中間試験 (解答)

作成日 : December 23, 2010 Updated : December 23, 2010

平均点は 68 点前後でした. 問題 1 から問題 3 までの解答は省略します.

問題 4. この問題は, 日本の大数学者である高木貞治 (1875 - 1960) 氏の著書「解析概論 (岩波書店)」の第 2 章, 26 節の例 1 (71 頁) にも参照されている, 由緒正しき問題である. ポイントは最大であることをどう導くか, である. 実は, この問題においては二変数関数の極大性を求めることは必要では無いが, それはそれで大事なので点数は与えた.

(ア) 最大値・最小値の定理を用いる方法.

考える三角形 $\triangle ABC$ の 2 辺 BC, AB の長さを x, y とおくと, もう一方の辺 AC の長さは $2L - x - y$ であり, 考えている三角形の成立条件 (三角不等式) から, x, y の範囲は

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 < x < L,\ 0 < y < L,\ L < x + y < 2L\},$$

であることがわかる.

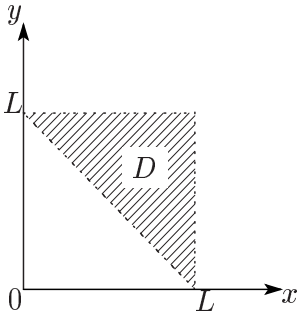

図 1: x, y の範囲 D

この三角形の面積を $S = S(x, y)$ とおく. 長さ x, y の辺の間の角を θ とすると,

$$S(x, y) = \frac{1}{2} xy \sin\theta$$

である. また, 余弦定理

$$\cos\theta = \frac{x^2 + y^2 - (2L - x - y)^2}{2xy}$$

を用いると, この三角形の面積は

$$S(x, y) = \sqrt{L(L - x)(L - y)(x + y - L)}$$

であることがわかる. (ヘロンの公式 (Heron's formula) から $\cdots$ でも良い.)

ここで, 最大値・最小値の定理を用いる為に, 考えている範囲を閉集合にする. 即ち, x, y の範囲として,

$$\overline{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \le x \le L,\ 0 \le y \le L,\ L \le x + y \le 2L\},$$

を考える. すると $S(x, y)$ が $\overline{D}$ で連続であることから Bolzano-Weierstrass の最大値・最小値の定理より, 関数 $S(x, y)$ は $\overline{D}$ において, 最大値と最小値をとる. さらに最大値, 最小値は境界上の値もしくは極値のいずれかである. 境界 $\overline{D} \setminus D$ では $S(x, y) = 0$ であり, 内部 D では $S(x, y) > 0$ である為, $S(x, y)$ は境界で最小値 0 をとり, 内部で最大値をとる. 故に内部 D における $S(x, y)$ の極値を調べる.

微分の形をきれいにするために, 関数 $f(x, y)$ を

$$f(x, y) = S(x, y)^2 = L(L - x)(L - y)(x + y - L)$$

とおき f の極値を調べる. (実際, $S > 0$ から f が極大のとき S も極大である.) f の偏微分を計算すると,

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= L(L-y)(2L-2x-y), \\ f_y(x,y) &= L(L-x)(2L-2y-x). \end{aligned}$$

よって, $f_x(x,y) = f_y(x,y) = 0$ となる D 内の点 (x,y), 即ち極値の候補は, $L-x \neq 0, L-y \neq 0$ に注意すると, $(x,y) = (2L/3, 2L/3)$ のみである. (注: ここで,

$$f_x(x,y) - f_y(x,y) = L(y-x)(y+x-L) = 0$$

から, $x = y$ としている人が多かったが, 上の連立方程式は $(x,y) = (2L/3, 2L/3)$ と求めることができる.) よって, この唯一の極値で面積 $S(x,y)$ は最大値をとらなくてはならない (今回は偶然にも極値が一つなので, 極大であることの議論は必要ない！). よって, $(x,y) = (2L/3, 2L/3)$ の時, 面積は最大であり, 考えている三角形は正三角形である. □

(実際, 点 $(x,y) = (2L/3, 2L/3)$ で $S(x,y)$ は極大である. f の二階微分はそれぞれ

$$\begin{aligned} f_{xx}(x,y) &= -2L(L-x), \\ f_{xy}(x,y) &= f_{yx}(x,y) = L(-3L+2x+2y), \\ f_{yy}(x,y) &= -2L(L-y). \end{aligned}$$

ヘッセ行列の行列式の $(x,y) = (2L/3, 2L/3)$ における値を計算すると

$$f_{xx}(2L/3,2L/3) f_{yy}(2L/3,2L/3) - f_{xy}(2L/3,2L/3)^2 = \frac{L^2}{3} > 0,$$
$$f_{xx}(2L/3,2L/3) = -\frac{2L^2}{3} < 0$$

であり, 二変数関数の極値の判定法より $f(x,y)$ は $(x,y) = (2L/3, 2L/3)$ で極大値をとる.)

(イ) 図形的解釈から一変数関数の最大値問題に帰着する方法.

考える三角形 $\triangle ABC$ の 2 辺 BC, AB の長さを x, y とおくと, (ア) と同様に, x, y の範囲は

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 0 < x < L,\ 0 < y < L,\ L < x+y < 2L\}$$

であることがわかる.

ここで, BC の長さ x を固定して頂点 A を動かすと, その軌跡は長軸が $2L-x$, 短軸が $2\sqrt{L^2 - xL}$ の楕円のある弧である. この軌跡から x を固定した下では頂点が短軸上にあるとき, 即ち, $\overline{AB} = \overline{AC}$ の時, $\triangle ABC$ の面積は最大であることがわかる. これは解答 (ア) における偏微分 $S(x,y)_x = 0$ を解くことに相当する. (注: このとき, 対称性から $\overline{BC} = \overline{AC}$ より, 正三角形のとき面積最大である, とするのは誤りである. というのも, 今, 対称性により求めていることは $S(x,y)_y = 0$ を求めたことに

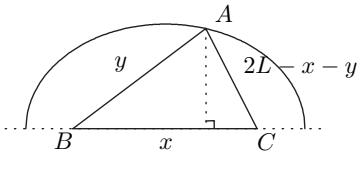

図 2: 頂点 A の軌跡

相当しており, 実際にその点が鞍点であるかもしれないからである. また, その点が実際に極大であることを示したとしても, だからといってその値が D での最大値を与えていることは言えない. 例えば, 本演習の宿題 5-3 は原点で極大でも最大でない例である. これは極大性が局所的な性質しか言っていないことによる.)

そこで $\triangle ABC$ は $\overline{AB} = \overline{AC}$, つまり二等辺三角形と仮定する. すると $BC = x, AB = y = L - x/2$ であり, その面積は

$$S(x) = S(x, L - x/2) = \frac{1}{2}x\sqrt{L^2 - xL}$$

である. この $S(x)$ が最大となる x を求める. $f(x) = S(x)^2$ とおくと $S(x) > 0$ より, $f(x)$ が最大の時 $S(x)$ も最大である. $f(x)$ を微分すると

$$f'(x) = (\frac{1}{4}x^2(L^2 - Lx))' = \frac{1}{2}x(L^2 - Lx) - \frac{1}{4}x^2L = \frac{L}{4}x(2L - 3x).$$

よって, $x = 2L/3$ の時, $f'(x) = 0$ であり, 実際, この点で $f(x)$, 特に $S(x)$ は唯一の最大値をとる. 以上の議論から, 範囲 D における $(x, y) \neq (2L/3, 2L/3)$ である任意の点での値 $S(x, y)$ に対して,

$$S(x, y) \leq S(x, L - x/2) < S(2L/3, 2L/3)$$

である. 特に,$S(x, y)$ は $S(2L/3, 2L/3)$ よりも小さい. よって, 面積は $x = y = 2L/3$ の時, 最大値 $L^2/3\sqrt{3}$ をとる. この時, $\triangle ABC$ は正三角形である. □

(ウ). 相加相乗平均を使う方法.

3 辺の長さを x, y, z とおくと $x + y + z = 2L$. ヘロンの公式から面積の二乗 $S(x, y, z)^2$ は

$$S(x, y, z)^2 = L(L - x)(L - y)(L - z).$$

相加相乗平均の関係より

$$\begin{aligned} S(x, y, z)^2 &= L(L - x)(L - y)(L - z) \\ &\leq \frac{L}{3^3}\{(L - x) + (L - y) + (L - z)\}^3 \\ &= \frac{L}{3^3}\{3L - (x + y + z)\}^3 \\ &= \frac{L^4}{3^3}. \end{aligned}$$

等号が成立する事と, $L - x = L - y = L - z$ である事は必要十分. よって, 面積が最大である三角形は $x = y = z$ の時であり, この時 $\triangle ABC$ は正三角形である. □