立つ。ここで、この積分の値を Taylor 展開を利用して評価すれば、求める近似値を得る。 \square

一般に関数 $f: S^1 \rightarrow \mathbb{C}$ が不連続点 x_i を持ち、 $\hat{f}(k) = O(|k|^{-1})$ を満たしているとする。この時、

$$f(t) = g(t) + \sum_{j=1}^k \lambda_j h(t - x_j), \quad \lambda_j \in \mathbb{C}$$

と書くことができ、各不連続点の近傍で Gibbs 現象を確認することができる。

もし、 f の Fourier 級数が一様に f に収束するならば、このような gap は生じないことに注意しよう。

2.1.5 最良近似

ここでは $f: S^1 \rightarrow \mathbb{C}$ は $f \in L^2(S^1, \mathbb{C})$ を満たしていると仮定する。この時、 $n \in \mathbb{N}$ を一つ与え固定した時、

$$T_n(t) = \sum_{k=-n}^{k=n} d_n e^{kt\sqrt{-1}}, \quad d_n \in \mathbb{C}$$

という形の関数で、 $\|T_n - f\|_{L^2(S^1)}$ の値を最も小さくする $\{d_n\}$ が Fourier 係数であることを示そう。これを、 L^2 -norm による最良近似という。

Theorem 2.1.29.

$$F_n := \left\{ \sum_{k=-n}^{k=n} d_n e^{kt\sqrt{-1}} : d_n \in \mathbb{C} \right\}$$

とおく。 $f \in L^2(S^1, \mathbb{C})$ が与えられた時、任意の $g_n \in F_n$ に対して、

$$\|f - S_n(f, \cdot)\|_{L^2(S^1)} \leq \|f - g_n\|_{L^2(S^1)}$$

が成り立つ。

Proof. いま, Fourier 級数展開の基底 $\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{nt\sqrt{-1}}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ は, $L^2(S^1, \mathbb{C})$ の完全正規直交基底をなしている. 簡単のため, これを $\{\phi_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ と書こう. この時, 任意の $g_n \in F_n$ に対して,

$$\begin{aligned} \|f - g_n\|_{L^2}^2 &= \langle f - \sum_{k=-n}^{k=n} d_k \phi_k, f - \sum_{k=-n}^{k=n} d_k \phi_k \rangle \\ &= \langle f, f \rangle - \sum_{k=-n}^{k=n} d_k \langle \phi_k, f \rangle - \sum_{k=-n}^{k=n} d_k^* \langle f, \phi_k \rangle + \sum_{k=-n}^{k=n} \sum_{j=-n}^{j=n} d_k d_j^* \langle \phi_k, \phi_j \rangle \\ &= \langle f, f \rangle - \sum_{k=-n}^{k=n} (d_k \langle f, \phi_k \rangle^* + d_k^* \langle f, \phi_k \rangle) + \sum_{k=-n}^{k=n} d_k d_k^* \\ &= \langle f, f \rangle - \sum_{k=-n}^{k=n} \langle f, \phi_k \rangle^* \langle f, \phi_k \rangle + \sum_{k=-n}^{k=n} (d_k - \langle f, \phi_k \rangle)(d_k - \langle f, \phi_k \rangle)^* \\ &= \langle f, f \rangle - \sum_{k=-n}^{k=n} |\langle f, \phi_k \rangle|^2 + \sum_{k=-n}^{k=n} |d_k - \langle f, \phi_k \rangle|^2 \\ &\geq \langle f, f \rangle - \sum_{k=-n}^{k=n} |\langle f, \phi_k \rangle|^2 \\ &= \|f\|_{L^2}^2 - \sum_{k=-n}^{k=n} |\langle f, \phi_k \rangle|^2 \end{aligned}$$

が成り立つ. ここで等号は, $d_k = \langle f, \phi_k \rangle$ の時に限って成り立つ. したがって,

$$\|f - g_n\|_{L^2}^2 \geq \|f - S_n(f, \cdot)\|_{L^2}^2 = \|f\|_{L^2}^2 - \sum_{k=-n}^{k=n} |\langle f, \phi_k \rangle|^2$$

が成り立つ. □

Remark 2.1.30. この証明中では, $\{\phi_n\}$ が $L^2(S^1, \mathbb{C})$ の完全正規直交基底であることと, Fourier 級数が $\{\phi_n\}$ に関する展開であるという事実しか利用していない. したがって, 後に述べるように, 任意の $L^2(S^1, \mathbb{C})$ の完全正規直交基底に関する展開に関して, 同様の性質が成り立つ.

また, $S_n(f, \cdot)$ による f の近似とは, $L^2(S^1, \mathbb{C})$ の中の有限次元部分空間への射影であり, 完全正規直交基底の部分基底による有限次元近似であることに注意して欲しい.

2.1.6 Convolution

ここでは $C^\infty(S^1, \mathbb{C})$ の2つの元に対して, $C^\infty(S^1, \mathbb{C})$ の元を対応させる写像を考える.

Definition 2.1.31. $f, g \in C^\infty(S^1, \mathbb{C})$ に対して, $f * g \in C^\infty(S^1, \mathbb{C})$ を

$$(f * g)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{S^1} f(x-y)g(y) dy$$

で決める. この演算のことを合成積 (convolution) と呼ぶ. また, たたみこみと呼ばれることも多い.

Lemma 2.1.32. 合成積に関しては, 次の性質が成り立つ.

1. $f * g$ は連続.
2. $(f * g) = (g * f)$,

$$3. \|f * g\|_{L^1} \leq C \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^1},$$

Proof. 1. $x, y \in S^1$ とする時,

$$|f * g(x) - f * g(y)| = \left| \int_{S^1} (f(x-t)g(t) - f(y-t)g(t)) dt \right| \leq \int_{S^1} |f(x-t) - f(y-t)| |g(t)| dt$$

が成り立つ。ここで、 g は S^1 上で連続であるので、ある $M > 0$ が存在して、 $\int_{S^1} |g(t)| dt \leq M$ が成り立つ。また、 f は S^1 上で連続、したがって、 S^1 上で一様連続であるので、任意の $\varepsilon > 0$ に対して、ある $\delta > 0$ が存在して、 $|x - y| < \delta$ ならば、

$$|f(x-t) - f(y-t)| \leq \frac{\varepsilon}{M}$$

となる。よって、

$$|f * g(x) - f * g(y)| \leq \int_{S^1} |f(x-t) - f(y-t)| |g(t)| dt \leq \varepsilon$$

が成り立ち、 $f * g$ は連続である。

2. $z = x - y$ とおくと、 $y = x - z$, $dy = -dz$ であるので、

$$(f * g)(x) = \int_{S^1} f(x-y)g(y) dy = \int_{S^1} f(z)g(x-z) dz = (g * f)(x).$$

3.

$$\begin{aligned} 2\pi \|f * g\|_{L^1} &\leq \int_{S^1} \int_{S^1} |f(x-y)g(y)| dx dy = \int_{S^1} |g(y)| \left(\int_{S^1} |f(x-y)| dx \right) dy \\ &= \int_{S^1} |g(y)| \left(\int_{S^1} |f(x)| dx \right) dy = \left(\int_{S^1} |f(x)| dx \right) \left(\int_{S^1} |g(x)| dx \right) \\ &= C \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^1} \end{aligned}$$

が成り立つ。

□

Theorem 2.1.33. $f * g$ の Fourier 係数 $\widehat{f * g}(n)$ は

$$\widehat{f * g}(n) = \widehat{f}(n)\widehat{g}(n)$$

を満たす。また、 fg の Fourier 係数 $\widehat{(fg)}(n)$ は

$$\widehat{(fg)}(n) = \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} \widehat{f}(n-m)\widehat{g}(m)$$

を満たす。

Proof. 第一の式については、

$$\begin{aligned} \widehat{f * g}(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{S^1} (f * g)(t) e^{-nt\sqrt{-1}} dt = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{2\pi} \int_{S^1} \int_{S^1} f(t-x)g(x) e^{-nt\sqrt{-1}} dt dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{2\pi} \int_{S^1} \int_{S^1} g(x) e^{-nx\sqrt{-1}} f(t-x) e^{-n(t-x)\sqrt{-1}} dt dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{S^1} g(x) e^{-nx\sqrt{-1}} dx \times \frac{1}{2\pi} \int_{S^1} f(x) e^{-nx\sqrt{-1}} dx \\ &= \widehat{f}(n)\widehat{g}(n). \end{aligned}$$

同様に,

$$\begin{aligned}\widehat{fg}(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{S^1} f(t)g(t)e^{-nt\sqrt{-1}} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{S^1} \sum_{l=-\infty}^{l=\infty} \widehat{f}(l)e^{lt\sqrt{-1}} \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} \widehat{g}(m)e^{mt\sqrt{-1}} e^{-nt\sqrt{-1}} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{l=-\infty}^{l=\infty} \widehat{f}(l) \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} \widehat{g}(m) \int_{S^1} e^{-(n-m-l)t\sqrt{-1}} dt\end{aligned}$$

が成り立つ。ここで,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{S^1} e^{-(n-m-l)t\sqrt{-1}} dt = \delta_{l, n-m}$$

が成り立つので,

$$\begin{aligned}\widehat{fg}(n) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{l=-\infty}^{l=\infty} \widehat{f}(l) \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} \widehat{g}(m) \int_{S^1} e^{-(n-m-l)t\sqrt{-1}} dt \\ &= \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} \widehat{f}(n-m)\widehat{g}(m).\end{aligned}$$

□

さらに, 以下の事実も容易に示すことができる.

Theorem 2.1.34. $f, g: S^1 \rightarrow \mathbb{C}$ が連続関数であれば, $\lambda \in \mathbb{C}$ に対して, 以下が成り立つ.

1. $f * (g * h) = (f * g) * h$,
2. $f * (g + h) = f * g + f * h$,
3. $(\lambda f) * g = \lambda(f * g)$.

この定理は, S^1 上の連続関数全体が $*$ による積で可換環をなしていることを示している. すなわち, $(C^\infty(S^1, \mathbb{C}), +, *)$ は可換環をなす. そこで, この環が $*$ に関する単位元をもつかどうかを調べてみよう. その準備として, 次の定理を用意する.

Theorem 2.1.35 (Riemann-Lebesgue). $f: S^1 \rightarrow \mathbb{C}$ とすると, $n \rightarrow \infty$ の時,

$$\widehat{f}(n) \rightarrow 0$$

が成り立つ.

Proof. $I = [a, b] \subset S^1$ ($b - a < 2\pi$) とする. この時, χ_I で I の特性関数を表すと,

$$|\widehat{\chi}(n)| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_a^b e^{-nt\sqrt{-1}} dt \right| = \frac{1}{2\pi|n|} |e^{-nb\sqrt{-1}} - e^{-na\sqrt{-1}}| \leq \frac{1}{\pi|n|}$$

が成り立つ. したがって, S^1 上の区間の列 $\{I(k)\}$, \mathbb{C} の列 $\{\lambda_k\}$ に対して,

$$\left| \widehat{\sum_{j=1}^k \lambda_j \chi_{I(j)}}(n) \right| = \left| \sum_{j=1}^k \lambda_j \widehat{\chi_{I(j)}}(n) \right| \leq \sum_{j=1}^k |\lambda_j| |\widehat{\chi_{I(j)}}(n)| \rightarrow 0$$

となる.

ここで, f は S^1 上一様連続であるので, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して, $|x - y| \leq 2\pi/N$ ならば $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$ が成り立つ. そこで,

$$\lambda_j = f\left(\frac{2\pi j}{N}\right), \quad I(j) = [2\pi(j-1)/N, 2\pi j/N], \quad F = \sum_{j=1}^N \lambda_j \chi_{I(j)}$$

とおくと、任意の $t \in S^1$ に対して、

$$|f(t) - F(t)| \leq \varepsilon$$

が成り立つ。一方、 $\widehat{F}(n) \rightarrow 0$ が成り立つので、ある $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ が存在して、 $n \geq n_0$ ならば $\widehat{F}(n) \leq \varepsilon$ である。よって、

$$|\widehat{f}(n)| \leq |\widehat{f}(n) - \widehat{F}(n)| + |\widehat{F}(n)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{S^1} |f(t) - F(t)| dt \leq 2\varepsilon$$

となり、 $\widehat{f}(n) \rightarrow 0$ が成り立つ。 □

Theorem 2.1.36. 連続関数 $k: S^1 \rightarrow \mathbb{C}$ で、任意の連続関数 $f: S^1 \rightarrow \mathbb{C}$ に対して、

$$k * f = f$$

を満たすものは存在しない。

Proof. そのような k が存在したと仮定する。この時、 $\widehat{k}(n)\widehat{f}(n) = \widehat{f}(n)$ が成り立つ。特に、 $f(t) = e^{mt\sqrt{-1}}$ とおくと、任意の m に対して、 $\widehat{k}(m) = 1$ が成り立つ。しかし、Riemann-Lebesgue の定理と矛盾。 □

一方、次のような集合を考えてみよう：

$$\ell = \{ \{c_n\} : c_n \in \mathbb{C}, |c_n| \leq C|n|^{-k} \text{ が任意の } k \text{ に対して成り立つ} \}$$

すると、容易にわかるように、 ℓ には、

$$\{c_n\} + \{d_n\} = \{c_n + d_n\}, \quad \{c_n\} \cdot \{d_n\} = \{c_n \cdot d_n\}$$

によって、可換環の構造が入る。この時、 $f \in C^\infty(S^1, \mathbb{C})$ に対する Fourier 級数 $\widehat{f}(n)$ は ℓ に属することがわかり、 $\mathcal{F}(f) = \{\widehat{f}(n)\}$ という写像を考えると、

$$\mathcal{F}(f + g) = \mathcal{F}(f) + \mathcal{F}(g),$$

$$\mathcal{F}(af) = a\mathcal{F}(f), \quad a \in \mathbb{C},$$

$$\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}(f) \cdot \mathcal{F}(g)$$

が成り立つので、 $\mathcal{F}: C^\infty(S^1, \mathbb{C}) \rightarrow \ell$ は $(C^\infty(S^1, \mathbb{C}), +, *)$ から $(\ell, +, \cdot)$ への可換環としての同形を与えていることがわかる。一方、 $(\ell, +, \cdot)$ の積の単位元は（形式的には） $c_n = 1$ というものであり、これは、 ℓ には属さないことがわかる。したがって、 $(C^\infty(S^1, \mathbb{C}), +, *)$ には積の単位元が存在しないことがわかる。

また、Parseval の等式より、

$$\|f\|_{L^2}^2 = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} |\widehat{f}(n)|^2$$

が成り立つので、 ℓ に

$$\|c_n\|_{\ell^2}^2 = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} |c_n|^2$$

という norm を入れることにより、 $\mathcal{F}: C^\infty(S^1, \mathbb{C}) \rightarrow \ell$ は、この norm によって等長写像となることがわかる。

一方、 $\{c_n\}, \{d_n\} \in \ell$ に対して、

$$\{c_n\} * \{d_n\} = \left\{ \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} c_{n-m} d_m \right\}$$

と定義すると, $\mathcal{F}: (C^\infty(S^1, \mathbb{C}), +, \cdot) \rightarrow (\ell, +, *)$ が可換環としての同形を与えている. この時, $1 \in C^\infty(S^1, \mathbb{C})$ は $(C^\infty(S^1, \mathbb{C}), +, \cdot)$ の積の単位元であり, それに対応する $(\ell, +, *)$ の単位元は $c_0 = 1, c_n = 0$ ($n \neq 0$) という元であることがわかる.

また, convolution は以下のような性質を持つことがわかる. (証明は省略)

Theorem 2.1.37. S^1 上の滑らかな関数 f, g に対して,

$$(f * g)^{(r+s)} = f^{(r)} * g^{(s)}$$

が成り立つ.

2.1.7 応用

ここでは Fourier 級数の応用として, いくつかの話題を取り上げる.

2.1.7.1 微分方程式

2.1.7.1.1 線形常微分方程式 ここでは, 2階線形常微分方程式

$$Lq'' + Rq' + \frac{q}{C} = v \quad (2.1.10)$$

を考える. ここで, L, R, C は定数であり, $LC \neq 0$ とする. この時, 外力 $v(t)$ を特別なものを与えたとして, その時の解を重ね合わせることによって, 解を求めてみよう. すなわち, v を Fourier 級数展開を

$$v(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \hat{v}(n)e^{nt\sqrt{-1}}$$

として, v として,

$$Lq'' + Rq' + \frac{q}{C} = \hat{v}(n)e^{nt\sqrt{-1}} \quad (2.1.11)$$

の解 q_n が求められれば, 方程式が線形であるので, (2.1.10) の解は

$$q(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} q_n(t)$$

として与えられることが期待できる.

実際, (2.1.11) の解を求めるために, $q_n(t) = \hat{q}(n)e^{nt\sqrt{-1}}$ とおいて, (2.1.11) に代入すると,

$$(-n^2L + nR\sqrt{-1} + \frac{1}{C})\hat{q}(n) = \hat{v}(n)$$

が成り立つ. すなわち,

$$\hat{q}(n) = \frac{C\hat{v}(n)}{1 - n^2LC + nRC\sqrt{-1}}$$

となる. したがって, (2.1.10) の解は

$$q(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \frac{C\hat{v}(n)e^{nt\sqrt{-1}}}{1 - n^2LC + nRC\sqrt{-1}}$$

であることがわかる.

ここで、ある関数 $\phi: S^1 \rightarrow \mathbb{C}$ が存在して、

$$\widehat{\phi}(n) = \frac{C}{1 - n^2 LC + nRC\sqrt{-1}}$$

と書けたならば、解は

$$q(t) = (\phi * v)(t)$$

と書けることがわかる。このような関数 ϕ が存在すれば、それを基本解と呼ぶ。

(2.1.10) はいわゆる LRC 回路を表していて、この時の $v = 0$ に対応する解は時間とともに減衰する。したがって、上で求めた解は、外力 v を与えた時の定常状態における解を表している。

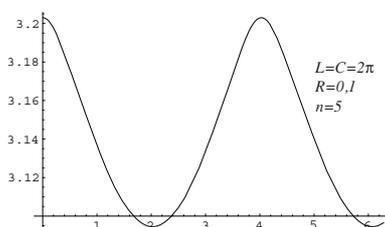
Example 2.1.38. ここであげた線形常微分方程式に $v(t) = t, t \in [0, 2\pi)$ という周期的な鋸波を外力として与えてみよう。上の v の Fourier 級数は

$$v(t) = \frac{1}{2} + \sum_{n=-\infty, n \neq 0}^{n=\infty} \frac{\sqrt{-1}}{2\pi n} e^{nt\sqrt{-1}}$$

と書けるので、求める解は

$$\begin{aligned} q(t) &= \frac{C}{2} + \sum_{n=-\infty, n \neq 0}^{n=\infty} \frac{\sqrt{-1}C}{2\pi n(1 - n^2 LC + nRC\sqrt{-1})} e^{nt\sqrt{-1}} \\ &= \frac{C}{2} + \sum_{n \geq 1} \frac{C}{\pi n \sqrt{(1 - n^2 LC)^2 + n^2 R^2 C^2}} \cos(nt + \delta_0), \\ \delta_0 &= \arctan\left(\frac{1 - n^2 LC}{nRC}\right) \end{aligned}$$

である。



2.1.7.1.2 線形システム 一般に入力 $v(t)$ に対して出力 $q(t)$ が得られるシステムがあるとする。このシステムを写像 T で表し、 $q = T(v)$ と表現することにする。この時、 T が

1. a を複素定数として、 $T(av) = aT(v)$,
2. $T(v + u) = T(v) + T(u)$

を満たす時、このシステムを線形システムと呼ぶ。具体的には、前で述べたような線形微分方程式によって表されるシステムが該当する。個のような場合、入力 v を Fourier 級数展開すれば、システムの出力は、

$$T(v) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \widehat{v}(n)T(e^{nt\sqrt{-1}})$$

と求めることができる。

Example 2.1.39. T として, $T(e^{nt\sqrt{-1}}) = H(n)e^{nt\sqrt{-1}}$ を満たすような線形システムを考えよう. すなわち, 入力 t の周波数に対して, 出力 t の周波数は変化しないもの考える. この時, $h(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} H(n)e^{nt\sqrt{-1}}$ と定義すると,

$$\begin{aligned} T(v) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{v}(n)T(e^{nt\sqrt{-1}}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{v}(n)H(n)e^{nt\sqrt{-1}} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\widehat{v}(n)\widehat{h}(n))e^{nt\sqrt{-1}} = (v * h) \end{aligned}$$

となり, このシステムの出力は, 入力と h との convolution で表されることがわかる.

2.1.7.2 おまけ

ここでは, Fourier 級数を利用して, 次の有名な級数の和を計算してみよう.

Proposition 2.1.40.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Proof. $[0, \pi]$ 上で $h(t) = \pi/2 - |t|$ と定義し, これを周期拡張しよう. すると簡単な計算により,

$$\widehat{h}(k) = \begin{cases} 0 & k: \text{even,} \\ \frac{2}{\pi k} & k: \text{odd} \end{cases}$$

が成り立つ. ここで, $\sum k^{-2}$ は収束するので, $\sum |\widehat{h}(k)|$ は絶対収束する. したがって, 任意の $t \in S^1$ に対して,

$$S_n(h, t) \rightarrow h(t)$$

特に,

$$S_n(h, 0) = \sum_{k=-n}^{k=n} \frac{2}{\pi(2k+1)^2} \rightarrow h(0) = \frac{\pi}{2}$$

が成り立つ. したがって,

$$\frac{\pi^2}{8} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} = \frac{3}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

となり求める結論を得る. □

演習問題

Exercise 2.1.1. Proposition 2.1.4 を証明せよ.

Exercise 2.1.2. Proposition 2.1.7 を証明せよ.

Exercise 2.1.3. Proposition 2.1.11 と Example 2.1.8 を用いて, $[-\pi, \pi]$ 上で, $f(x) = |\cos x|$ の Fourier 級数を計算せよ.

Exercise 2.1.4. $[0, 2\pi]$ 上の関数

$$g(x) = \begin{cases} \sin x & 0 \leq x < \pi \\ 0 & \pi \leq x < 2\pi \end{cases}$$

を $[0, 2\pi]$ 上の Dirichlet 境界値問題の固有関数を使って Fourier 級数展開しなさい。

Exercise 2.1.5. 数列 $\{a_n\}$ が収束する時, $s_n = \frac{a_1 + \dots + a_n}{n}$ は同じ極限に収束することを証明しなさい。また, s_n は収束しても, a_n は収束しないような数列の例を作りなさい。

Exercise 2.1.6. Dirichlet 核 $D_n(x)$, Fejèr 核 $K_n(x)$ について,

$$\int_{S^1} D_n(x) dx = \int_{S^1} K_n(x) dx = 1$$

を証明しなさい。

Exercise 2.1.7.

$$\sum_{k=1}^n \frac{2}{k} \sin \frac{k\pi}{n} = 2 \sum_{k=1}^n \frac{\pi}{n} \left(\frac{n}{k\pi} \sin \frac{k\pi}{n} \right) \rightarrow 2 \int_0^\pi \frac{\sin x}{x} dx$$

を証明し,

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin x}{x} dx > 1.17$$

を確かめなさい。

Exercise 2.1.8. Theorem 2.1.37 を証明しなさい。

2.2 多次元や一般的な Fourier 級数

前章では S^1 上の関数の $-\frac{d^2}{dt^2}$ の固有関数系による展開を考えてきた。ここでは、より一般に \mathbb{R}^n の有界閉集合や閉多様体上の Laplacian の固有関数系を利用した展開や、Laplacian 以外の作用素の固有関数系に関する展開を考えてみよう。

これらの固有関数系が、適当な関数空間での完全正規直交基底になっていれば、Parseval の等式、その関数空間での最良近似などの性質が成り立つことは、完全正規直交基底の定義から明らかである。

2.2.1 \mathbb{R} の有界閉区間における直交関数系

ここでは、 \mathbb{R} の有界閉区間 $[a, b]$ における直交関数系を調べてみる。以下では、 p, q, r は $[a, b]$ 上の実数値連続関数で、 p は C^1 , p, r は $[a, b]$ 上正値とする。この時、作用素 L を

$$L = \frac{1}{r(x)} \left[\frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{d}{dx} \right) - q(x) \right]$$

とおき、

$$-Lu = \lambda u$$

の Dirichlet または Neumann 境界値問題を考えてみよう。ただし、 $u: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ とする。この時、次が成り立つ。

Theorem 2.2.1. 1. 任意の $u, v \in C^2([a, b], \mathbb{C})$ で境界条件を満たすものに対して、 $\langle Lu, v \rangle = \langle u, Lv \rangle$ が成り立つ。
 2. L の固有値は実数である。
 3. $-L$ の固有値は下に有界で、 $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \rightarrow \infty$ が成り立つ。
 4. L の異なる固有値に対する固有関数は直交する。
 5. L の固有関数系から $L^2(a, b)$ (ただし、適当な境界条件をみたま) の完全正規直交基底を作ることができる。

この定理の最後の結論は、自己共役作用素 L の逆作用素が完全連続であることから導かれる。

Example 2.2.2. $[a, b] = [-1, 1]$ とし、

$$L = \frac{d}{dt} \left((1-t^2) \frac{d}{dt} \right)$$

を考えると、この作用素の $[-1, 1]$ における固有関数系は

$$x_n(t) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dt^n} (t^2 - 1)^n, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

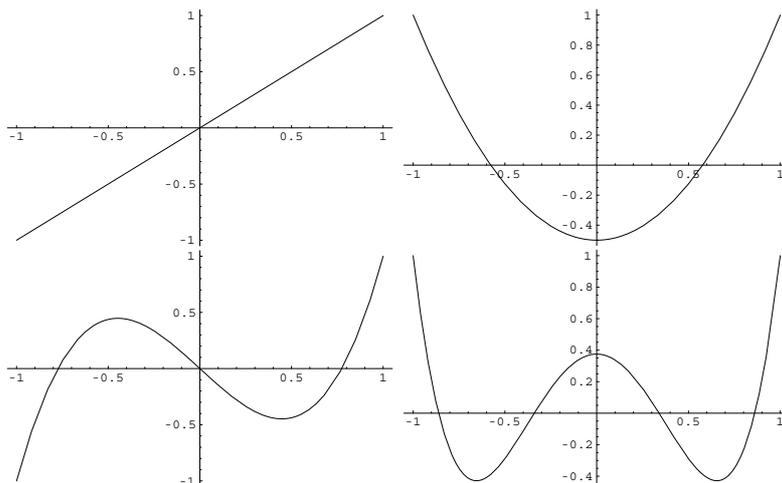
であり、 x_n は

$$-Lx_n = n(n+1)x_n$$

を満たす。特に、

$$\bar{x}_n(t) = \sqrt{\frac{2n+1}{2}} x_n(t)$$

とおけば $\{\bar{x}_n\}$ は $L^2(-1, 1)$ の完全正規直交基底をなす。この関数系を Legendre 多項式と呼ぶ。



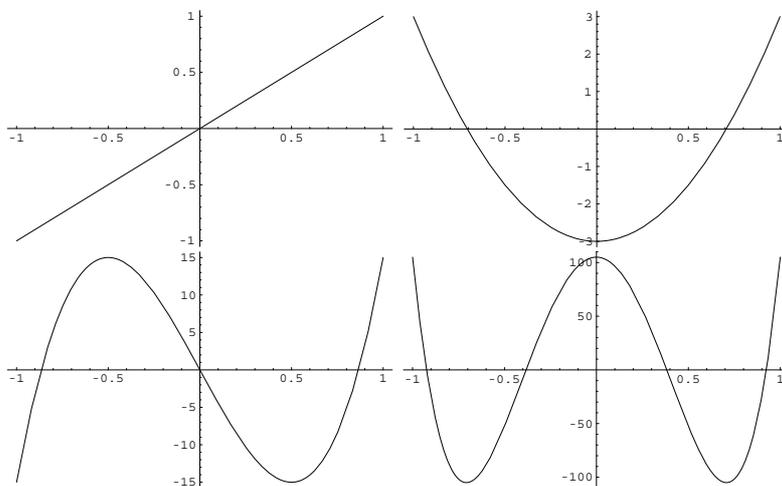
Example 2.2.3. $[a, b] = [-1, 1]$ とおく. この時, $T_n(x)$ を $\cos(nx) = T_n(\cos x)$ を満たす n 次多項式とすると, $\{(1/2)T_0, T_1, \dots\}$ は, $r(x) = 2\pi^{-1}(1-x^2)^{1/2}$ とおいた時,

$$\langle v, u \rangle = \int_{-1}^1 u(x)v(x)r(x) dx$$

によって定まる内積を持つ空間における正規直交基底をなす. (完全性はみたさない) この多項式系を Chebyshev 多項式と呼ぶ. これらは,

$$\frac{d}{dx}((1-x^2)\frac{d}{dx}T_n) = -n^2T_n$$

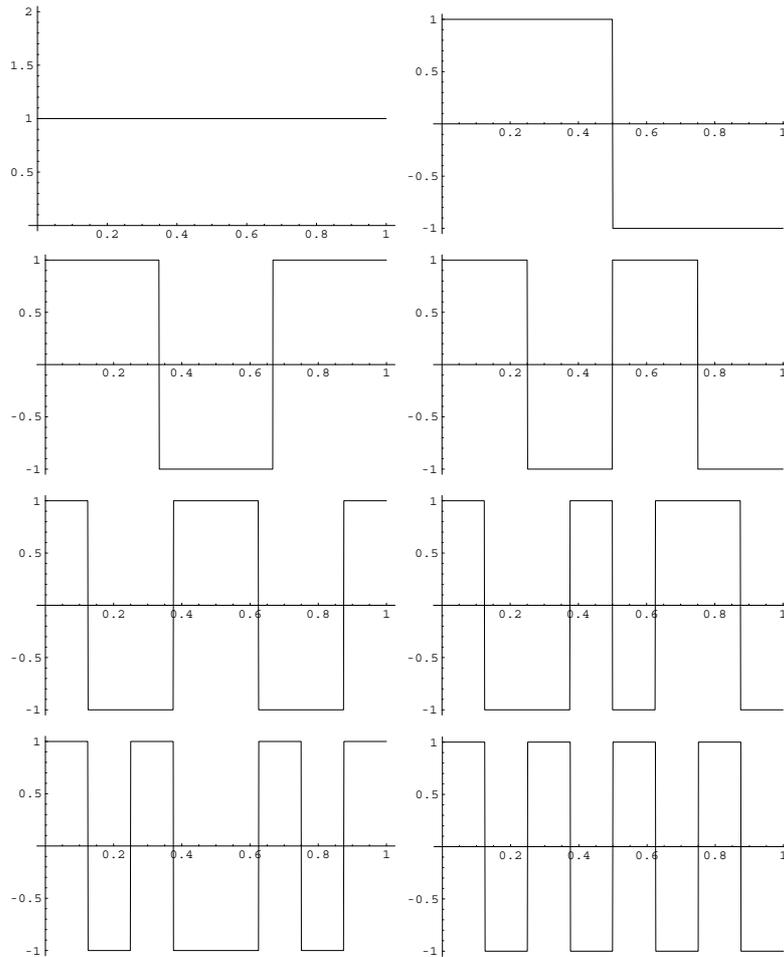
を満たす.



Example 2.2.4. $x \in [0, 1]$ として, x の 2 進展開を考え, その第 n 項が 0 の時 $r_n(x) = 1$, 1 の時 $r_n(x) = -1$, 2 通りに展開される時 $r_n(x) = 0$ とおく関数系 $\{r_n\}$ を考える. さらに, $n = 2^{\mu_1} + \dots + 2^{\mu_p}$ の時,

$$w_n(x) = r_{\mu_1+1}(x) \cdots r_{\mu_p+1}(x), \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

とおくと $\{w_n(x)\}$ は $L^2(0, 1)$ の完全正規直交基底となる. これを Walsh 関数系と呼ぶ.

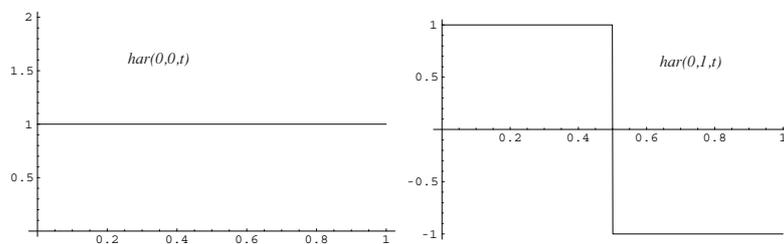


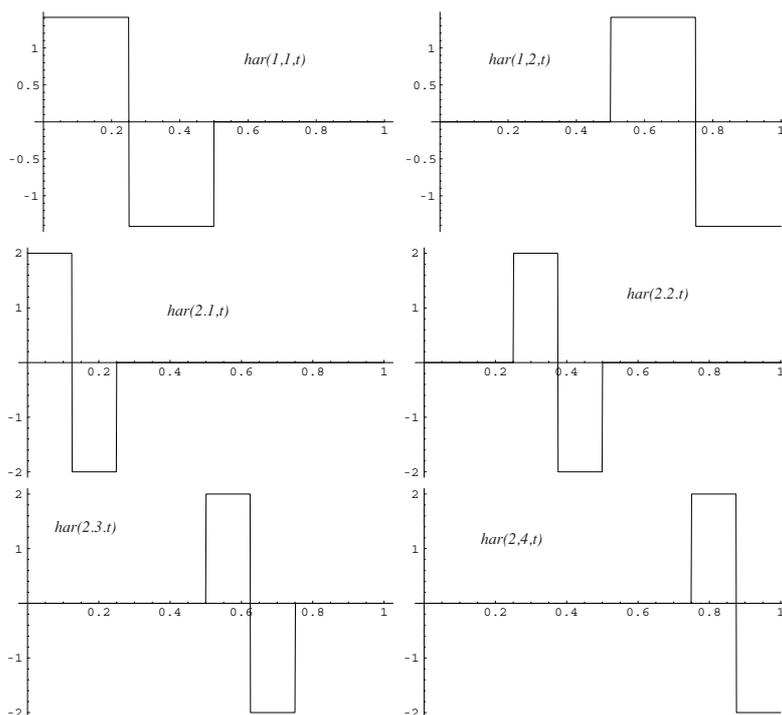
Example 2.2.5. $L^2(0,1)$ の正規直交基底としては, 次のようなものも存在する.

$$h(g, m, t) = \begin{cases} 2^{g/2} & (\frac{m-1}{2^g} \leq t \leq \frac{m-1/2}{2^g}) \\ -2^{g/2} & (\frac{m-1/2}{2^g} \leq t \leq \frac{m}{2^g}) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$h(0, 0, t) = 1.$$

ただし, $m = 1, \dots, 2^g$. これは Haar 関数系と呼ばれる.





Remark 2.2.6. 一般に実軸上の直交関数系による展開の係数に関して, Fourier 係数と似たような減衰条件をもてば, その級数は収束することが知られている.

2.2.2 \mathbb{R}^n の有界領域・閉多様体での直交関数系

これまで学んだ内容からわかる通り, \mathbb{R}^n の有界領域 (この場合には適当な境界条件が必要) または, 閉多様体上の Laplacian に対して, その固有関数系を考えることにより, Fourier 展開を作ることが可能である. ここでは, いくつかの例に対して, その固有関数や固有値を計算してみよう.

2.2.2.1 D^2 上の Laplacian

D^2 とは以下のように定義された 2 次元平面内の単位円盤である.

$$D^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x|^2 + |y|^2 \leq 1\}.$$

この上で

$$\begin{cases} -\Delta f = \lambda f, \\ f(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \partial D^2 \end{cases}$$

を考えてみよう. Laplacian を極座標を使って表示すれば,

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

と書くことができる. ここで, 最後の項は S^1 の Laplacian と同じになっていることに注意する.

ここで, $f: D^2 \rightarrow \mathbb{C}$ が

$$f(r, \theta) = T(r)G(\theta)$$

という形で変数分離されていると仮定しよう. その時, D^2 上の Laplacian の固有値問題は,

$$\begin{aligned} G'' + \mu G &= 0, \\ T'' + \frac{1}{r}T' + (\lambda - \mu r^{-1})T &= 0, \\ T(1) &= 0 \end{aligned}$$

という問題を解くことに帰着される. ここで, 求めた $f = TG$ が原点において滑らかになるためには, $T'(0) = 0$ が必要十分な条件となる.

第一の方程式は S^1 上の固有値問題であるので,

$$\mu_n = n^2, \quad n \in \mathbb{N}$$

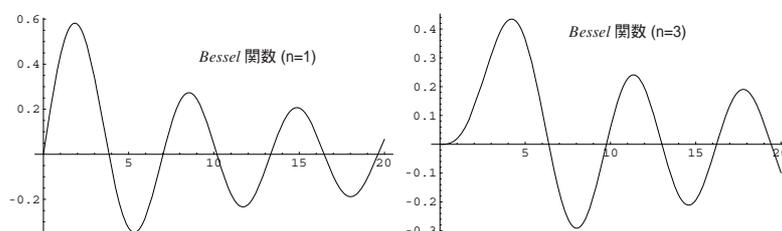
が求めるものであることがわかる. そこで,

$$\begin{aligned} T'' + \frac{1}{r}T' + (\lambda - \frac{n^2}{r^2})T &= 0, \\ T(1) &= 0 \end{aligned}$$

を満たす解を探せばよい. これは, Bessel の微分方程式と呼ばれ, $r \mapsto r/\sqrt{\lambda}$ と変数変換することにより,

$$\begin{aligned} T'' + \frac{1}{r}T' + (1 - \frac{n^2}{r^2})T &= 0, \\ T(\sqrt{\lambda}) &= 0 \end{aligned}$$

となり, この方程式の解は Bessel 関数と呼ばれ, n を決めるごとに, 自明でない解が存在する λ_n が無限個存在して, それを $\{\lambda_{n,m}\}$ と書くと, $\lambda_{n,m} \rightarrow \infty, m \rightarrow \infty$ となる.



したがって, この $\{\lambda_{n,m}\}_{m,n}$ は固有値となり, 固有関数は Bessel 関数と S^1 上の固有関数の積で書くことができる.

ここでもとめたものが固有関数のすべてであることは, 以下のようにして証明できる. f を固有値 λ に対する固有関数とすると, それは S^1 の固有値 μ_l に対応する固有関数 $G_l(\theta)$ を用いて,

$$f(t, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} a_l(t) G_l(\theta)$$

と書ける. ここで, G_l は $\|G_l\|_{L^2(S^1)} = 1$ と規格化しておく. したがって,

$$\int_{S^1} f(t, \theta) d\theta = \sum_{l=0}^{\infty} a_l^2(t)$$

が成り立つ. 一方,

$$a_l(t) = \int_{S^1} f(t, \theta) G_l(\theta) d\theta$$

であり, f が $\Delta_{\mathbb{R}^2}$ の固有関数であることから,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} = r^2 \left(-\lambda f - \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} \right) = -r^2 (\lambda a_l(t) G_l(\theta) + a_l''(t) G_l(\theta) + \frac{1}{r} a_l'(t) G_l(\theta))$$

が成り立つ. よって,

$$\begin{aligned} -\mu_l a_l(t) &= \int_{S^1} f(t, \theta) \Delta_{S^1} G_l(\theta) d\theta = \int_{S^1} \Delta_{S^1} f(t, \theta) G_l(\theta) d\theta \\ &= -r^2 \int_{S^1} (\lambda a_l(t) G_l(\theta) + a_l''(t) G_l(\theta) + \frac{1}{r} a_l'(t) G_l(\theta)) G_l(\theta) d\theta \\ &= -r^2 (\lambda a_l(t) + a_l''(t) + \frac{1}{r} a_l'(t)) \end{aligned}$$

が成り立つ. すなわち, a_l は

$$a_l'' + \frac{1}{r} a_l' + (\lambda - \frac{\mu_l}{r^2}) a_l = 0$$

の解である. したがって, a_l は Bessel 関数となり, 上で変数分離で求めたもので, すべての固有値・固有関数が尽くされていることがわかる.

2.2.2.2 \mathbb{R}^2 の矩形領域の Laplacian

ここでは \mathbb{R}^2 の辺の長さが a, b であるような矩形領域を考え, そこでの Laplacian の Dirichlet 問題を考える. D^2 の時と同様に

$$f(x, y) = X(x)Y(y)$$

と変数分離すると, X, Y はそれぞれ $[0, a], [0, b]$ 上の Laplacian の Dirichlet 問題の固有値問題の解であるので, 求める固有値と固有関数は,

$$\begin{aligned} \lambda &= \left(\frac{l^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} \right) \pi^2, \\ \phi(x, y) &= \sin\left(\frac{l\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right) \end{aligned}$$

となる. これですべての固有値・固有関数をつくしていることは, D^2 の場合と同様な計算で確かめることができる.

2.2.2.3 S^2 上の Laplacian

2次元球面 S^2 上の Laplacian を考えたいのだが, ここではまず, \mathbb{R}^3 の Laplacian を考えてみよう. \mathbb{R}^3 に,

$$x = r \sin \theta \cos \phi, \quad y = r \sin \theta \sin \phi, \quad z = r \cos \theta$$

という極座標を入れると,

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \Delta_{S^2}, \\ \Delta_{S^2} &= \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \end{aligned}$$

となる. この Δ_{S^2} が S^2 上の Laplacian である.

そこで, \mathbb{R}^3 上の関数 F が

$$F(x) = r^k G(\theta, \phi), \quad k \in \mathbb{Z}, k \geq 0$$

と書けていると仮定しよう. この時,

$$\Delta_{\mathbb{R}^3} F = r^{k-2} (\Delta_{S^2} G + k(k+1)G)$$

が成り立つ. したがって, F が調和関数であることと, G が S^2 上の Laplacian に関する固有値 $k(k+1)$ の固有関数であることは同値である.

そこで, このような関数 (球面調和関数) を求めてみる. いま, $z = \cos \theta$ と変数変換して, 変数分離形で解を求めてみると, ある非負整数 m と定数 α を持ちいて,

$$G = w(z) \sin(m\phi - \alpha)$$

と表され, w は

$$(1-z^2)w'' - 2zw' + (k(k+1) - \frac{m^2}{1-z^2})w = 0$$

の解となることがわかる. この方程式を Legendre の同伴方程式と呼ぶ.

Remark 2.2.7. もっとも小さい固有値 $\lambda_1 = 2$ に相当する固有関数は, x^1, x^2, x^3 であることが知られている.

2.2.3 熱方程式

ここでは, \mathbb{R}^n の有界領域, または閉多様体における熱方程式を考えよう. Ω 上の熱方程式で,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \Delta u, \\ u(0, x) &= u_0(x), \\ u(t, x) &= 0 \quad x \in \partial\Omega \end{aligned} \tag{2.2.1}$$

という2階の偏微分方程式の初期境界値問題を考える. この解を $u(t, x) = v(t)w(x)$ という変数分離形で解いてみよう. すると, ある定数 λ が存在して,

$$v'w = v\Delta w, \quad \frac{v'}{v} = \frac{\Delta w}{w} = \lambda$$

が成り立つ. したがって, v は

$$v' = \lambda v$$

をみたし, w は

$$\Delta w = \lambda w, \quad w(x) = 0, x \in \partial\Omega$$

を満たすことが必要となる. したがって,

$$\begin{aligned} v(t) &= v_0 e^{\lambda_n t}, \\ w(x) &= \phi_n(x) \end{aligned}$$

(ただし, λ_n は Δ の固有値であって, ϕ_n はその固有関数.) と書ける. したがって, すべての n に対して, $\lambda_n < 0$ であり, 解は

$$f(t, x) = \sum_{n=1} c_n e^{\lambda_n t} \phi_n(x)$$

と書けることが期待できる. 実際, この f は (2.2.1) の解であり, 熱方程式の解の一意性により, すべての解はこの形に書けることがわかる.

2.2.4 波動方程式

ここでは、 \mathbb{R}^n の有界領域における熱方程式を考えよう。 Ω 上の波動方程式で、

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \Delta u, \\ u(0, x) &= u_0(x), \\ u(t, x) &= 0 \quad x \in \partial\Omega\end{aligned}\tag{2.2.2}$$

という2階の偏微分方程式の初期境界値問題を考える。この解を $u(t, x) = v(t)w(x)$ という変数分離形で解くと、熱方程式の時と同様に、解は

$$u(t, x) = \sum_{k=1} (a_k \cos(\sqrt{\lambda_k} t) + b_k \sin(\sqrt{\lambda_k} t)) \phi_k(x)$$

と書ける。ここで、 λ_k は Ω における Laplacian の Dirichlet 固有値問題の固有値であり、 ϕ_k はその固有関数である。

このような形の解を定常波とよぶ。定常波は領域 Ω の固有振動の重ね合わせによって得られる解である。

2.2.4.1 Katz の問題

ここで、 \mathbb{R}^n の領域 Ω を膜と考え、その膜から発生する音を考えてみよう。この時、音は膜の定常的な振動から発生すると考えられ、その振動は波動方程式によって記述される。そこで、膜の振動の速度を $c > 0$ とすると、その波動方程式は

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= c^2 \Delta u, \\ u(t, x) &= 0 \quad x \in \partial\Omega\end{aligned}\tag{2.2.3}$$

となる。したがって、その定常波は、

$$u(t, x) = \sum_{k=1} (a_k \cos(c\sqrt{\lambda_k} t) + b_k \sin(\sqrt{c\lambda_k} t)) \phi_k(x)$$

となるので、 Ω の固有値 (ただし Dirichlet 境界条件を与える) を λ_k とすると、この膜から発生する音の振動数は、

$$c\sqrt{\lambda_k}, \quad k \in \mathbb{N}$$

となることがわかる。この固有値の分布が音の音色を決めていることがわかる。実際、弦の振動は、

$$\lambda_k = k^2$$

となり、各固有値が整数となり、一方、2次元円盤、矩形領域などでは、固有値の分布は整数比にはなっていない。

逆に、「音色を聞くことによって、膜の形がわかるか？」というのが Katz の問題と呼ばれる問題である。実際、固有値が同じであるが、その形が違う領域 (多様体) の例が数多く知られている。

演習問題

Exercise 2.2.1. Theorem 2.2.1 の 1, 2, 4 を証明しなさい。

Exercise 2.2.2. Legendre 多項式系 $\{x_n\}$ が $L^2(-1, 1)$ での直交関数系となることを示し, x_n は $(-1, 1)$ で相異なる n 個の実数解を持つことを示しなさい.

Exercise 2.2.3. \mathbb{R}^2 上の Laplacian は極座標では

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

と書けることを示せ.

第3章 Fourier 変換

3.1 \mathbb{R} 上の Fourier 変換

3.1.1 考察

S^1 上の Fourier 変換とは, \mathbb{R} 上の周期 2π を持つ関数に対する Laplacian の固有値による固有関数展開であった. それは応用上は, その関数の「周波数」の分布を調べる方法であった. 一般に $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ を考えた時, それはもはや周期 2π を持つわけではない. しかしながら, そのような関数に対する「周波数」の分布を知りたいことがある.

ここで, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ が周期 $2\pi\ell$ を持つと仮定すると, それは,

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \hat{f}(n) e^{nx\sqrt{-1}/\ell}$$

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi\ell} \int_{-\ell\pi}^{\ell\pi} f(x) e^{-nx\sqrt{-1}/\ell} dx$$

と展開される. そこで, 形式的に

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-\xi x\sqrt{-1}} dx \quad (3.1.1)$$

とおくと,

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\ell}} \hat{f}\left(\frac{n}{\ell}\right)$$

が成り立つ. これを最初の式に代入すれば,

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \hat{f}\left(\frac{n}{\ell}\right) e^{nx\sqrt{-1}/\ell} \frac{1}{\ell}$$

が成り立つ. そこで, $\ell \rightarrow \infty$ とすれば, 形式的には

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) e^{\xi x\sqrt{-1}} d\xi \quad (3.1.2)$$

となることが期待できる.

そこで, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ に対して, $\hat{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ を対応させる (3.1.1) を f の Fourier 変換と呼び, 逆に \hat{f} に対して f を対応させる (3.1.2) を Fourier 逆変換または共役 Fourier 変換と呼び,

$$\mathcal{F}: f \mapsto \hat{f}, \quad \mathcal{F}^* = \mathcal{F}^{-1}: \hat{f} \mapsto f$$

と書くことがある.

Remark 3.1.1. ここでは $\mathcal{F}, \mathcal{F}^{-1}$ が互いに逆変換であるかの用語を使っているが, 実際に逆変換であることは, 然るべき条件の元で示される.

3.1.2 例と簡単な性質

Example 3.1.2. 区間 $[-\ell, \ell]$ の定義関数

$$\chi(x) = \chi_{[-\ell, \ell]}(x) = \begin{cases} 1 & x \in [-\ell, \ell], \\ 0 & x \notin [-\ell, \ell] \end{cases}$$

の Fourier 変換を求めると,

$$\widehat{\chi}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\ell}^{\ell} e^{-\xi x \sqrt{-1}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-\xi \ell \sqrt{-1}} - e^{\xi \ell \sqrt{-1}}}{-\xi \sqrt{-1}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin \xi \ell}{\xi}$$

となる.

Example 3.1.3. $f(x) = e^{\alpha|x|}$ の Fourier 変換は,

$$\begin{aligned} \sqrt{2\pi} \widehat{f}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-\alpha|x|} e^{-\xi x \sqrt{-1}} dx = \int_0^{\infty} e^{-\alpha x - \xi x \sqrt{-1}} dx + \int_{-\infty}^0 e^{-\alpha x - \xi x \sqrt{-1}} dx \\ &= \frac{1}{\alpha - \xi \sqrt{-1}} + \frac{1}{\alpha + \xi \sqrt{-1}} = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \xi^2}. \end{aligned}$$

である. したがって,

$$\widehat{e^{\alpha|x|}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \xi^2}.$$

Example 3.1.4. $f(x) = e^{-\alpha x^2}$, $\alpha > 0$ の Fourier 変換は,

$$\begin{aligned} \sqrt{2\pi} \widehat{f}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-\alpha x^2} e^{-\xi x \sqrt{-1}} dx = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2 - \xi t \sqrt{-1} / \sqrt{\alpha}} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \int_{\mathbb{R}} e^{-(t + \xi \sqrt{-1} / 2\sqrt{\alpha})^2} e^{-\xi^2 / 4\alpha} dt = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} e^{-\xi^2 / 4\alpha} \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} dt \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\xi^2 / 4\alpha} \end{aligned}$$

となる. よって,

$$\widehat{e^{-\alpha x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}} e^{-\xi^2 / 4\alpha}.$$

特に, $\alpha = 1/2$ とすれば,

$$\widehat{e^{-x^2/2}} = e^{-\xi^2/2}$$

となり, $e^{-x^2/2}$ は \mathcal{F} によって不変である.

Theorem 3.1.5. 可測関数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ が

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx < \infty$$

を満たせば, \widehat{f} は有界な連続関数となり, $\widehat{f}(\pm\infty) = 0$ である.

Proof.

$$|\sqrt{2\pi} \widehat{f}(\xi)| \leq \int_{\mathbb{R}} |f(x) e^{-x\xi\sqrt{-1}}| dx = \int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx$$

であるので, \widehat{f} は有界となる. さらに,

$$|\widehat{f}(x+h)| \leq \int_{\mathbb{R}} |f(x) e^{-x\xi\sqrt{-1}} e^{-h\xi\sqrt{-1}}| dx = \int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx$$

より, $\widehat{f}(x+h)$ は $|h| < \delta$ で有界となる. したがって, Lebesgue の有界収束定理より, $h \rightarrow 0$ の時, $\widehat{f}(x+h) \rightarrow \widehat{f}(x)$ が成り立ち, 連続となる.

次に, $\widehat{f}(\pm\infty) = 0$ を示す. 今, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある α, β が存在して,

$$\int_{-\infty}^{\alpha} |f(x)| dx < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \int_{\beta}^{\infty} |f(x)| dx < \frac{\varepsilon}{3}$$

が成り立つ. また, Riemann-Lebesgue の定理を利用すると, $|\xi|$ を十分大きくとれば,

$$\left| \int_{\alpha}^{\beta} f(x) e^{-\xi x \sqrt{-1}} dx \right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

とできる. したがって, $\widehat{f}(\pm\infty) = 0$ が成り立つ. □

3.1.3 急減少関数

Definition 3.1.6. 関数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ が急減少関数であるとは, 次の2つの条件を満たすことである.

1. f は \mathbb{R} 上でなめらか.
2. 任意の自然数 k, l に対して,

$$|x^l f^{(k)}(x)| \rightarrow 0, \quad |x| \rightarrow \infty$$

が成り立つ.

急減少関数全体の空間を $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ と書く.

明らかに $C_0^\infty(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$ が成り立つ. さらに, 次の補題は明らかである.

Lemma 3.1.7. $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ に対して, 次の性質が成り立つ.

1. $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ならば, $\alpha f + \beta g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.
2. $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ならば $f' \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.
3. $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ で, p が多項式ならば, $pf \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

次の定理は, $L^2(\mathbb{R})$ の中で $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ が稠密であることを示している.

Theorem 3.1.8. $f \in L^2(\mathbb{R})$ とする. この時, ある $\{\phi_n\} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$ が存在して,

$$\|f - \phi_n\|_{L^2} \rightarrow 0$$

が成り立つ.

3.1.4 急減少関数での Fourier 変換

急減少関数のクラスの中では, Fourier 変換は非常に良い性質を示す.

3.1.4.1 反転公式と Parseval の等式

はじめに, 次を示しておこう.

Theorem 3.1.9. $\mathcal{F}, \mathcal{F}^*$ は $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ から $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ への線形写像であって, $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ に対して, $\mathcal{F}\mathcal{F}^*(f) = \mathcal{F}^*\mathcal{F}(f) = f$ が成り立つ.

この定理を順を追って示そう.

Lemma 3.1.10. $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ に対して,

$$\frac{d^k}{dy^k} \widehat{f}(y) = (-\sqrt{-1}x)^k \widehat{f}(x)$$

が成り立つ.

Proof. 定義により,

$$\widehat{f}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{\sqrt{-1}yx} dx$$

である. ここで,

$$\left| \frac{e^{(x+h)y\sqrt{-1}} - e^{xy\sqrt{-1}}}{h} \right| \leq |x|,$$

$$\int_{\mathbb{R}} |x| |f(y)| dx < \infty$$

を利用すると, 積分と微分を交換することができる. したがって,

$$\frac{d}{dy} \widehat{f}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \frac{d}{dy} f(x) e^{\sqrt{-1}yx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} (-x\sqrt{-1}) f(x) e^{\sqrt{-1}yx} dx$$

が成り立つ. したがって, $k = 1$ の場合の証明ができた. これを繰り返し用いれば良い. \square

同様に, 次が成り立つ.

Lemma 3.1.11. $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ に対して,

$$(\sqrt{-1}y)^k \widehat{f}(y) = \widehat{\frac{d^k}{dx^k} f}$$

が成り立つ.

Proof. 定義により,

$$\widehat{f}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{\sqrt{-1}yx} dx$$

であるが, 右辺を部分積分すれば,

$$\sqrt{2\pi} \widehat{f}(y) = \left[\frac{1}{-\sqrt{-1}y} f(x) e^{yx\sqrt{-1}} \right]_{\mathbb{R}} + \frac{1}{\sqrt{-1}y} \int_{\mathbb{R}} f'(x) e^{\sqrt{-1}yx} dx$$

が成り立つ. すなわち,

$$(\sqrt{-1}y) \widehat{f}(y) = \widehat{\frac{d}{dx} f}$$

が成り立つ. これを繰り返し用いればよい. \square

Theorem 3.1.9 の前半の証明. これらの Lemma によって,

$$(\sqrt{-1}y)^l \frac{d^k}{dy^k} \widehat{f}(y) = \mathcal{F} \left[\frac{d^l}{dx^l} ((\sqrt{-1}x)^k f) \right]$$

が成り立つことがわかる. したがって, $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ならば, $\phi_{l,k} = \frac{d^l}{dx^l} ((\sqrt{-1}x)^k f) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ である. したがって,

$$\left| (\sqrt{-1}y)^l \frac{d^k}{dy^k} \widehat{f}(y) \right| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} |\phi_{l,k}(x)| dx < \infty$$

が成り立ち, $y \rightarrow \pm\infty$ の時,

$$(\sqrt{-1}y)^l \frac{d^k}{dy^k} \hat{f}(y) \rightarrow 0$$

が成り立つ. よって $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ である. 逆の $\tilde{f} \in \mathcal{F}^*(f)$ についても同様に証明できる. \square

Theorem 3.1.9 の前半の証明. まず, $w = \mathcal{F}^* \mathcal{F}(f)$ とおき,

$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(y) e^{\sqrt{-1}xy} dy$$

と表しておく. ここで, $\varepsilon > 0$ に対して,

$$w_\varepsilon(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(y) e^{\sqrt{-1}xy} e^{-\varepsilon|y|} dy$$

とおくと,

$$|e^{\sqrt{-1}xy} e^{-\varepsilon|y|}| \leq 1,$$

$$\int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(y)| dy < \infty$$

より, $\varepsilon \rightarrow 0$ の時,

$$w_\varepsilon(x) \rightarrow w(x)$$

が成り立つ. したがって, Fubini の定理を用いて,

$$2\pi w_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\varepsilon|y|+xy\sqrt{-1}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\xi y\sqrt{-1}} f(\xi) d\xi dy = \int_{\mathbb{R}} f(\xi) \int_{\mathbb{R}} e^{-\varepsilon|y|+y(\xi-x)\sqrt{-1}} dy d\xi$$

が成り立つ. ここで,

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\varepsilon|y|+y(\xi-x)\sqrt{-1}} dy = \frac{2\varepsilon}{\varepsilon^2 + (\xi-x)^2}$$

を用いれば,

$$w_\varepsilon(x) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + (\xi-x)^2} f(\xi) d\xi = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+t^2} f(x+\varepsilon t) dt$$

となる. ここで,

$$\left| \frac{1}{1+t^2} f(x+\varepsilon t) \right| \leq \frac{M}{1+t^2}, \quad \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+t^2} dt = \pi$$

であることを用いると,

$$w_\varepsilon(x) \rightarrow \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+t^2} f(x) dt = f(x)$$

が成り立つ. したがって, $f(x) = w(x)$ である. \square

Proposition 3.1.12. $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ に対して,

$$f(x) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} K_\lambda(x-y) f(y) dy$$

が成り立つ. ここで,

$$K_\lambda(t) = \frac{1}{\pi} \frac{\sin \lambda t}{t}$$

である.

Proof. 反転公式 $\mathcal{F}^* \hat{f} = f$ は

$$\sqrt{2\pi} f(x) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{-\lambda}^{\lambda} e^{xy\sqrt{-1}} \hat{f}(y) dy$$

と書くことができる。そこで右辺を

$$\int_{-\lambda}^{\lambda} e^{xy\sqrt{-1}} dy \int_{\mathbb{R}} e^{-y\xi\sqrt{-1}} f(\xi) d\xi = \int_{\mathbb{R}} \int_{-\lambda}^{\lambda} e^{(x-y)\sqrt{-1}} dy f(\xi) d\xi$$

と書き直せば,

$$\int_{-\lambda}^{\lambda} e^{(x-\xi)\sqrt{-1}} dy = \frac{e^{\lambda(x-\xi)\sqrt{-1}} - e^{-\lambda(x-\xi)\sqrt{-1}}}{(x-\xi)\sqrt{-1}} = 2 \frac{\sin(\lambda(x-\xi))}{x-\xi}$$

となり, 求める結果を得る. □

この K_λ を Dirichlet kernel と呼ぶ.

Theorem 3.1.13 (Parseval の等式). $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ に対して,

$$\begin{aligned} \langle f, g \rangle_{L^2} &= \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle_{L^2}, \\ \|f\|_{L^2} &= \|\hat{f}\|_{L^2} \end{aligned}$$

が成り立つ.

Proof.

$$\begin{aligned} \langle f, g \rangle_{L^2} &= \langle \mathcal{F}^*(f), g \rangle_{L^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(y) e^{xy\sqrt{-1}} dy \bar{g}(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(y) \int_{\mathbb{R}} g(x) e^{xy\sqrt{-1}} dx dy \\ &= \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle_{L^2}. \end{aligned}$$

□

3.1.4.2 Convolution

次に急減少関数での convolution を考えよう.

Definition 3.1.14. $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ に対して, $f * g$ を

$$(f * g)(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y) dy$$

で定義する.

Proposition 3.1.15. $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ならば $f * g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ が成り立つ.

Proof. $h = f * g$ とおき, $x^l h(x)$ が有界であることを示す.

$$x^l h(x) = \int_{\mathbb{R}} ((x-y) + y)^l f(x-y)g(y) dy$$

を 2 項展開すれば良い. また,

$$(f * g)' = f' * g, \quad (f * g) = (g * f)$$

を用いて, h が C^∞ であることは容易に示せる. □

この時, S^1 上の Fourier 級数の時と全く同様な計算により, 次が成り立つ.

Theorem 3.1.16. $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ならば,

$$\mathcal{F}(f * g) = \widehat{f * g} = \sqrt{2\pi} \widehat{f} \widehat{g}$$

が成り立つ.

S^1 の Fourier 変換の時と同様に, $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ に対して, $*$ による積が定義されたことになり, Fourier 変換 \mathcal{F} は

$$\mathcal{F}: (\mathcal{S}(\mathbb{R}), +, *) \longrightarrow (\mathcal{S}(\mathbb{R}), +, \cdot)$$

の間の可換環としての同形を与え, Parseval の等式により L^2 -norm を保っていることがわかる.

3.1.5 超関数

急減少関数のクラスは実際には極めて狭いものであり, 応用上は急減少関数に属さない関数を扱うことの方が多い. そこで, 一般の関数よりも広い概念である, 超関数を簡単に見ておこう.

Definition 3.1.17. \mathbb{R} 上の台が有界な滑らかな関数全体 $C_0^\infty(\mathbb{R})$ を $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ と書く.

線形写像 $\phi: \mathcal{D}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ を \mathbb{R} 上の線形汎関数と呼び, それ全体の集合を $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ で表す.

すなわち, $\phi \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ は, 任意の $\phi, \psi \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, $a, b \in \mathbb{R}$ に対して,

$$\phi(af + bg) = a\phi(f) + b\phi(g)$$

を満たす写像のことである. 明らかに, $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ は線形空間をなしている.

Definition 3.1.18. $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ の中で, 連続なもの, すなわち, $f_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ が $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ に収束するならば, $\phi(f_n) \rightarrow \phi(f)$ が成り立つ線形汎関数を超関数と呼ぶ. 以後, $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ (同じ記号) で超関数全体を表す. また, $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ に対して,

$$\langle u, \phi \rangle = u(\phi)$$

という記号を使うこともある.

Example 3.1.19. $u: \mathcal{D}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ を

$$\langle u, \phi \rangle = u(\phi) = \phi(0), \quad \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$$

と定める. いま, $\phi_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ が $\phi_n \rightarrow 0$ を満たすならば, $\phi_n(0) \rightarrow 0$ であるので, u は連続となり, $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ となる. この超関数を Dirac の Delta 関数と呼び, δ で表す. また, $u(\phi) = \phi(a)$ を満たす超関数を δ_a で表す. すなわち,

$$\langle \delta_a, \phi \rangle = \phi(a).$$

Example 3.1.20. \mathbb{R} 上の関数 f が区分的に連続, かつ局所可積分であれば,

$$u(\phi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\phi(x) dx$$

によって, 超関数を定めることができる. (ここで, $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ なので, 積分が実際に定まることに注意.) 実際, これが連続線形汎関数となり, この超関数を u_f または f と書く.

例えば, 値 1 をとる関数に対する超関数は

$$\langle 1, \phi \rangle = 1(\phi) = \int_{\mathbb{R}} \phi(x) dx$$

で決定される.

$$Y(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0, \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

を Heaviside 関数と呼び, その超関数は

$$\langle Y, \phi \rangle = Y(\phi) = \int_0^{\infty} \phi(x) dx$$

となる.

Remark 3.1.21. H を \mathbb{C} 上の Hilbert space とすると, H 上の有界線形汎関数 $F: H \rightarrow \mathbb{C}$ に対して, ある ϕ_F が存在して, $F(\psi) = \langle \phi_F, \psi \rangle$, $\|F\| = \|\phi_F\|$ が成り立つ. これは Riesz の表現定理と呼ばれるものである. もし, $H = L^2$ とすると, H 上の有界線形汎関数の空間 H^* は L^2 に一致するので, そのような意味で超関数は通常関数の一般化になっている.

超関数に対しては, 次の演算が定義される.

線形演算 $u, v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ ならば, $u + v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$:

$$\langle u + v, \phi \rangle = \langle u, \phi \rangle + \langle v, \phi \rangle.$$

滑らかな関数との積 $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, $a \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ ならば $au \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$:

$$\langle au, \phi \rangle = \langle u, a\phi \rangle.$$

微分 $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ に対して, $u' \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ を次で定める:

$$\langle u', \phi \rangle = -\langle u, \phi' \rangle.$$

積 $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, $v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ に対して, $uv \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ を

$$\langle uv, \phi \rangle = \langle u, \phi \rangle \langle v, \phi \rangle$$

で定める.

Example 3.1.22. Dirac's delta δ の微分 δ' は

$$\langle \delta', \phi \rangle = -\phi'(0)$$

となる.

Example 3.1.23. $f \in C^1(\mathbb{R})$ の定める超関数 u_f の微分は $u_{f'}$ となる.

Example 3.1.24. Heaviside の Y 関数 Y に対して,

$$Y' = \delta$$

が成り立つ.

Definition 3.1.25. \mathbb{R} 上の急減少関数 $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ 上の線形汎関数

$$\phi: \mathcal{S}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$$

を緩増加な超関数と呼び、それ全体の集合を $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ と書く。

すると、 $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ は次の性質を持つ。

Proposition 3.1.26. $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ は次の性質を持つ。

1. $\mathcal{S}'(\mathbb{R}) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ (線形部分空間)。
2. $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ ならば $u' \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ 。
3. $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, $P(x)$ が x についての多項式であれば、 $P(x)u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ が成り立つ。

この命題の証明は演習問題とする。

3.1.6 超関数の Fourier 変換

ここまでで、急減少関数のクラス $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ に対して Fourier 変換を定義した。そこで、 $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ の “dual” である $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ に対して Fourier 変換を定義しよう。

Proposition 3.1.27. $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ とすると、

$$\langle v, \phi \rangle = \langle u, \mathcal{F}\phi \rangle, \quad \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$$

で定義される汎関数 v は $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ に属する。

Proof. $\widehat{\phi} = \mathcal{F}\phi$ と書こう。いま $\langle u, \widehat{\phi} \rangle$ は $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, $\widehat{\phi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ であるので、well-defined である。したがって、 $v: \mathcal{S}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}$ は汎関数になっている。

いま、 $\{\phi_n\}$ を $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ の中で 0 に収束する列と仮定しよう。その時、 $\{\widehat{\phi}_n\}$ は $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ の中で 0 に収束するので、したがって、 $\langle v, \phi_n \rangle \rightarrow 0$ が成り立ち、 v は連続な線形汎関数となる。すなわち、 $v \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ が成り立つ。 \square

Definition 3.1.28. $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ に対して、その Fourier 変換 $\mathcal{F}u$ を

$$\langle \mathcal{F}u, \phi \rangle = \langle u, \mathcal{F}\phi \rangle, \quad \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$$

で定める。同様に、 \mathcal{F} の共役 Fourier 変換 (逆 Fourier 変換) \mathcal{F}^* を

$$\langle \mathcal{F}^*u, \phi \rangle = \langle u, \mathcal{F}^*\phi \rangle, \quad \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$$

で定義する。

Example 3.1.29. $u = \delta \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ の Fourier 変換を計算しよう。定義により、 $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ に対して、

$$\langle \widehat{\delta}, \phi \rangle = \langle \delta, \widehat{\phi} \rangle = \widehat{\phi}(0)$$

である。一方、

$$\widehat{\phi}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{x \cdot 0 \sqrt{-1}} \phi(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \phi(x) dx$$

となるので、

$$\langle \widehat{\delta}, \phi \rangle = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \phi \right\rangle$$

が成り立つ。すなわち,

$$\widehat{\delta} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

である。

Example 3.1.30. 定数関数 $u = 1 \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ の Fourier 変換を求める。定義により, $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ に対して, Fourier 反転公式を用いて

$$\begin{aligned} \langle \widehat{1}, \phi \rangle &= \langle 1, \widehat{\phi} \rangle = \int_{\mathbb{R}} 1 \cdot \widehat{\phi}(x) dx = \sqrt{2\pi} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{yx\sqrt{-1}} \widehat{\phi}(x) dx \right) \Big|_{y=0} \\ &= \sqrt{2\pi} \phi(0) = \langle \sqrt{2\pi} \delta, \phi \rangle \end{aligned}$$

が成り立つ。したがって,

$$\widehat{1} = \sqrt{2\pi} \delta$$

が成り立つ。

Theorem 3.1.31 (反転公式). $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ に対して,

$$\mathcal{F}^* \mathcal{F} u = u,$$

$$\mathcal{F} \mathcal{F}^* u = u$$

が成り立つ。

Proof. $v = \mathcal{F}^* \mathcal{F} u$ と書けば, 任意の $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ に対して,

$$\langle v, \phi \rangle = \langle \mathcal{F}^* \mathcal{F} u, \phi \rangle = \langle \mathcal{F} u, \mathcal{F}^* \phi \rangle = \langle u, \mathcal{F} \mathcal{F}^* \phi \rangle = \langle u, \phi \rangle$$

が成り立つ。したがって $\mathcal{F}^* \mathcal{F} u = u$ が成り立つ。 □

Example 3.1.32. $a \in \mathbb{R}$, $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ に対して,

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}^* \delta_a, \phi \rangle &= \langle \delta_a, \mathcal{F}^* \phi \rangle = (\mathcal{F}^* \phi)(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{\xi a \sqrt{-1}} \phi(\xi) d\xi \\ &= \left\langle \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \phi \right\rangle \end{aligned}$$

が成り立つ。したがって, $\mathcal{F}^* \delta_a = (\sqrt{2\pi})^{-1} e^{xa\sqrt{-1}}$ である。よって, 反転公式を利用すると,

$$\delta_a = \mathcal{F} \mathcal{F}^* \delta_a = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F}(e^{-xa\sqrt{-1}})$$

が成り立つ。したがって,

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} c_n e^{nt\sqrt{-1}}$$

とおくと,

$$\mathcal{F}(x)(\xi) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} c_n \delta_{-n}(\xi)$$

が成り立つ。 S^1 上の関数を周期拡張したものに Fourier 変換を施すと, 周期に相当する部分に Delta 関数によるピークがあらわれていることがわかる。

Theorem 3.1.33. 任意の $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ に対して,

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left(\frac{du}{dx}\right) &= \sqrt{-1}y\mathcal{F}u, & \mathcal{F}(xu) &= \sqrt{-1}\frac{d}{dy}\mathcal{F}u, \\ \mathcal{F}^*\left(\frac{du}{dx}\right) &= -\sqrt{-1}y\mathcal{F}^*u, & \mathcal{F}^*(xu) &= -\sqrt{-1}\frac{d}{dy}\mathcal{F}^*u\end{aligned}$$

が成り立つ.

Proof. $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ に対して,

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{F}\left(\frac{du}{dx}\right), \phi \rangle &= \left\langle \frac{du}{dx}, \mathcal{F}\phi \right\rangle = -\left\langle u, \frac{d}{dx}\mathcal{F}\phi \right\rangle \\ &= -\langle u, \mathcal{F}(-\sqrt{-1}y\phi) \rangle = \langle u, \mathcal{F}(\sqrt{-1}y\phi) \rangle = \langle \mathcal{F}u, \sqrt{-1}y\phi \rangle \\ &= \langle \sqrt{-1}y\mathcal{F}u, \phi \rangle\end{aligned}$$

が成り立つ. したがって,

$$\mathcal{F}\left(\frac{du}{dx}\right) = \sqrt{-1}y\mathcal{F}u$$

が成り立つ. □

3.1.7 超関数の convolution と Fourier 変換

Definition 3.1.34. $f, g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ に対して, その tensor product $f \otimes g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ を以下のように定義する. 任意の $\phi, \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ に対して,

$$T(\phi(x)\psi(y)) = f(\phi)g(\psi)$$

を満たすような $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ が $f, g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ に対して, ただ一つ定まることがわかる. この T を $f \otimes g$ と書く.

これは, 任意の $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ に対して,

$$(f_x \otimes g_y)(\phi(x, y)) = f_x(g_y(\phi(x, y))) = g_y(f_x(\phi(x, y)))$$

を満たすような超関数と考えても良い. いま, $f, g \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ であれば, $f * g \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ であることは容易に確かめることができる.

Definition 3.1.35. 任意の $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ に対して, $(f_x \otimes g_y)(\phi(x + y))$ を対応させると, これは一つの超関数を定めることがわかる. この超関数を $f * g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ と書き, f と g の convolution と呼ぶ.

Proposition 3.1.36. 任意の $f, g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ に対して,

$$u_f * u_g = u_{f * g}$$

が成り立つ.

Proof. $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ に対して,

$$\begin{aligned}(u_f * u_g)(\phi) &= (u_f \otimes u_g)(\phi(x + y)) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x)\phi(x + y)g(y) dx dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x)g(t - x)\phi(t) dt dx = \int_{\mathbb{R}} (f * g)(t)\phi(t) dt \\ &= (u_{f * g})(\phi).\end{aligned}$$

□

Proposition 3.1.37. 任意の $f, g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ に対して,

1. $\delta * f = f * \delta = f$,
2. $D^p(f * g) = D^p f * g = f * D^p g$

が成り立つ.

Proof. 1. $(\delta_x * f_y)(\phi(x+y)) = f_y(\delta_x(\phi(x+y))) = f_y(\phi(y))$ より, $\delta * f = f$. また, $f * g = g * f$ は定義より明らか.

2. $D^p(f * g)(\phi(x+y)) = (f * g)(D^p \phi(x+y)) = (f(g(D^p(\phi(x+y)))) = f(D^p g(\phi(x+y))) = (f * D^p g)(\phi(x+y))$.

□

さらに, 次が成り立つ.

Theorem 3.1.38. $f, g \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ ならば,

$$\mathcal{F}(f * g) = \sqrt{2\pi} \mathcal{F}(f) \mathcal{F}(g).$$

Proof. いま, $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ に対して, その Fourier 変換 $\mathcal{F}(f)$ は $\mathcal{F}(f)(y) = f \cdot e^{-xy}$ とすることに他ならない. したがって,

$$\mathcal{F}(f * g)_x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (f * g)_x e^{-xy\sqrt{-1}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (f_\xi \otimes g_\eta) e^{-(\xi+\eta)y\sqrt{-1}} = \sqrt{2\pi} f_\xi e^{-\xi y\sqrt{-1}} g_\eta e^{-\eta y\sqrt{-1}} = \sqrt{2\pi} \mathcal{F}(f) \mathcal{F}(g)$$

が成り立つ. □

演習問題

Exercise 3.1.1. δ を Dirac's delta とする.

$$\langle \delta', \phi \rangle = -\phi'(0)$$

を証明せよ.

Exercise 3.1.2. $(u_f)' = u_{f'}$ と $Y' = \delta$ を証明せよ.

Exercise 3.1.3. Proposition 3.1.26 を証明せよ.

3.2 高次元や一般の Fourier 変換

3.2.1 \mathbb{R}^n における Fourier 変換

ここまでで見てきた $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ などは, 容易に \mathbb{R}^n に拡張できる. 例えば, $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ が $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ に属する, すなわち, \mathbb{R}^n 上の急減少関数であるとは, 任意の multi-index α と任意の正の整数 m に対して,

$$|x|^m |D_\alpha f(x)| \rightarrow 0, \quad |x| \rightarrow \infty$$

が成り立つことと定義すれば良い.

Definition 3.2.1. $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ に対して, その Fourier 変換 $\mathcal{F}f = \widehat{f}$ を

$$(\mathcal{F}f)(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-\xi x \sqrt{-1}} dx$$

で定義する. ここで, $\xi x = \sum \xi_i x_i$ である. 同様に, $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ に対して, その 逆 Fourier 変換または, 共役 Fourier 変換 $\mathcal{F}^* f$ を

$$(\mathcal{F}^* f)(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(\xi) e^{\xi x \sqrt{-1}} d\xi$$

で定義する.

このように定義すると, \mathbb{R} の Fourier 変換と同様な性質がすべて成り立つ.

Theorem 3.2.2. $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ における Fourier 変換は, 以下の性質を持つ.

1. (Parseval の等式)

$$\begin{aligned} \|\mathcal{F}\phi\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} &= \|\phi\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}, \\ \|\mathcal{F}^*\psi\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} &= \|\psi\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}. \end{aligned}$$

2. (反転公式)

$$\mathcal{F}^* \mathcal{F}\phi = \phi, \quad \mathcal{F} \mathcal{F}^*\psi = \psi$$

が成り立つ.

3. 任意の multi-index α に対して, 次が成り立つ.

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(D^\alpha \phi)(\xi) &= (\sqrt{-1})^{|\alpha|} \xi^\alpha \mathcal{F}(\phi)(\xi), \\ \mathcal{F}(x^\alpha \phi(x))(\xi) &= (\sqrt{-1})^{|\alpha|} D^\alpha \mathcal{F}(\phi)(\xi), \\ \mathcal{F}^*(D^\alpha \psi)(x) &= (-\sqrt{-1})^{|\alpha|} x^\alpha \mathcal{F}^*(\psi)(x), \\ \mathcal{F}^*(\xi^\alpha \phi(x))(x) &= (-\sqrt{-1})^{|\alpha|} D^\alpha \mathcal{F}^*(\phi)(x). \end{aligned}$$

4. (Convolution) $(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y) dy$ で convolution を定義すると,

$$\mathcal{F}(f * g) = (\sqrt{2\pi})^n \mathcal{F}(f)\mathcal{F}(g)$$

が成り立つ.

1変数の場合と同様に, 超関数の空間 $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ が定義でき, Fourier 変換に対して同様の性質を持つことは容易に確かめることができる.

3.2.2 Fourier 変換とは何か

ここまでで定義した Fourier 変換の性質をもう一度整理しておこう. Fourier 変換と共役 Fourier 変換とは, 以下の性質を持つものとして考えることができる.

定義 M, N をそれぞれ位相空間として, M, N それぞれの上の適当な条件を満たす体 \mathbb{K} に値をとる関数全体を $\mathcal{C}(M), \mathcal{C}(N)$ とおく. この時, 線形写像

$$\begin{aligned} \mathcal{F}: \mathcal{C}(M) &\longrightarrow \mathcal{C}(N), \\ \mathcal{F}^*: \mathcal{C}(N) &\longrightarrow \mathcal{C}(M) \end{aligned}$$

が存在して, 反転公式

$$\mathcal{F}\mathcal{F}^* = 1, \quad \mathcal{F}^*\mathcal{F} = 1$$

を満たす.

等長性 $\mathcal{C}(M), \mathcal{C}(N)$ 上に適当な norm $\|\cdot\|_M, \|\cdot\|_N$ が定まり, この norm によって Banach space が決まる時,

$$\|\mathcal{F}u\|_N = \|u\|_M, \quad \|\mathcal{F}^*v\|_M = \|v\|_N$$

を満たす.

合成積 $f, g \in \mathcal{C}(M)$ に対して, $f * g \in \mathcal{C}(M)$ が定義できて,

$$\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}(f)\mathcal{F}(g)$$

を満たす.

Example 3.2.3. S^1 上の Fourier 展開は $M = S^1, N = \mathbb{Z}$ ととり, $\mathcal{C}(\mathbb{Z})$ に対して, ℓ^2 -norm を考えた Fourier 変換に他ならない.

これらの性質を満たすような変換 $\mathcal{F}, \mathcal{F}^*$ を構成できるための条件を考えてみよう.

Definition 3.2.4. G を位相群, V を体 \mathbb{K} 上のベクトル空間とし, V には適当な位相が入っているものとする. この時,

$$\sigma: G \longrightarrow \text{GL}(V)$$

が G の表現であるとは, σ が群 G から群 $\text{GL}(V)$ への準同型になっていることである. さらに, 表現 σ に対して, 写像

$$G \times M \longrightarrow M, \quad (g, x) \mapsto \sigma(g)(x)$$

が連続となっている時, 連続表現と呼ぶ. $k = \dim_{\mathbb{K}} V$ の時, σ は k 次元表現と呼ばれる. また, 表現 $\sigma: G \longrightarrow \text{GL}(V)$ に対して,

$$\chi_{\sigma}: G \longrightarrow \mathbb{K}^{\times}, \quad \chi_{\sigma}(g) = \text{tr}\sigma(g)$$

を指標と呼ぶ.

$\sigma: G \longrightarrow \text{GL}(V)$ を G の V 上への連続表現とする. この時, $\{0\}$ と V 以外に G 不変な V の閉部分空間が存在しない時, σ は既約であるという. また, 任意の $g \in G$ に対して,

$$\|\sigma(g)x\| = \|x\|$$

を満たす時, σ は G のユニタリ表現であるという.

Definition 3.2.5. M を位相空間, G を位相群とする. G の M への作用とは,

$$g \in G \mapsto g \cdot x \in M, \quad x \in M$$

であり,

$$h \cdot (g \cdot x) = (hg) \cdot x$$

を満たすもののことである. 任意の $x, y \in M$ に対して, ある $g \in G$ が存在して, $g \cdot x = y$ を満たす時, この作用は推移的であると呼ばれる.

S^1, \mathbb{R}^n にこのような群の作用があると考えると, $\mathcal{C}(M)$ 上の convolution を以下のように定めれば良いことがわかる. すなわち, 群 G の M への推移的な作用が存在すると仮定し, さらに, G 上には不変な測度 dg が存在すると仮定する. また, G の M への作用は固定点を持たない, すなわち, 任意の x に対して, $g \cdot x = x$ ならば $g = e$ (単位元)であると仮定する. この時, 任意の $x \in M$ に対して, $g \cdot x$ は M 上のすべての点を一度だけ動く. このような仮定の下で $f, g \in \mathcal{C}(M)$ に対して,

$$(f * g)(x) = \int_G f(g^{-1} \cdot x)g(x) dg$$

として convolution を定義する. これは, S^1, \mathbb{R}^n 上の convolution の定義を一般化したものになっていることは明らかである.

Example 3.2.6. $G = S^1 = U(1), M = S^1$ とする. この時, $t \in S^1$ に対して,

$$S^1 \ni t \mapsto \chi_n = e^{nt\sqrt{-1}} \in \mathbb{C}^\times$$

で $\chi_n: S^1 \rightarrow \mathbb{C}^\times$ を定めよう. この時, χ_n は $S^1 = U(1)$ の 1 次元ユニタリ表現となる. これは 1 次元表現であるので, 明らかに既約である.

一方, 表現論では次のような定理が知られている.

Theorem 3.2.7. S^1 の任意の有限次元既約表現は, ある $n \in \mathbb{Z}$ に対する χ_n と同値となる.

そこで, “Fourier 変換” $\mathcal{F}: C(S^1) \rightarrow \ell$ を

$$\mathcal{F}(f)(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{S^1} f(g)\chi_{-n}(g) dg$$

で定義することができる. これは, S^1 上の関数の Fourier 展開に他ならない. ここで, S^1 の 1 次元既約表現と $L^2(S^1)$ の完全正規直交基底が 1 対 1 に対応していることに注意する.

Example 3.2.8. $M = \mathbb{R}^n$ に対して, $G = \mathbb{R}^n$ を \mathbb{R}^n 上の平行移動群と考える. この時, \mathbb{R}^n の既約ユニタリ表現は,

$$\mathbb{R}^n \ni x \mapsto \chi_\xi = e^{x\xi\sqrt{-1}} \in \mathbb{C}^\times$$

で表される. この時, やはり Fourier 変換 $\mathcal{F}: \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R})$ は

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(g)\chi_{-\xi}(g) dg$$

と表すことができる.

そこで, G がコンパクト群の場合に限って, Fourier 変換を次のようなものと考えよう¹. さらに, \hat{G} で G の既約ユニタリ表現全体 (の同値類) を表す. この時, Fourier 変換とは,

1. $\mathcal{F}: C(G) \rightarrow C(\hat{G})$ で定義された, 線形写像であって, $\mathcal{F}^*: C(\hat{G}) \rightarrow C(G)$ が定義でき, $\mathcal{F}\mathcal{F}^* = 1, \mathcal{F}^*\mathcal{F} = 1$ を満たす. 実際,

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = C \int_G f(g)\overline{\chi_\xi}(g) dg$$

で定義すれば良い.

2. \mathcal{F} は等長変換である. すなわち, $\|\mathcal{F}(f)\|^2 = \sum |\mathcal{F}(f)(\xi)|^2 = \|f\|_{L^2}^2$ が成り立つ. これは, χ がユニタリ表現であることから得られる.
3. $\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}(f)\mathcal{F}(g)$ が成り立つ. 実際,

$$\mathcal{F}(f * g)(\xi) = C \int_G (f * g)(x)\overline{\chi_\xi}(x) dx = C \int_G \int_G f(y^{-1}x)g(y)\overline{\chi_\xi}(x) dydx$$

であるが,

$$\int_G \int_G f(y^{-1}x)g(y)\overline{\chi_\xi}(x) dydx = \int_G \int_G f(z)g(y)\overline{\chi_\xi}(z)\overline{\chi_\xi}(y) dzdz = \mathcal{F}(f)(\xi)\mathcal{F}(g)(\xi)$$

より, $\mathcal{F}(f * g) = C\mathcal{F}(f)\mathcal{F}(g)$ が成り立つ.

¹ $G = \mathbb{R}^n$ は非コンパクト群である. 一般に非コンパクト群の表現は有限次元表現となるとは限らない.

このように定義した Fourier 変換が完全正規直交基底による展開を与えていることは、次の定理によって保証される。

Theorem 3.2.9 (Peter-Weyl). G がコンパクト位相群であれば、そのユニタリ表現は完全可約であり、既約ユニタリ表現全体は $L^2(G)$ の完全正規直交基底をなす。

3.2.3 離散 Fourier 変換

ここでは G は有限群とする。

Definition 3.2.10. G 上の関数 f が任意の $g, a \in G$ に対して、 $f(g^{-1}ag) = f(a)$ を満たす時、 f は類関数と呼ばれ、類関数全体は $C(G)$ の線形部分空間をなす。類関数全体の空間を $C_0(G)$ と書く。

有限群の指標に関しては、次の定理が成り立つ。

Theorem 3.2.11. G を有限群、 ρ, σ をその表現とする。

1. χ_ρ は類関数となる。
2. $\chi_{\rho \oplus \sigma} = \chi_\rho + \chi_\sigma$,
3. $\chi_{\rho \otimes \sigma} = \chi_\rho \chi_\sigma$,
4. $\chi_\rho(a) = \chi_\rho(a^{-1})$,
5. G の指標全体は群をなす。
6. ρ と σ が同値であれば、 $\chi_\rho = \chi_\sigma$,
7. ρ と σ が同値であれば、 $\langle \chi_\rho, \chi_\sigma \rangle = 1$ 、そうでなければ、 $\langle \chi_\rho, \chi_\sigma \rangle = 0$,
8. ρ が既約である必要十分条件は $\langle \chi_\rho, \chi_\rho \rangle = 1$ 。

Theorem 3.2.12 (Schure の補題). 表現 ρ が既約であることと、 V における線形変換 T に対して、

$$T\rho(a) = \rho(a)T \implies T = I_V$$

が成り立つことは同値である。

このことから、次の事実が成り立つ。

Theorem 3.2.13. アーベル群の既約表現は 1 次元表現である。

これらの結果を認めた上で、有限群 G 上の類関数の指標による展開を考えてみよう。

Theorem 3.2.14. ρ を V 上の既約表現とし、 $f \in C_0(G)$ とする。この時、

$$\sum_{g \in G} f(g)\rho(g) = \frac{|G|}{\dim V} \langle \overline{\chi_\rho}, f \rangle I_V$$

が成り立つ。

Proof. $A_f = \sum_{g \in G} f(a)\rho(a)$ とおくと、 A_f は V 上の線形変換であり、任意の $\rho(g)$ に対して、

$$A_f \rho(g) = \sum_{a \in G} f(a)\rho(a)\rho(g)\rho(g) \sum_{a \in G} f(a)\rho(g^{-1}ag) = \rho(g) \sum_{g' \in G} f(ga'g^{-1})\rho(a') = \rho(g)A_f$$

が成り立つ。よって Schure の補題により、 $A_f = I_V$ が成り立つ。そこで、両辺の Trace をとれば、

$$\sum_{g \in G} \text{tr} f(a)\rho(a) = \frac{|G|}{\dim V}$$

が成り立つ。 □

Definition 3.2.15. $\delta_a: G \rightarrow \mathbb{Z}$, $\delta_a(g) = 0$ ($a \neq g$), $\delta_a(a) = 1$ と定めると, G は有限群であるので, 明らかに δ_a は $C(G)$ の基底をなす. したがって, $C(G)$ は $|G|$ 次元ベクトル空間となる. そこで, $f \in C(G)$ に対して, 表現 ρ を

$$(\rho(h)f)(a) = f(h^{-1}a)$$

と定めると, ρ は有限次元ベクトル空間 $C(G)$ 上の表現となる. これを (左) 正則表現と呼ぶ.

Proposition 3.2.16. ρ を正則表現とすると,

$$\chi_\rho(a) = \delta_{ae}|G|$$

が成り立つ.

Proof. 正則表現 ρ に関しては, $\rho(h)\delta_a = \delta_{ha}$ が成り立つ. したがって, $a \neq e$ では, その trace は 0 である. 一方, $a = e$ の時, その行列表現の対角成分はすべて 1 である. \square

Theorem 3.2.17. ρ_1, \dots, ρ_K を G の既約表現の代表系とすると, $\{\chi_{\rho_1}, \dots, \chi_{\rho_K}\}$ は $C_0(G)$ の完全正規直交基底をなす.

Proof. この系が正規直交基底をなすことは, 前の定理からわかる. そこで, この系から生成される $C_0(G)$ の部分空間を M とすると, $C_0(G) = M \oplus M^\perp$ と書いて, $M^\perp = 0$ を示せば良い. いま, ρ を既約表現とすると, $f \in M^\perp$ に対して, $\langle \chi_\rho, f \rangle = 0$ が成り立つ. また, ρ が既約でない場合にも, 既約分解をすれば同じ結果を得る. したがって, ρ として正則表現をとれば, $\rho(a) = \delta_a$ であるので,

$$A_f \delta_e = \sum_{a \in G} f(a) \delta_a = 0$$

であり, δ_a は $C(G)$ の基底であるので, $f = 0$ が成り立つ. すなわち $M^\perp = 0$ が成り立つ. \square

Theorem 3.2.18. G の既約表現 (の同値類) の数は, G の共役類の数に等しい.

Proof. G の類関数とは G の共役類上で定数をとる関数のことである. したがって, $\dim C_0(G)$ は G の共役類の数に等しい. また, $C_0(G)$ の次元は, 前の定理より, 既約表現の同値類の数に等しい. \square

Definition 3.2.19. 有限アーベル群 G 上の類関数 $f \in C_0(G)$ に対して, その Fourier 変換 $\hat{f} \in C_0(\hat{G})$ を

$$\hat{f}(\rho) = \sum_{a \in G} f(a) \overline{\chi_\rho(a)} = \sum_{a \in G} f(a) \overline{\rho(a)}$$

で定める. ここで, ρ は G の既約表現である. この定義だけでは $\hat{f} \in C(\hat{G})$ であるが, 実は $\hat{f} \in C_0(\hat{G})$ となっていることに注意する.

G が有限アーベル群であれば, 既約表現は 1 次元表現となるので, $\chi_\rho(a) \in \mathbb{K}^\times$ となり, \hat{f} は \hat{G} 上の \mathbb{K} -valued function を定めていることがわかる². また, この Fourier 変換の定義が $C_0(G)$ の完全正規直交基底による展開を与えていることに注意しよう.

この場合 \hat{G} も再び有限アーベル群となっているので, 共役 Fourier 変換 $\mathcal{F}^*: C_0(\hat{G}) \rightarrow C_0(G)$ を

$$\mathcal{F}^*(\hat{f})(x) = \sum_{a \in \hat{G}} \hat{f}(a) \chi_\rho(a) = \sum_{a \in \hat{G}} \hat{f}(a) \rho(a)$$

で定めれば, $\mathcal{F}^* \mathcal{F} = 1$ が成り立ち, $G \cong \hat{\hat{G}}$ を示すことができる.

² この Fourier 変換の定義が前の定義と同じものであることに注意

Example 3.2.20. G を $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ としよう. この時, 既約表現は m 個存在し,

$$\chi_k(n) = e^{2\pi nk/m}$$

と書くことができる. したがって, G 上の関数 $C(G)$ に対する Fourier 変換を

$$\mathcal{F}(f)(k) = \widehat{f}(k) = \sum_{n \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}} f(n)\chi_{-k}(n) = \sum_{n=0}^{m-1} f(n)e^{nk\sqrt{-1}}$$

で定める. これを離散 Fourier 変換と呼ぶ. 上の定義により, ただちに共役 Fourier 変換を

$$\mathcal{F}^*(f)(k) = \sum_{n=0}^{m-1} f(n)e^{-nk\sqrt{-1}}$$

と書くことができる.

3.3 Fourier 変換の応用

3.3.1 微分方程式

\mathbb{R}, \mathbb{R}^n などで定義された微分方程式の解析には, Fourier 変換が有効である.

3.3.1.1 定数係数線形常微分方程式

ここでは, 前に取り上げたのと同じ, \mathbb{R} 上で定義された関数 q に対する定数係数 2 階線形常微分方程式

$$Lq'' + Rq' + \frac{q}{C} = v \quad (3.3.1)$$

を考えよう. (3.3.1) の両辺を Fourier 変換すると,

$$L(\widehat{q''}) + R(\widehat{q'}) + \frac{\widehat{q}}{C} = \widehat{v} \quad (3.3.2)$$

が成り立つ. ここで, Fourier 変換の重要な性質:

$$\mathcal{F}\left(\frac{d}{dx}q\right) = \sqrt{-1}y\widehat{q}(y)$$

を利用すると (3.3.2) は

$$(-Ly^2 + Ry\sqrt{-1} + \frac{1}{C})\widehat{q}(y) = \widehat{v}(y)$$

となる. 従って,

$$\widehat{q} = \frac{C\widehat{v}(y)}{-LCy^2 + RCy\sqrt{-1} + 1}$$

となり, 反転公式を用いれば, (3.3.1) の解は

$$q(x) = C\mathcal{F}^*\left(\frac{\widehat{v}(y)}{-LCy^2 + RCy\sqrt{-1} + 1}\right) \quad (3.3.3)$$

と書くことができる.

ここで, Fourier 変換と convolution との関係:

$$\mathcal{F}(f * g) = \sqrt{2\pi}f\widehat{g}, \quad \sqrt{2\pi}\mathcal{F}^*(\widehat{f}\widehat{g}) = f * g$$

より, $v = \sqrt{2\pi}\delta$ の場合を考えると, その時の解 $q_{\sqrt{2\pi}\delta}$ は (3.3.3) より,

$$q_{\sqrt{2\pi}\delta} = \mathcal{F}^*\left(\frac{C}{-LCy^2 + RCy\sqrt{-1} + 1}\right) = \delta * F$$

と書くことができる. ここで, F は

$$\widehat{F} = \frac{C}{-LCy^2 + RCy\sqrt{-1} + 1}, \quad F = \mathcal{F}^*\left(\frac{C}{-LCy^2 + RCy\sqrt{-1} + 1}\right) \quad (3.3.4)$$

である. 従って, 一般の v の場合には,

$$q = v * F \quad (3.3.5)$$

と書くことができる. そこで, (3.3.4) を満たす F を方程式 (3.3.1) の基本解と呼ぶ.

3.3.1.2 Laplace 方程式と Poisson 方程式

\mathbb{R}^n 上の微分作用素

$$\Delta = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$$

に対する微分方程式

$$\Delta u = f \quad (3.3.6)$$

を Poisson 方程式と呼ぶ. 特に $f = 0$ の時の Poisson 方程式を Laplace 方程式と呼ぶ. ここでは, Poisson 方程式の解を Fourier 変換を用いて求めることを考えてみよう. 方程式 (3.3.6) の両辺を Fourier 変換すると,

$$\widehat{\Delta u} = \widehat{f}$$

となるが, 左辺の Fourier 変換を計算すると,

$$\widehat{\Delta u} = -\left(\sum_{k=1}^n \xi_k^2\right)\widehat{u} = -|\xi|^2\widehat{u}$$

となるので, 従って,

$$\widehat{u}(\xi) = -\frac{\widehat{f}(\xi)}{|\xi|^2}$$

が成り立つ. すなわち,

$$u = -\mathcal{F}^*(\widehat{f}(\xi)/|\xi|^2)$$

が成り立つ. そこで, 特に $f = \delta$ の場合を考えると, $\widehat{f} = (\sqrt{2\pi})^{-n}$ であるので, 常微分方程式の時と同様に

$$\mathcal{F}(F) = -\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n |\xi|^2}$$

を満たす関数 $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ を用いて, 方程式 (3.3.6) の解は

$$u(x) = (F * f)(x)$$

と表示できる. 基本解 F を求めることで方程式 (3.3.6) の解を決定できることがわかる. そこで, 具体的に F を求めることを考えよう. この Fourier 変換を具体的に計算することは面倒なので,

$$\Delta u = \delta$$

となるべき関数 u を求めることを考える. ここで, 極座標で Laplacian を計算すると,

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{n-1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \Delta_{S^{n-1}}$$

となるので,

$$u = \begin{cases} \log r & n = 2, \\ r^{2-n} & n > 2 \end{cases}$$

となる. 実際, Green の公式

$$\int_{\Omega} \Delta uv \, dV + \int_{\Omega} \nabla u \nabla v \, dV = \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial \nu} \, dS$$

で Ω を半径 $\varepsilon > 0$ の ball を除いた領域とし, $u = \log r$, または $u = r^{2-n}$ を代入すると,

$$\int_{r>\varepsilon} \Delta uv \, dV + \int_{r>\varepsilon} \nabla_r u \nabla_r v \, dV = \int_{r>\varepsilon} \Delta uv \, dV + \nabla_r v(\varepsilon) = - \int_{S_\varepsilon} v \, dS_\varepsilon$$

が成り立つ. ここで, $\varepsilon \rightarrow 0$ とすると,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Delta uv \, dV = Cv(0)$$

となり, 確かに $\Delta u = C\delta$ が成り立つことがわかる.

3.3.1.2.1 Poisson kernel ここで, \mathbb{R}^2 上の disk D^2 における Dirichlet 境界値問題を考えてみよう. すなわち,

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & x \in D^2, \\ u = \phi, & x \in S^1 \end{cases} \quad (3.3.7)$$

を考える. この時, 次が成り立つ.

Theorem 3.3.1. 方程式 (3.3.7) の解は

$$u(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{S^1} \frac{1-|x|^2}{|x-y|^2} \phi(y) \, dy$$

で与えられる.

Proof. 境界条件 ϕ は S^1 上の関数であるので, その Fourier 級数展開を

$$\phi(y) = \sum \widehat{\phi}(n) e^{n\theta\sqrt{-1}}$$

とおく. また, $u(r, \theta)$ で r を固定した時の Fourier 展開を

$$u(r, \theta) = \sum \widehat{u}(r, n) e^{n\theta\sqrt{-1}}$$

とおくと, $\Delta u = 0$ と境界条件より,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \widehat{u}(r, n)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \widehat{u}(r, n)}{\partial r} - \frac{n^2}{r^2} \widehat{u}(r, n) &= 0, \\ \widehat{u}(1, n) &= \widehat{\phi}(n), \\ \widehat{u}(0, n) &= 0, \quad |n| \geq 1, \\ \widehat{u}(0, n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{S^1} \phi(\theta) \, d\theta = u(0) \end{aligned}$$

が成り立つ必要がある。ここから、

$$\widehat{u}(r, n) = r^{|n|} \widehat{\phi}(n)$$

となり、

$$u(r, \theta) = \sum r^{|n|} \widehat{\phi}(n) e^{n\theta\sqrt{-1}}$$

が成り立つ。この和を計算すれば、

$$\sum r^{|n|} e^{n\theta\sqrt{-1}} = \frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta+r^2}$$

より、求める式を得る。 □

3.3.1.3 熱方程式

\mathbb{R}^n 上の微分方程式

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u, \\ u(0, x) = u_0(x) \end{cases}$$

を熱方程式と呼ぶ。Laplace 方程式の場合と同様に、Fourier 変換を行なうと、

$$\begin{cases} \frac{\partial \widehat{u}}{\partial t} = -|\xi|^2 \widehat{u}, \\ \widehat{u}(0, \xi) = \widehat{u}_0(\xi) \end{cases}$$

となり、この常微分方程式の解を計算すれば、

$$\widehat{u}(t, \xi) = \widehat{u}_0(\xi) e^{-t|\xi|^2}$$

を得る。従って、

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{x \cdot \xi \sqrt{-1}} \widehat{u}(t, \xi) d\xi \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{x \cdot \xi \sqrt{-1} - t|\xi|^2} \widehat{u}_0(\xi) d\xi \\ &= \frac{1}{(2\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} u_0(y) dy \end{aligned}$$

を得る。この関数

$$P(t, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}^n} e^{-|x|^2/4t}$$

を熱核と呼ぶ。熱方程式の解は $u(t, x) = (u_0 * P)(t, x)$ と表示できたことになり、この解は $\|u(t, \cdot) - u_0\|_{L^p} \rightarrow 0$ の意味で初期条件を満足する。

3.3.2 Poisson 和の公式

Theorem 3.3.2. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ が

$$|f(x)| + |f'(x)| + |f''(x)| \leq C(1+x^2)^{-1}$$

を満たすならば、

$$\sum_{n=-\infty}^{n=\infty} f(n) = \sqrt{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \widehat{f}(2\pi n)$$

が成り立つ。

Proof. $f \in C^2(\mathbb{R})$ が条件を満たすとすると, $T > 0$ に対して,

$$g(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(xT + nT)$$

も C^2 となり, 周期 1 を持つ. よって, S^1 上の Fourier 変換を考えれば,

$$g(x) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \hat{g}(m) e^{2\pi m x \sqrt{-1}}$$

と展開される. 一方,

$$\begin{aligned} \hat{g}(m) &= \int_0^1 g(x) e^{-2\pi m x \sqrt{-1}} dx = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_0^1 f(xT + nT) e^{-2\pi m x \sqrt{-1}} dx \\ &= \frac{1}{T} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_{nT}^{(n+1)T} f(y) e^{-2\pi m y \sqrt{-1}/T} dy = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-2\pi m y \sqrt{-1}/T} dy \\ &= \frac{\sqrt{2\pi}}{T} \hat{f}\left(\frac{2\pi m}{T}\right) \end{aligned}$$

が成り立ち, よって,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(xT + nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2\pi}{T} \hat{f}\left(\frac{2\pi n}{T}\right) e^{2\pi m x \sqrt{-1}/T}$$

が成り立つ. ここで, $T = 1$, $x = 0$ とすればよい. □

Example 3.3.3. $c_t(x) = \frac{t}{\pi(x^2+t^2)}$ ($t > 0$) にこの定理を適用すれば,

$$\sqrt{2\pi} \hat{c}_t(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \frac{t e^{x\xi \sqrt{-1}}}{t^2 + x^2} dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{t x \xi \sqrt{-1}}}{t^2 + x^2} dt$$

であるので,

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{n^2 + t^2} = \frac{\pi}{t} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-2\pi |n|t} = \frac{\pi}{t} \frac{1 + e^{-2\pi t}}{1 - e^{-2\pi t}}$$

が成り立つ. ここで, $t \rightarrow 0$ とすれば,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Example 3.3.4. Poisson 和の公式を偶関数に適用すると,

$$\begin{aligned} 2 \sum_{n=0}^{\infty} f(n) &= f(0) + \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) = f(0) + \sqrt{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(2\pi n) \\ &= f(0) + \sqrt{2\pi} \hat{f}(0) + \sqrt{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (\hat{f}(2\pi n) + \hat{f}(-2\pi n)) \\ &= f(0) + 2 \int_0^{\infty} f(x) dx + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos(2\pi n x) dx \end{aligned}$$

が成り立つ. そこで, 最後の積分を部分積分すれば,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} f(n) &= \int_0^{\infty} f(x) dx + \frac{1}{2} f(0) - \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f'(x) \frac{\sin(2\pi n x)}{n x} dx \\ &= \int_0^{\infty} f(x) dx + \frac{1}{2} f(0) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f'(0)}{2\pi^2 n^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f''(x) \frac{\cos(2\pi n x)}{2n^2 x^2} dx \\ &= \dots \end{aligned}$$

となる。従って、有名な Euler-Maclaurin の公式

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n) = \int_0^{\infty} f(x) dx + \frac{1}{2}f(0) - \frac{1}{12}f'(0) + \frac{1}{720}f'''(0) - \frac{1}{30420}f^{(4)}(0) + \dots$$

を得る。

3.3.3 確率論への応用

可積分関数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ が

$$f \geq 0, \quad \int_{\mathbb{R}} f(x) dx = 1$$

を満たす時, f を確率密度関数と呼ぼう。もし,

$$\int_{\mathbb{R}} |x|f(x) dx < \infty$$

が成り立てば, f は平均

$$\mu = \int_{\mathbb{R}} xf(x) dx$$

を持つという。さらに,

$$\int_{\mathbb{R}} |x|^n f(x) dx < \infty$$

が成り立てば, f は n -th moment

$$\int_{\mathbb{R}} x^n f(x) dx$$

を持つという。特に,

$$\sigma^2 = \int_{\mathbb{R}} (x - \mu)^2 f(x) dx = \int_{\mathbb{R}} x^2 f(x) dx - \mu^2$$

を f の分散と呼ぶ。

3.3.3.1 中心極限定理

Theorem 3.3.5. 確率密度関数 f が 2 次のモーメントを持ち, その平均が 0 ならば,

1. 任意の $a < b$ に対して, $n \rightarrow \infty$ の時

$$\int_{a\sqrt{n} < x_1 + \dots + x_n < b\sqrt{n}} f(x_1) \cdots f(x_n) dx_1 \cdots dx_n = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-x^2/2\sigma^2} dx$$

が成り立つ。

2. 任意の有界連続関数 ϕ に対して, $n \rightarrow \infty$ の時,

$$\int \phi\left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{\sqrt{n}}\right) f(x_1) \cdots f(x_n) dx_1 \cdots dx_n = \int \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-x^2/2\sigma^2} \phi(x) dx$$

が成り立つ。

Proof. 以下では

$$\tilde{f}(\xi) = \sqrt{2\pi}\hat{f}(\xi)$$

とおく。

1.

$$\int e^{\sqrt{-1}n^{-1/2}\xi \sum x_j} f(x_1) \cdots f(x_n) dx_1 \cdots dx_n = \left(\int e^{\sqrt{-1}n^{-1/2}\xi x} f(x) dx \right)^n = \tilde{f}(n^{-1/2}\xi)^n$$

が成り立つ。ここで,

$$\tilde{f}(0) = \int f(x) dx = 1,$$

$$\tilde{f}'(0) = \int (\sqrt{-1}x) f(x) dx = 0,$$

$$\tilde{f}''(0) = \int (\sqrt{-1}x)^2 f(x) dx = -\sigma^2$$

より, \tilde{f} の Taylor 展開を考えれば,

$$|\tilde{f}(\xi) - (1 - \sigma^2 \xi^2 / 2)| \leq \sup_{|\eta| \leq |\xi|} |f''(\eta) - f''(0)| |\xi|^2.$$

従って,

$$\tilde{f}(n^{-1/2}\xi)^n = \left(1 - \frac{\sigma^2}{2n} \xi^2 + o(\xi^2/n)\right)^n \rightarrow e^{-\sigma^2 \xi^2 / 2}$$

が成り立つ。このことより,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int e^{\sqrt{-1}n^{-1/2}\xi \sum x_j} f(x_1) \cdots f(x_n) dx_1 \cdots dx_n = e^{-\sigma^2 \xi^2 / 2}$$

2. が成り立つことがわかる。

$$\int \phi(n^{-1/2} \sum x_j) f(x_1) \cdots f(x_n) dx_1 \cdots dx_n = \frac{1}{(2\pi)^n} \int \tilde{\phi}(\xi) d\xi \int e^{\sqrt{-1}n^{-1/2}\xi \sum x_j} f(x_1) \cdots f(x_n) dx_1 \cdots dx_n$$

が成り立つ。この積分を $|x| \leq R$ と $|x| > R$ に分解すると, $n \rightarrow \infty$ の時,

$$\frac{1}{(2\pi)^n} \left(\int_{|x| \leq R} \tilde{\phi}(\xi) e^{-\sigma^2 \xi^2 / 2} d\xi + \int_{|x| > R} \tilde{\phi}(\xi) e^{-\sigma^2 \xi^2 / 2} d\xi \right)$$

となり, 後ろの積分は 0 に収束し,

$$\frac{1}{(2\pi)^n} \int \tilde{\phi}(\xi) e^{-\sigma^2 \xi^2 / 2} d\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int \phi(x) e^{-x^2 / 2\sigma^2} dx$$

が成り立つ。

3. $\sum x_j \in [a, b]$ の定義関数を ϕ とおけば, 定理の最初の結論を得ることができる。

□

中心極限定理は

$$\int_{\sqrt{na}}^{\sqrt{nb}} f^{*n}(x) dx = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-|x|^2 / 2\sigma^2} dx,$$

$$\int_{\mathbb{R}} \phi(x/\sqrt{n}) f^{*n}(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \phi(x) \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-|x|^2 / 2\sigma^2} dx,$$

と書くことができることに注意。

ここで, 確率密度関数 f に対して, \tilde{f} をその特性関数と呼べば, 特性関数 $\tilde{f}(t)$ は密度関数 $f(x)$ による $e^{-\sqrt{-1}tx}$ の平均と考えることができる。ここで, 密度関数 x を持つ確率変数 X を

$$X(t) = \int_{-\infty}^t x(s) ds$$

で与えると、確率変数 X, Y のそれぞれの密度関数を x, y としたとき、 $X + Y$ の密度関数 z は

$$\tilde{z}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^2} x(t)y(s)e^{\sqrt{-1}(t+s)\xi} dt ds = \tilde{x}(\xi)\tilde{y}(\xi)$$

となり、 $z = x * y$ となることがわかる。

3.3.3.2 不確定性原理

急減少関数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ に対して、その「広がり」の様子と、 \widehat{f} の広がり様子にはいかなのような関係がある。

$$\begin{aligned} \bar{t} &= \frac{\int_{\mathbb{R}} t|f(t)|^2 dt}{\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt}, & \sigma(t) &= \frac{\int_{\mathbb{R}} (t - \bar{t})|f(t)|^2 dt}{\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt}, \\ \bar{\xi} &= \frac{\int_{\mathbb{R}} \xi|\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi}{\int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi}, & \sigma(\xi) &= \frac{\int_{\mathbb{R}} (\xi - \bar{\xi})|\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi}{\int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi} \end{aligned}$$

とおくと、 $\bar{t}, \bar{\xi}$ は f, \widehat{f} の広がり中心、 $\sigma(t), \sigma(\xi)$ はその広がり様子を表すと考えられる。実際、

$$F(t) = \frac{\int_{-\infty}^t |f(\tau)|^2 d\tau}{\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt}$$

を分布関数とする確率変数の平均が \bar{t} 、分散が $\sigma(t)$ となる。

Theorem 3.3.6 (不確定性原理). $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ が急減少関数であれば、

$$\sigma(t)\sigma(\xi) \geq \frac{1}{4}$$

が成り立つ。

Proof.

$$\begin{aligned} I &= \int_{\mathbb{R}} (t - \bar{t})f(t)(f'(t) - \sqrt{-1}\bar{\xi}f(t)) dt, \\ M &= \int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt \end{aligned}$$

とおく。この時、

$$\begin{aligned} I &= \int_{\mathbb{R}} (t - \bar{t})f(t) dt + \int_{\mathbb{R}} (t - \bar{t})(f'(t) - \sqrt{-1}\bar{\xi}f(t)) dt, = \int_{\mathbb{R}} (t - \bar{t})f(t) dt \\ &= \left[\frac{1}{2}(t - \bar{t})|f(t)|^2 \right]_{-\infty}^{\infty} - \frac{M}{2} \\ &= -\frac{M}{2} \end{aligned}$$

となる。従って

$$\frac{M^2}{4} = |I|^2 \leq \left(\int_{\mathbb{R}} (t - \bar{t})^2 |f(t)|^2 dt \right) \left(\int_{\mathbb{R}} |f'(t) - \sqrt{-1}\bar{\xi}f(t)|^2 dt \right)$$

が成り立つ。そこで、 $\mathcal{F}(f'(t) - \sqrt{-1}\bar{\xi}f(t)) = i(\xi - \bar{\xi})\widehat{f}(\xi)$ であることと、Parseval の等式を用いれば、

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |f'(t) - \sqrt{-1}\bar{\xi}f(t)|^2 dt &= \int_{\mathbb{R}} (\xi - \bar{\xi})^2 |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi, \\ \int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt &= \int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi = M \end{aligned}$$

が成り立つので,

$$\frac{1}{4} \leq \frac{\int_{\mathbb{R}} (t - \bar{t})^2 |f(t)|^2 dt}{\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt} \frac{\int_{\mathbb{R}} (\xi - \bar{\xi})^2 |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi}{\int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi}$$

が成り立つ. □

3.3.4 電気工学

3.3.4.1 線形システムと伝達関数

線形システム T が与えられた時,

$$h(t) = T(\delta(t))$$

をシステムのインパルス応答と呼ぶ. システムに f を入力した時の応答は $f = f * \delta$ を利用すれば,

$$T(f) = T((f * \delta)) = f * (T(\delta)) = f * h$$

となり, インパルス応答がわかれば, システムの特性が決定できることとなる.

そこで, T に対して $e^{\sqrt{-1}tx}$ を入力した時の応答が

$$T(e^{\sqrt{-1}tx}) = H(\sqrt{-1}x)e^{\sqrt{-1}tx}$$

であったとしよう. このような関数 H をシステムの伝達関数と呼ぶ. この時,

$$T(f)(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(x) T(e^{\sqrt{-1}xt}) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(x) H(\sqrt{-1}x) e^{\sqrt{-1}xt} dx,$$

$$H(\sqrt{-1}x) = T(e^{\sqrt{-1}xt}) = h * e^{\sqrt{-1}xt},$$

$$H(\sqrt{-1}x) = \int_{\mathbb{R}} h(s) e^{\sqrt{-1}x(t-s)} ds = \int_{\mathbb{R}} h(s) e^{-\sqrt{-1}xs} ds e^{\sqrt{-1}xt}$$

と書けるので,

$$H(\sqrt{-1}x) = \hat{h}(x)$$

となり, 伝達関数はインパルス応答の Fourier 変換として決定できる.

Example 3.3.7. 伝達関数が

$$H(\sqrt{-1}x) = \begin{cases} Ae^{-\sqrt{-1}\tau x}, & |x| \leq x_0, \\ 0 & |x| > x_0 \end{cases}$$

となるシステムを考えよう. この時インパルス応答は

$$h(t) = \mathcal{F}^*(H) = \frac{1}{2\pi} \int_{-x_0}^{x_0} Ae^{\sqrt{-1}x(t-\tau)} dx = \frac{A}{\pi} \frac{\sin x_0(t-\tau)}{t-\tau}$$

となる.

3.3.4.2 自己相関関数

Parseval の等式より,

$$\|f\|_{L^2} = \|\hat{f}\|_{L^2}$$

が成り立っている. そこで, $|\hat{f}|^2$ を f のエネルギースペクトルと呼ぼう. この時, $|\hat{f}|^2$ の逆 Fourier 変換を計算すると,

$$\mathcal{F}^*(|\hat{f}|^2) = \int_{\mathbb{R}} f(t)f(t-s) dt$$

が成り立つ. ここで, 関数 f, g に対して,

$$R_{fg}(x) = (f(t) * g(-t))(x)$$

を f と g の相関関数と呼べば, 自己相関関数の Fourier 変換がエネルギースペクトルとなっていることがわかる. これを Wiener-Khinchine の定理と呼ぶ.

Theorem 3.3.8. インパルス応答 h を持つ線形システムに自己相関関数 $R_{uu} = \delta$ となる入力 u を与えた時の出力を v とすれば, $R_{uv} = h$ が成り立つ

Proof.

$$R_{uv}(s) = (u(-t) * v(t))(s) = (u(-t) * h(t) * u(t))(s) = (u(-t) * u(t) * h(t))(s) = (\delta(t) * u(t))(s) = h(s).$$

□

3.4 離散 Fourier 変換とその応用

一般に離散 Fourier 変換とは有限群 G 上の Fourier 変換のことであった. ここでは特に $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ とした時の Fourier 変換について調べてみよう. すなわち, $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{0, 1, \dots, n-1\}$ とすると, $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ に対して, その Fourier 変換 $\mathcal{F}(f)$ と共役 Fourier 変換 $\mathcal{F}^*(f)$ は

$$\mathcal{F}(f) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} f(x)\omega^{-kx},$$

$$\mathcal{F}^*(f) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} f(x)\omega^{kx}$$

と書くことができる. ここで, $\omega = e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{n}}$ とおいた.

離散的な周期データ $\{f(k)\}_{k=0}^{n-1}$ は「1秒間に n 個のデータが入力される」と考えることにより, 離散 Fourier 変換は $1/n$ 秒間隔でサンプリングされたデータの Fourier 変換であると考えられるので, ここでとった n をサンプリング周波数と呼ぶことがある.

3.4.1 離散 Fourier 変換の基本的な性質

Theorem 3.4.1.

$$\{n^{-1/2} e^{\frac{2\pi i}{n} kx}\}_{k=0}^{n-1}$$

は $C(G)$ 上の内積

$$\langle f, g \rangle = \sum_{k=0}^{n-1} \langle f(k), \overline{g(k)} \rangle$$

に関して正規直交基底となる.

Proof. 以下では $\omega = e^{\frac{2\pi i}{n}}$ と書く. この時, $f_k(x) = \omega^{kx}$ と書くと,

$$\langle f_j, f_k \rangle = \sum_{l=0}^{n-1} \omega^{jl} \omega^{-kl} = \sum_{l=0}^{n-1} \omega^{(j-k)l}$$

が成り立つ. この和を計算すると,

$$\langle f_j, f_k \rangle = n\delta_{jk}$$

が成り立つ. □

次に, \mathcal{F} の基本的な性質を調べておこう.

Theorem 3.4.2. 任意の $f, g \in C(G)$ に対して,

1. 【反転公式】 $\mathcal{F}^* \mathcal{F}(f) = f$,
2. 【Parseval の等式】 $\sum_{k=0}^{n-1} |\mathcal{F}(f)(k)|^2 = \sum_{x=0}^{n-1} |f(x)|^2$,
3. 【合成積】 $\mathcal{F}(f * g)(k) = \mathcal{F}(f)(k) \mathcal{F}(g)(k)$

が成り立つ. ここで, $(f * g)(x) = \sum_{y=0}^{n-1} f(x-y)g(y)$ である.

Proof. 1. Fourier 変換 \mathcal{F} と共役 Fourier 変換 \mathcal{F}^* は

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f)(k) &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{x=0}^{n-1} f(x) \omega^{-kx}, \\ \mathcal{F}^*(f)(x) &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} f(k) \omega^{kx} \end{aligned}$$

で定義した. したがって,

$$\begin{aligned} n\mathcal{F}^* \mathcal{F}(f)(y) &= \sum_{k=0}^{n-1} \hat{f}(k) \omega^{ky} = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{x=0}^{n-1} f(x) \omega^{ky} \omega^{-kx} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{x=0}^{n-1} f(x) \omega^{k(y-x)} \end{aligned}$$

が成り立つ. ここで,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{k(x-y)} = \begin{cases} n & y = x, \\ 0 & y \neq x \end{cases}$$

であるので,

$$n\mathcal{F}^* \mathcal{F}(f)(y) = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{x=0}^{n-1} f(x) \omega^{k(y-x)} = nf(y)$$

となり, 結論が成り立つ.

2.

$$n|\mathcal{F}(f)(k)|^2 = \left| \sum_{x=0}^{n-1} f(x) \omega^{-kx} \right|^2 = \sum_{x=0}^{n-1} \sum_{y=0}^{n-1} f(x) \overline{f(y)} \omega^{-kx} \omega^{ky}$$

がなりたつ. したがって,

$$n \sum_{k=0}^{n-1} |\mathcal{F}(f)(k)|^2 = \sum_{x=0}^{n-1} \sum_{y=0}^{n-1} f(x) \overline{f(y)} \sum_{k=0}^{n-1} \omega^{k(y-x)} = n|f(x)|^2$$

が成り立つ.

3.

$$\begin{aligned}
n\mathcal{F}(f * g)(k) &= \sum_{x=0}^{n-1} \sum_{y=0}^{n-1} f(x-y)g(y)\omega^{-kx} \\
&= \sum_{x=0}^{n-1} \sum_{y=0}^{n-1} f(x-y)\omega^{-k(x-y)} \\
&\quad g(y)\omega^{-ky} = \left(\sum_{z=0}^{n-1} f(z)\omega^{-kz} \right) \left(\sum_{y=0}^{n-1} g(y)\omega^{-ky} \right) = \mathcal{F}(f)(k)\mathcal{F}(g)(k).
\end{aligned}$$

□

離散 Fourier 変換では、特に次のような性質が成り立つ。

Proposition 3.4.3. $f \in C(G)$ が実数値関数であれば、

$$\operatorname{Re}\mathcal{F}(f)(k) = \operatorname{Re}\mathcal{F}(f)(n-k), \quad \operatorname{Im}\mathcal{F}(f)(k) = -\operatorname{Im}\mathcal{F}(f)(n-k)$$

が成り立つ。

3.4.2 サンプリング定理

ここでは $f \in C(S^1)$ をサンプリングしたとき、 f にどのような条件があれば、そのサンプリング・データから元の関数 f を復元できるかを考えてみよう。

はじめに、 $f \in C(S^1)$ を考え、 f を \mathbb{R} に周期拡張して、 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ と考える。この時、 f の Fourier 変換は

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-\xi x\sqrt{-1}} dx \quad (3.4.1)$$

と書けていた。すると、共役 Fourier 変換を用いて、

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi)e^{\xi x\sqrt{-1}} d\xi \quad (3.4.2)$$

である。そこで、関数（入力データ） f に対して、次のような仮定を試みよう。

Assumption 3.4.4. ある $N > 0$ が存在して、

$$\widehat{f}(\xi) = 0, \quad |\xi| > N$$

が成り立つ。すなわち、 f はモード N 以上の周波数成分を持たない。

すると、 \widehat{f} は $[-N, N]$ 上の \mathbb{C} 値関数と思うことができるので、これを Fourier 変換すると、

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(\xi) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} d_n e^{-\frac{n\pi}{N}\xi\sqrt{-1}}, \\
d_n &= \frac{1}{\sqrt{2N}} \int_{|\xi| \leq N} \widehat{f}(\xi) e^{\frac{n\pi}{N}\xi\sqrt{-1}} d\xi \\
&= \frac{1}{\sqrt{2N}} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi) e^{\frac{n\pi}{N}\xi\sqrt{-1}} d\xi
\end{aligned} \quad (3.4.3)$$

と書くことができる。そこで, (3.4.2) と比較すれば,

$$f\left(\frac{\pi}{n}N\right) = \sqrt{\frac{N}{\pi}}d_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f} e^{\frac{n\pi}{N}\xi\sqrt{-1}} d\xi \quad (3.4.4)$$

が成り立つので, (3.4.4) を (3.4.3) に代入すれば,

$$\widehat{f}(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{N}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} f\left(\frac{\pi}{n}N\right) e^{-\frac{n\pi}{N}\xi\sqrt{-1}} \quad (3.4.5)$$

を得ることができる。従って,

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi) e^{x\xi\sqrt{-1}} d\xi \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{|\xi| \leq N} \widehat{f}(\xi) e^{x\xi\sqrt{-1}} d\xi \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{\pi}{N}} \int_{|\xi| \leq N} \sum_{n \in \mathbb{Z}} f\left(\frac{n\pi}{N}\right) e^{-\frac{n\pi}{N}\xi\sqrt{-1}} e^{x\xi\sqrt{-1}} d\xi \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi N}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} f\left(\frac{n\pi}{N}\right) \int_{|\xi| \leq N} e^{\xi\sqrt{-1}(x - \frac{n\pi}{N})} d\xi \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi N}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} f\left(\frac{n\pi}{N}\right) \frac{\sin((x - \frac{n\pi}{N})N)}{x - \frac{n\pi}{N}} \end{aligned}$$

が成り立つ。すなわち,

$$K_N(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi N}} \frac{\sin(xN)}{x}$$

とおくと,

$$f(x) = \sum_{\ell=0}^{N-1} f\left(\frac{\pi}{N}\ell\right) K_N\left(x - \frac{\pi}{N}\ell\right) = (f * K_N)(x) \quad (3.4.6)$$

が成り立つ。ただし, 右辺の合成積は離散 Fourier 変換の意味での合成積である。

この議論をまとめれば, 次の定理を得る。

Theorem 3.4.5 (Shannon のサンプリング定理). $f \in C(S^1)$ の Fourier 変換が $N+1$ 以上のモードを持たなければ, f はサンプリング周波数 N のサンプリング・データから完全に復元できる。

したがって, この系として次を得る。

Corollary 3.4.6. f のサンプリング周波数 N のサンプリング・データからは, 周波数 $N/2$ を越える成分は抽出されない。

サンプリング周波数 N に対して決まる, 最大周波数 $N/2$ を Nyquist 周波数と呼ぶ。したがって, サンプリング・周波数 44100 Hz の音楽 CD では, 周波数 22050 Hz を越える音域は再現できない³。

3.4.3 サンプリング定理の応用

ここでは, サンプリング定理を実際にどのように応用するのかを考えてみる。

【CDからDATへの変換】

³ 一般に, 人間の可聴域は 20Hz から 20000 Hz といわれている。

CDのサンプリング周波数は44.1 KHzであり、DATのサンプリング周波数は48 KHzである。したがって、CDからDATへデジタル変換を行なう場合には、一度サンプリング定理にしたがって、連続データを作成して、それをDATの周波数で再サンプリングする必要がある。

マヌケな発想をすると、再サンプリングをする際に、サンプリング定理に従わず、もとのサンプリング・データを線形補間したくなるのだが、一般に、離散データを線形補間したデータを Fourier 変換すると、非常に高い周波数が入ってきて、正しく再サンプリングできない。

【デジタル携帯電話の通信】

デジタル携帯電話を利用するには、音声情報として重要な周波数領域は人間の声が存在している領域である。人間の声はおおよそ100 Hzあたりの周波数になっている。しかし、そのサンプリング周波数を低くとると、実際には音質が低下するので、高いサンプリング周波数でサンプリングを行ない、Fourier データの高周波数領域をカットしたデータを送信し、受信時にサンプリング定理によりデータを復元すれば良い。

ちなみに、移动通信端末(デジタル携帯電話やPHS)と基地局との通信には、これまでは、時間スロットを分割して、基地局と移動体との多重通信を実現していた。これを Time Division Multiple Access (TDMA) と呼び、デジタル多重通信の基本的な方法であった。しかし、近年より高密度な多重通信を実現するため、Fourier データを広い周波数帯域へ符号拡散する方法が開発されている。これを Code Division Multiple Access (CDMA) と呼び、次世代移動体通信の規格として決定されている。

3.4.4 高速フーリエ変換

$G = \mathbb{Z}/N/\mathbb{Z}$ 上の離散フーリエ変換を計算するために、

$$\hat{f}(k) = \sum_{x=0}^{N-1} f(x)\omega^{-kx}$$

を計算すると、一つの $\hat{f}(k)$ を計算するために、乗算を N 回、加算を $N-1$ 回実行する必要がある。したがって、 N 個の $\hat{f}(k)$ を計算するには、乗算を N^2 回、加算を $N(N-1)$ 回計算しなければならない。

そこで、次のようなことを考えてみよう。いま、 $N = 2^m$ と仮定し、 x と k を以下のように2進展開する。

$$\begin{aligned} x &= x_{m-1}2^{m-1} + \cdots + x_12^1 + x_02^0, \\ a &= a_{m-1}2^{m-1} + \cdots + a_12^1 + a_02^0. \end{aligned}$$

さらに、 $f(x) = f(x_{m-1}, \dots, x_0)$, $\hat{f}(k) = \hat{f}(k_{m-1}, \dots, k_0)$ と書こう。この時、

$$\begin{aligned} kx &\equiv x_0(k_0 + 2k_1 + \cdots + 2^{m-1}k_{m-1}) \\ &\quad + 2x_1(k_0 + 2k_1 + \cdots + 2^{m-2}k_{m-2}) \\ &\quad + \cdots + 2^{m-1}x_{m-1}k_0, \quad (\text{mod } 2^m) \end{aligned}$$

が成り立つので、

$$K_j = k_0 + \cdots + 2^j k_j$$

と書くと、

$$\hat{f}(k_{m-1}, \dots, k_0) = \sum_{x_0=0}^1 \cdots \sum_{x_{m-1}=1}^1 f(x_{m-1}, \dots, x_0)\omega^{-2^{m-1}x_{m-1}K_0} \cdots \omega^{-x_0K_{m-1}}$$

を計算すれば良いことがわかる. この計算をステップごとに書けば,

$$\begin{aligned}
 f_1(k_0, x_{m-2}, \dots, x_0) &= \sum_{x_{m-1}=0}^1 f(x_{m-1}, \dots, x_0) \omega^{-2^{m-1} x_{m-1} K_0}, \\
 f_2(k_0, k_1, x_{m-3}, \dots, x_0) &= \sum_{x_{m-2}=0}^1 f(k_0, x_{m-2}, \dots, x_0) \omega^{-2^{m-2} x_{m-2} K_1}, \\
 &\vdots \\
 f_m(k_0, \dots, k_{m-1}) &= \sum_{x_0=0}^1 f(k_0, \dots, k_{m-2}, x_0) \omega^{x_0 K_{m-1}} \\
 &= \sqrt{N} \hat{f}(k_{m-1}, \dots, k_0)
 \end{aligned}$$

と計算すれば良いことがわかる. ここで, 各ステップでの計算回数は, 一つの $f_j(k_0, \dots, k_{j-1}, \dots, x_0)$ を求めるために, 乗算が 2 回, 加算が 1 回であり, それらを N 個に対して行なえば良いので, 乗算が $2N$ 回, 加算が N 回であり, m は $\log_2 N$ であるので, 合計で乗算が $2N \log_2 N$ 回, 加算が $N \log_2 N$ 回で終る.

より一般に $N = p_1 \cdots p_\ell$ と素因数分解されている時には, N の (p_1, \dots, p_ℓ) 進表記

$$N = a_0 + a_1 p_1 + a_1 p_1 p_2 + \cdots + a_{\ell+1} p_1 \cdots p_\ell$$

を用いて分解を行なえば良い⁴.

⁴ ここで, 通常の 2 進表記とは, すべての j に対して, $p_j = 2$ としたものであることは明らかである. このような表現方法を混合基数による表現といい, p_j たちは必ずしも素数である必要はない.

実際に $N = 8 = 2^3$ の場合, この演算は次のような行列で書ける.

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \widehat{f}(0) \\ \widehat{f}(4) \\ \widehat{f}(2) \\ \widehat{f}(6) \\ \widehat{f}(1) \\ \widehat{f}(5) \\ \widehat{f}(3) \\ \widehat{f}(7) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \omega^0 & \omega^0 \\ \omega^0 & \omega^4 & \omega^0 & \omega^4 & \omega^0 & \omega^4 & \omega^0 & \omega^4 \\ \omega^0 & \omega^2 & \omega^4 & \omega^6 & \omega^0 & \omega^2 & \omega^4 & \omega^6 \\ \omega^0 & \omega^6 & \omega^4 & \omega^2 & \omega^0 & \omega^6 & \omega^4 & \omega^2 \\ \omega^0 & \omega^1 & \omega^2 & \omega^3 & \omega^4 & \omega^5 & \omega^6 & \omega^7 \\ \omega^0 & \omega^5 & \omega^2 & \omega^7 & \omega^4 & \omega^1 & \omega^6 & \omega^3 \\ \omega^0 & \omega^3 & \omega^6 & \omega^1 & \omega^4 & \omega^7 & \omega^2 & \omega^5 \\ \omega^0 & \omega^7 & \omega^6 & \omega^5 & \omega^4 & \omega^3 & \omega^2 & \omega^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(0) \\ f(1) \\ f(2) \\ f(3) \\ f(4) \\ f(5) \\ f(6) \\ f(7) \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \omega^0 & \omega^0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \omega^0 & \omega^4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega^0 & \omega^0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega^0 & \omega^4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \omega^0 & \omega^0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \omega^0 & \omega^4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \omega^0 & \omega^0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \omega^0 & \omega^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega^0 & 0 & \omega^0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega^0 & 0 & \omega^0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \omega^0 & 0 & \omega^4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega^2 & 0 & \omega^6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \omega^0 & 0 & \omega^0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \omega^0 & 0 & \omega^0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \omega^0 & 0 & \omega^4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \omega^2 & 0 & \omega^6 \end{bmatrix} \\
 &\times \begin{bmatrix} \omega^0 & 0 & 0 & 0 & \omega^0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega^0 & 0 & 0 & 0 & \omega^0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega^0 & 0 & 0 & 0 & \omega^0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega^0 & 0 & 0 & 0 & \omega^0 \\ \omega^0 & 0 & 0 & 0 & \omega^4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega^1 & 0 & 0 & 0 & \omega^5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega^2 & 0 & 0 & 0 & \omega^6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega^3 & 0 & 0 & 0 & \omega^7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(0) \\ f(1) \\ f(2) \\ f(3) \\ f(4) \\ f(5) \\ f(6) \\ f(7) \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

3.4.5 多項式の積をフーリエ変換で求める

いま, 複素係数の一変数多項式 $f(x), g(x)$ が与えられた時, その積 $f(x)g(x)$ を求めてみよう. 必要なら先頭に係数 0 を付け加えることにより, f, g はともに N 次多項式として良く, それぞれを係数を用いて,

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \sum_{k=0}^N a_k x^k = (a_0, \dots, a_N), \\
 g(x) &= \sum_{k=0}^N b_k x^k = (b_0, \dots, b_N)
 \end{aligned}$$

とすると, その積は

$$(fg)(x) = \sum_{k=0}^{2N} \sum_{j=0}^k a_j b_{k-j} x^k$$

と書くことができる. したがって, $a_k = b_k = 0, N < k \leq 2N$ と定義して,

$$f(x) = a = (a_0, \dots, a_{2N}), \quad g(x) = b = (b_0, \dots, b_{2N})$$

とおくと, fg の k 次の係数 c_k は

$$c_k = \sum_{j=0}^{2N} a_j b_{2N-j}$$

と書けることに注意しよう. すなわち,

$$c_k = (a * b)(k)$$

が成り立つ. 一方, Fourier 変換と合成積の性質より,

$$\widehat{c}(k) = \widehat{(a * b)}(k) = \widehat{a}(k)\widehat{b}(k)$$

であるので, 反転公式を使えば,

$$c_k = \mathcal{F}^*(\widehat{ab})(k)$$

が成り立つ.

目次

第 1 章 Introduction	1
1.1 三角関数	1
1.1.1 微分方程式による三角関数の定義	1
1.1.2 複素変数の指数関数と三角関数	3
1.1.3 逐次近似法	4
1.1.4 逐次近似と Taylor 展開	6
1.2 境界値問題と固有値	7
1.2.1 常微分方程式の境界値問題	7
1.2.2 固有値と固有関数	8
1.2.2.1 Dirichlet 境界値問題の場合	9
1.2.2.2 Neumann 境界値問題の場合	9
1.2.3 スケール変換と固有値	10
1.2.4 周期境界条件と固有値	10
1.2.5 固有空間	12
1.3 Hilbert 空間と Laplacian と固有値の完全性	14
1.3.1 Hilbert 空間	14
1.3.2 Laplacian とその固有値	16
第 2 章 Fourier 級数	19
2.1 S^1 上の Fourier 級数	19
2.1.1 Fourier 級数とは	19
2.1.2 Fourier 級数の例	21
2.1.3 Fourier 級数の収束	25
2.1.3.1 Dirichlet 核と Fejèr 核	26
2.1.3.2 Fourier 展開の一意性	27
2.1.3.3 収束定理と項別微分	28
2.1.3.4 不連続点における振舞い	29
2.1.3.5 Theorem 2.1.15 の証明	30
2.1.4 収束の速さと Gibbs 現象	30
2.1.4.1 Fourier 級数の収束の速さ	31
2.1.4.2 Gibbs 現象	31
2.1.5 最良近似	32
2.1.6 Convolution	33
2.1.7 応用	37
2.1.7.1 微分方程式	37
2.1.7.1.1 線形常微分方程式	37

2.1.7.1.2	線形システム	38
2.1.7.2	おまけ	39
2.2	多次元や一般的な Fourier 級数	41
2.2.1	\mathbb{R} の有界閉区間における直交関数系	41
2.2.2	\mathbb{R}^n の有界領域・閉多様体での直交関数系	44
2.2.2.1	D^2 上の Laplacian	44
2.2.2.2	\mathbb{R}^2 の矩形領域の Laplacian	46
2.2.2.3	S^2 上の Laplacian	46
2.2.3	熱方程式	47
2.2.4	波動方程式	48
2.2.4.1	Katz の問題	48
第 3 章	Fourier 変換	51
3.1	\mathbb{R} 上の Fourier 変換	51
3.1.1	考察	51
3.1.2	例と簡単な性質	52
3.1.3	急減少関数	53
3.1.4	急減少関数での Fourier 変換	53
3.1.4.1	反転公式と Parseval の等式	53
3.1.4.2	Convolution	56
3.1.5	超関数	57
3.1.6	超関数の Fourier 変換	59
3.1.7	超関数の convolution と Fourier 変換	61
3.2	高次元や一般の Fourier 変換	62
3.2.1	\mathbb{R}^n における Fourier 変換	62
3.2.2	Fourier 変換とは何か	63
3.2.3	離散 Fourier 変換	66
3.3	Fourier 変換の応用	68
3.3.1	微分方程式	68
3.3.1.1	定数係数線形常微分方程式	68
3.3.1.2	Laplace 方程式と Poisson 方程式	69
3.3.1.2.1	Poisson kernel	70
3.3.1.3	熱方程式	71
3.3.2	Poisson 和の公式	71
3.3.3	確率論への応用	73
3.3.3.1	中心極限定理	73
3.3.3.2	不確定性原理	75
3.3.4	電気工学	76
3.3.4.1	線形システムと伝達関数	76
3.3.4.2	自己相関関数	76
3.4	離散 Fourier 変換とその応用	77
3.4.1	離散 Fourier 変換の基本的な性質	77
3.4.2	サンプリング定理	79
3.4.3	サンプリング定理の応用	80

3.4.4	高速フーリエ変換	81
3.4.5	多項式の積をフーリエ変換で求める	83