担当教員：宮地 兵衛　研究室：A433　E-mail:miyachi@math.nagoya-u.ac.jp

広義固有空間分解

作成日：　Updated：November 11, 2011　Version：1.1

直和

問題 1. 実線形空間 V の部分集合 W が線形部分空間であることの定義を書け.

定義 1. K を $\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ とする. K 上の線形空間 V の線型部分空間 W_1, W_2 についてその和 $W_1 + W_2$ を次で定義する.

$$W_1 + W_2 = \{\boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2 \in V \mid \boldsymbol{w}_1 \in W_1,\ \boldsymbol{w}_2 \in W_2\}.$$

$W_1 + W_2$ は再び V の線型部分空間となる. さらに, 次の条件を満たすとき, この和を直和とよび, $W_1 \oplus W_2$ と表す：

$$W_1 \cap W_2 = \{\boldsymbol{0}\}.$$

以下, K 上の線形空間を単に線形空間, 線形部分空間を単に部分空間とよぶ.
Caution!　$W_1 + W_2$ と和集合 $W_1 \cup W_2$ を混同してはいけない.

$\mathbb{R}^2$ の標準基底を $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ とし, $\boldsymbol{e}_i$ で生成される部分空間を $\mathbb{R}\,\boldsymbol{e}_i$ で表すと, $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}\,\boldsymbol{e}_1 \oplus \mathbb{R}\,\boldsymbol{e}_2$ である.

問題 2. $\{\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2\}$ を $\mathbb{R}^2$ の基底とする. このとき, $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}\,\boldsymbol{f}_1 \oplus \mathbb{R}\,\boldsymbol{f}_2$ であることを, 次の 2 つのことをチェックすることにより示せ.

(1) $\mathbb{R}^2$ は $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2$ で張られている, すなわち, $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}\,\boldsymbol{f}_1 + \mathbb{R}\,\boldsymbol{f}_2$.

(2) 上の和は直和である, すなわち, $\mathbb{R}\,\boldsymbol{f}_1 \cap \mathbb{R}\,\boldsymbol{f}_2 = \{\boldsymbol{0}\}$.

問題 3. 線形空間 V が $V = W \oplus H$ のように部分空間の直和で表せるとし, V の部分空間 L が $W \cap L = \{\boldsymbol{0}\}$ を満たしていたとする. このとき $L \subset H$ は常に成り立つか? 必ずしも成り立たないのであれば反例を挙げよ.

問題 4. 行列 A が異なる固有値 λ_1, λ_2 を持ったとする. $W_1, W_2 \subset K^n$ をそれぞれ固有値 λ_1, λ_2 に対する固有空間とする. このとき, 和 $W_1 + W_2$ は直和であることを示せ.

3 つ以上の部分空間に対して直和の概念を定義する為に, まず次の問題を考えよう.

問題 5. 線形空間 V の 2 つの部分空間 W_1, W_2 に対し, 次の 3 つの条件が互いに同値であることを示せ.

(1) $W_1 \cap W_2 = \{\boldsymbol{0}\}$ である, つまり $W_1 + W_2$ は直和である.

(2) 任意の $W_1 + W_2$ の元 $\boldsymbol{x}$ に対して, $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2$ $(\boldsymbol{w}_1 \in W_1,\ \boldsymbol{w}_2 \in W_2)$ という表し方が一通りだけである.

(3) $\boldsymbol{w}_1 \in W_1$, $\boldsymbol{w}_2 \in W_2$ に対して, $\boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2 = \boldsymbol{0}$ ならば $\boldsymbol{w}_1 = \boldsymbol{0}$ かつ $\boldsymbol{w}_2 = \boldsymbol{0}$ である.

担当教員：宮地 兵衛　研究室：A433　E-mail:miyachi@math.nagoya-u.ac.jp

定義 2. K 上の線形空間 V の K 線型部分空間 W_i の和 $W_1+\cdots+W_r$ が次の同値な条件のいずれかを満たすとき, この和を直和とよび, $W_1\oplus\cdots\oplus W_r$ と記す.

(1) 任意の $W_1+W_2+\cdots+W_r$ のベクトル $\boldsymbol{x}$ に対して $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{w}_1+\boldsymbol{w}_2+\cdots+\boldsymbol{w}_r$ $(\boldsymbol{w}_i\in W_i,\ i=1,\ldots,r)$ という表し方が一通りだけである.

(2) $\boldsymbol{w}_i\in W_i$ $(i=1,\ldots,r)$ に対して, $\boldsymbol{w}_1+\boldsymbol{w}_2+\cdots+\boldsymbol{w}_r=\boldsymbol{0}$ ならば $\boldsymbol{w}_i=\boldsymbol{0}$ $(i=1,\ldots,r)$ である.

問題 6. V を K 上の n 次元線形空間とするとき, 次の 2 つの条件は同値であることを示せ:

(1) $\boldsymbol{f}_1,\cdots,\boldsymbol{f}_n\in V$ は V の基底をなす.

(2) $V=K\boldsymbol{f}_1\oplus\cdots\oplus K\boldsymbol{f}_n$

直和分解と対角化

以下, 線形空間は $\mathbb{C}$ 上とし, 行列はすべて複素行列とする.

問題 7. ちょうど 2 つの異なる固有値 λ_1,λ_2 のみをもつ n 次正方行列 A を考える. λ_1,λ_2 に対応する固有空間をそれぞれ $W_1,W_2\subset\mathbb{C}^n$ とする. 問題 3 より和 W_1+W_2 は直和であるが, では, $W_1\oplus W_2=\mathbb{C}^n$ のとき行列 A は対角化可能であることを示せ.

n 次正方行列が対角化可能であることと, n 個の一次独立な固有ベクトルを持つことは同値であるが, これをいいかえると次のようになる:

定理 1. n 次複素正方行列 A の固有値 λ の固有空間を

$$W(\lambda)=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{C}^n\mid A\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}\}$$

とおく. $\lambda_1,\ldots,\lambda_r$ を互いに異なる A の全ての固有値とするとき,

$$A\text{ が対角化可能}\Leftrightarrow\mathbb{C}^n=W(\lambda_1)\oplus\cdots\oplus W(\lambda_r).$$

対角化可能ではない行列に対してはこのような $\mathbb{C}^n$ の固有空間分解は得られない. しかし, 固有空間の概念を拡張した広義固有空間の概念を導入すると同様な分解が得られる.

担当教員：宮地 兵衛　研究室：A433　E-mail:miyachi@math.nagoya-u.ac.jp

広義固有空間分解

定理 2. n 次正方行列 A の固有値 λ の広義固有空間を

$$\widetilde{W}(\lambda) = \{x \in \mathbb{C}^n \mid \exists \ell > 0, (A - \lambda E)^\ell \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$$

とおく. $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ を互いに異なる A の全ての固有値とするとき, 常に

$$\mathbb{C}^n = \widetilde{W}(\lambda_1) \oplus \cdots \oplus \widetilde{W}(\lambda_r)$$

が成り立つ. これを n 次正方行列 A に関する $\mathbb{C}^n$ の広義固有空間分解と呼ぶ.

この定理の証明には多項式論が使われる. 詳細については講義や教科書を参照してほしい. 次の問題を解くと, 大体の様子がわかる.

問題 8. 次の 3×3 行列 A について以下の問いに答えよ：

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & -3 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

(1) A の固有多項式を求めよ.

(2) 多項式 $(x-1)^2$ と $x-4$ に対して, 恒等式

$$p(x)\,(x-1)^2 + q(x)\,(x-4) = 1$$

を満たす多項式 $p(x), q(x)$ を求めよ.

(3) 行列 A を各多項式に代入して $A_1 = p(A)\,(A-E)^2$, $A_2 = q(A)\,(A-4E)$ とおくと,

$$A_1 + A_2 = E, \qquad A_1\,A_2 = O$$

が成り立つことを示せ.

(4) $W_1 = A_1(\mathbb{C}^3) \subset \mathbb{C}^3$, $W_2 = A_2(\mathbb{C}^3) \subset \mathbb{C}^3$ とおくと

$$\mathbb{C}^3 = W_1 \oplus W_2.$$

が成り立つことを示せ. (実は $W_1 = \widetilde{W}(4)$, $W_2 = \widetilde{W}(1)$ である.)

問題 9. n 次正方行列 A の広義固有空間分解 $\mathbb{C}^n = \widetilde{W}(\lambda_1) \oplus \cdots \oplus \widetilde{W}(\lambda_r)$ に対して $A(\widetilde{W}(\lambda_i)) \subset \widetilde{W}(\lambda_i)$ が成り立つこと, 則ち, 各固有値の広義固有空間は A 不変な部分空間であることを示せ.

担当教員：宮地 兵衛　研究室：A433　E-mail:miyachi@math.nagoya-u.ac.jp

次の問題は広義固有空間分解が基底変換による行列の簡略化 (=ジョルダン標準形の理論) において重要であること示唆している：

問題 10. A を n 次正方行列とする. $\mathbb{C}^n$ が部分空間 W_1, W_2 によって $\mathbb{C}^n = W_1 \oplus W_2$ と表されて, かつ

$$A(W_1) \subset W_1, \qquad A(W_2) \subset W_2$$

が成り立っているとする. $\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_s\}$ を W_1 の基底, $\{\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_t\}$ を W_2 の基底とし (このとき, $s + t = n$ かつ $\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_s, \boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_t\}$ は $\mathbb{C}^n$ の基底である), n 次正則行列 P を $P = (\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_s, \boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_t)$ で定めると, $P^{-1}AP$ は

$$\begin{pmatrix} B & O \\ O & C \end{pmatrix}$$

の形になることを示せ.