担当教員：宮地 兵衛　研究室：A447　E-mail:miyachi@math.nagoya-u.ac.jp

略解 重積分の計算 (2)

問題 1.

(1) 極座標変換 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ を行うと, 変換後の積分領域は

$$D_1 = \left\{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 0 \le \theta \le \frac{\pi}{4},\ 0 \le r \le \frac{a}{\cos\theta}\right\}$$

と

$$D_2 = \left\{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le r \le \frac{a}{\sin\theta}\right\}$$

に分かれるので

$$\int\int_D \frac{dx\,dy}{(a^2+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = \int\int_{D_1} (a^2+r^2)^{-\frac{3}{2}}\, r\,dr\,d\theta + \int\int_{D_2} (a^2+r^2)^{-\frac{3}{2}}\, r\,dr\,d\theta.$$

右辺の第一項を計算すると,

$$\begin{aligned}
\int\int_{D_1} (a^2+r^2)^{-\frac{3}{2}}\, r\,dr\,d\theta &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{\frac{a}{\cos\theta}} (a^2+r^2)^{-\frac{3}{2}}\, r\,dr \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[-(a^2+r^2)^{-\frac{1}{2}}\right]_0^{\frac{a}{\cos\theta}} d\theta \\
&= \frac{1}{a}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(1 - \frac{\cos\theta}{\sqrt{1+\cos^2\theta}}\right) d\theta \\
&= \frac{\pi}{4a} - \frac{1}{a}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{\sqrt{2-t^2}}\,dt \qquad (t = \sin\theta) \\
&= \frac{\pi}{4a} - \frac{1}{a}\cdot\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{12a}.
\end{aligned}$$

同様に

$$\int\int_{D_2} (a^2+r^2)^{-\frac{3}{2}}\, r\,dr\,d\theta = \frac{\pi}{12a}.$$

従って求める積分の値は $\dfrac{\pi}{6a}$.

(2) 極座標変換 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ を行うと, 変換後の積分領域は

$$\{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \le r \le 2,\ 0 \le \theta \le 2\pi\}$$

なので

$$\int\int_D \frac{dx\,dy}{(x^2+y^2)^m} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_1^2 r^{1-2m}\,dr = 2\pi\int_1^2 r^{1-2m}\,dr.$$

従って, $m > 1$ のとき, 求める積分の値は

$$2\pi\left[\frac{r^{2-2m}}{2-2m}\right]_1^2 = \frac{\pi}{1-m}(2^{2-2m}-1).$$

$m = 1$ のとき, 求める積分の値は

$$2\pi\Big[\log r\Big]_1^2 = 2\pi\log 2.$$

担当教員：宮地 兵衛　研究室：A447　E-mail:miyachi@math.nagoya-u.ac.jp

(3) 極座標変換 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ を行うと, 変換後の積分領域は

$$\{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2 \mid r^2 \le \cos 2\theta,\ 0 \le r,\ 0 \le \cos 2\theta\},$$

すなわち

$$\left\{(r,\theta) \in R^2 \;\middle|\; -\frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{\pi}{4},\ 0 \le r \le \sqrt{\cos 2\theta}\right\}$$

なので

$$\begin{aligned}\int\int_D \frac{dx\,dy}{(1+x^2+y^2)^2} &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{\sqrt{\cos 2\theta}} \frac{r\,dr}{(1+r^2)^2} = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left[-\frac{1}{2(1+r^2)}\right]_0^{\sqrt{\cos 2\theta}} d\theta \\ &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2(1+\cos 2\theta)}\right) d\theta = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\sec^2\theta\right) d\theta \\ &= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{4}\Big[\tan\theta\Big]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

(4) $x = ar\cos\theta$, $y = br\sin\theta$ と変数変換すると, 変換後の積分領域は

$$\{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le r \le 1,\ 0 \le \theta \le 2\pi\},$$

ヤコビアンは

$$J(r,\theta) = \begin{vmatrix} a\cos\theta & -ar\sin\theta \\ b\sin\theta & br\cos\theta \end{vmatrix} = abr$$

なので

$$\begin{aligned}\int\int_D (x^2+y^2)\,dx\,dy &= ab\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta)\,r^3\,dr \\ &= a^3b\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\,d\theta\int_0^1 r^3\,dr + ab^3\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\,d\theta\int_0^1 r^3\,dr \\ &= a^3b\cdot\pi\cdot\frac{1}{4} + ab^3\cdot\pi\cdot\frac{1}{4} = \frac{\pi}{4}ab\,(a^2+b^2).\end{aligned}$$

(5) (4) と同様の変数変換を行うと,

$$\begin{aligned}\int\int_D \sqrt{\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)\Big/\left(1+\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)}\,dx\,dy &= ab\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^1 \sqrt{\frac{1-r^2}{1+r^2}}\,r\,dr \\ &= 2\pi ab\int_0^1 \sqrt{\frac{1-r^2}{1+r^2}}\,r\,dr\end{aligned}$$

$s = \sqrt{\dfrac{1-r^2}{1+r^2}}$ と変数変換すると, $r\,dr = \dfrac{-2s\,ds}{(1+s^2)^2}$ なので

$$\begin{aligned}2\pi ab\int_0^1 \sqrt{\frac{1-r^2}{1+r^2}}\,r\,dr &= 2\pi ab\int_0^1 \frac{2s^2\,ds}{(1+s^2)^2} \\ &= 2\pi ab\left(\left[-\frac{s}{1+s^2}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{ds}{1+s^2}\right) \\ &= 2\pi ab\left(-\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}\right) = \pi ab\left(\frac{\pi}{2}-1\right).\end{aligned}$$

担当教員：宮地 兵衛　研究室：A447　E-mail:miyachi@math.nagoya-u.ac.jp

問題 2.

(1) $E = \{(r,\theta) \mid 1 \le r \le 2,\ 0 \le \theta \le 2\pi\}$.（正確には $0 \le \theta < 2\pi$ もしくは $0 < \theta \le 2\pi$ であるが，等号を加えても積分値にはまったく影響がない.）

(2) テイラー展開より $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_i + \cos\theta_i \cdot (r - r_i) - r_i \sin\theta_i \cdot (\theta - \theta_i) \\ y_i + \sin\theta_i \cdot (r - r_i) + r_i \cos\theta_i \cdot (\theta - \theta_i) \end{pmatrix} + [2$ 次以上の項]．よって $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta_i & -r_i \sin\theta_i \\ \sin\theta_i & r_i \cos\theta_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R \\ \Theta \end{pmatrix} + [R, \Theta$の 2 次以上の項]．したがって，$\begin{pmatrix} R \\ \Theta \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos\theta_i & -r_i \sin\theta_i \\ \sin\theta_i & r_i \cos\theta_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R \\ \Theta \end{pmatrix}$ が求める線形写像 F_i である．

(3) (2) より $f : \Delta E_i \to \Delta D_i$ を近似する線形写像 F_i は $F_i : \begin{pmatrix} R \\ \Theta \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = J_i \begin{pmatrix} R \\ \Theta \end{pmatrix}$ と書ける．これは $R\Theta$ 座標系から XY 座標系へ，**面積を** $|\det J_i|$ **倍する**ので $[\Delta D_i]$ は $|\det J_i| \cdot [\Delta E_i]$ で近似される．

(4) もとめる積分 I_m は D 上で関数 $z = 1/(x^2+y^2)^m$ のグラフと平面 $z = 0$ で挟まれる部分の体積に相当する．とくに ΔD_i に制限すれば，そこでの体積は底面が ΔD_i，高さ $1/(x_i^2+y_i^2)^m$ の角柱で近似できる．したがって，もとめる積分の近似式は

$$I_m = \int_D \frac{dxdy}{(x^2+y^2)^m} \approx \sum_{i=1}^{N^2} \frac{1}{(x_i^2+y_i^2)^m} \cdot [\Delta D_i] \qquad (*)$$

である．さらに $[\Delta D_i]$ を $|\det J_i| \cdot [\Delta E_i] = r_i[\Delta E_i]$ で近似すれば，

$$\sum_{i=1}^{N^2} \frac{1}{(x_i^2+y_i^2)^m} \cdot \underline{[\Delta D_i]} \approx \sum_{i=1}^{N^2} \frac{1}{r_i^{2m}} \cdot \underline{|\det J_i| \cdot [\Delta E_i]} = \sum_{i=1}^{N^2} r_i^{1-2m} [\Delta E_i]. \qquad (**)$$

(5) f の (r,θ) におけるヤコビ行列を $J(r,\theta)$ とすれば，

$$I_m = \int_E \frac{1}{r^{2m}} \cdot \underline{|\det J(r,\theta)|\, dr d\theta} = \int_E r^{1-2m} dr d\theta.$$

(6) 略.

問題 3. $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ のなす角を θ $(0 \le \theta \le \pi)$ とすると，

$$[S(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})] = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| \sin\theta = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| \sqrt{1-\cos^2\theta}.$$

右辺に $\cos\theta = (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})/(|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|)$ を代入すれば，求める式が得られる．

問題 4.

(1) $z = f(x_i,y_i) + f_x(x_i,y_i)(x - x_i) + f_y(x_i,y_i)(y - y_i)$.

担当教員：宮地 兵衛　研究室：A447　E-mail:miyachi@math.nagoya-u.ac.jp

(2) 平行四辺形 $S(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{b}_i)$ は上の接平面を ΔD_i の範囲で切り取ったものにほかならない．したがって，ΔS_i が $S(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{b}_i)$ で近似されている．

(3) $[S(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{b}_i)]$ を**問題 3** の公式で書き直そう．$|\boldsymbol{a}_i|^2|\boldsymbol{b}_i|^2 - (\boldsymbol{a}_i \cdot \boldsymbol{b}_i)^2$ を $\boldsymbol{a}_i$，$\boldsymbol{b}_i$ の成分で表し整理すると $(1 + f_x(x_i, y_i)^2 + f_y(x_i, y_i)^2)(\Delta x \Delta y)^2$ となる．よって

$$[S(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{b}_i)] \;=\; \sqrt{|\boldsymbol{a}_i|^2|\boldsymbol{b}_i|^2 - (\boldsymbol{a}_i \cdot \boldsymbol{b}_i)^2} \;=\; \sqrt{1 + f_x(x_i, y_i)^2 + f_y(x_i, y_i)^2} \cdot \Delta x \Delta y.$$

これより面積の近似式は

$$[S] \;\approx\; \sum_{i=1}^{N} [S(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{b}_i)] \;=\; \sum_{i=1}^{N} \sqrt{1 + f_x(x_i, y_i)^2 + f_y(x_i, y_i)^2} \cdot \Delta x \Delta y$$

となる．ここで $\Delta x \Delta y = (\Delta D_i$の面積$)$ であるから，上の式は等式

$$[S] \;=\; \int_D \sqrt{1 + f_x(x, y)^2 + f_y(x, y)^2}\, dxdy$$

を示唆している．

研究． f が滑らかな（＝何度でも偏微分できる）関数であり，かつ D が滑らかな曲線で囲まれた領域の場合，曲面積 $[S]$ と近似値 $\sum_{i=1}^{N}[S(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{b}_i)]$ の誤差はどの程度だろうか？（升目のサイズ ϵ に応じて小さくなると期待される．）

そもそも，曲面積とはどのように定義されるのだろうか？

問題 5. (球面積) 半球面 $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ の面積が $2\pi R^2$ であることを示せば十分．公式に代入し整理すると，半球面の面積は積分 $I = \displaystyle\int_{\{x^2+y^2 \le R^2\}} \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} dxdy$ により与えられることがわかる．極座標変換を施すと，

$$I = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \frac{R}{\sqrt{R^2 - r^2}}\, rdr = 2\pi \int_R^0 \frac{R}{\sqrt{t^2}} \cdot (-t\, dt) = 2\pi \int_0^R R\, dt = 2\pi R^2.$$

ただし，$t^2 = R^2 - r^2$ $(0 \le t \le R)$ とおいた．

前回の宿題の略解

宿題 11-1

(1)

$$\int_0^1 dy \int_0^{\arccos y} f(x, y) dx.$$

(2)

$$\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx.$$

担当教員：宮地 兵衛　研究室：A447　E-mail:miyachi@math.nagoya-u.ac.jp

(3)

$$\int_{-2}^{0} dx \int_{-1}^{x+1} f(x,y)dy + \int_{0}^{2} dx \int_{x-1}^{1} f(x,y)dy.$$

宿題 11-2

(1) 積分の順序を変更して計算すると,

$$\int_0^a dr \int_{-\arccos\frac{r}{a}}^{\arccos\frac{r}{a}} r\,d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{a\cos\theta} r\,dr = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{2}r^2\right]_0^{a\cos\theta} d\theta$$
$$= \frac{a^2}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta\,d\theta = \frac{a^2}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2\theta + 1}{2} d\theta = \frac{\pi}{4}a^2.$$

(2) 積分の順序を変更して計算すると,

$$\int_1^2 dx \int_{\frac{1}{x}}^2 y\,e^{xy}\,dy = \int_{\frac{1}{2}}^1 dy \int_{\frac{1}{y}}^2 y\,e^{xy}\,dx + \int_1^2 dy \int_1^2 y\,e^{xy}\,dx$$
$$= \int_{\frac{1}{2}}^1 \left[e^{xy}\right]_{\frac{1}{y}}^2 dy + \int_1^2 \left[e^{xy}\right]_1^2 dy$$
$$= \int_{\frac{1}{2}}^1 (e^{2y} - e)\,dy + \int_1^2 (e^{2y} - e^y)\,dy = \frac{e^2}{2}(e^2 - 2).$$