担当教員：宮地 兵衛　研究室：A447　E-mail:miyachi@math.nagoya-u.ac.jp

ケイリー・ハミルトンの定理（略解）

作成日：December 10, 2010　Version：1.3

問題 1.

(1) 固有値を与える方程式は $\det(\lambda E - A) = 0 \iff \lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad - bc) = 0$.

(2) α の固有ベクトル $\boldsymbol{u}_1$ および β の固有ベクトル $\boldsymbol{u}_2$ が平行だと仮定する．すなわち，ある定数 $k \neq 0$ が存在して $\boldsymbol{u}_1 = k\boldsymbol{u}_2$ と書けたとする．このとき $A\boldsymbol{u}_1 = kA\boldsymbol{u}_2 = k\beta\boldsymbol{u}_2 = \beta\boldsymbol{u}_1$ となるが，これは $\alpha \neq \beta$ に矛盾.

(3) (2) より，固有ベクトルの中から基底 $\{\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2\}$ で $A\boldsymbol{u}_1 = \alpha\boldsymbol{u}_1$, $A\boldsymbol{u}_2 = \beta\boldsymbol{u}_2$ を満たすように選ぶことができる．このとき，$(\alpha E - A)(\beta E - A)\boldsymbol{u}_2 = (\alpha E - A)(\beta\boldsymbol{u}_2 - A\boldsymbol{u}_2) = \boldsymbol{0}$. 同様に，$(\alpha E - A)(\beta E - A)\boldsymbol{u}_1 = (\beta E - A)(\alpha E - A)\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{0}$. いま，任意のベクトル $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ は $\boldsymbol{x} = s\boldsymbol{u}_1 + t\boldsymbol{u}_2$ の形で表されるから，線形性より $(\alpha E - A)(\beta E - A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ となる.

(4) (3) より，$(\alpha E - A)(\beta E - A) = O$ でなくてはならない．左辺を展開すると $A^2 - (\alpha + \beta)A + \alpha\beta E = O$. 解と係数の関係より，$\alpha + \beta = a + d$, $\alpha\beta = ad - bc$.

研究 (a) $\alpha = \beta$ の場合も，**問題 1** の状況から $\alpha \neq \beta \to \alpha$ とした極限として解釈してみよ.
(b) 上の議論を n 次正方行列で，固有値が n 個の異なる実数となる場合に適用せよ.
(c) 一般に行列の固有値は複素数値をとる．その場合も，複素線形空間 $\mathbb{C}^n$ を考えれば同様の議論ができることを確かめよ.

問題 2. (固有多項式による n 乗計算)

(1) $F_A(x) = \det(xE - A) = \det\begin{pmatrix} x-3 & -2 \\ -2 & x \end{pmatrix} = x^2 - 3x - 4$. よって $\lambda_1 = -1 < \lambda_2 = 4$.

(2) ケイリー・ハミルトンの定理より $F_A(A) = A^2 - 3A - 4E = O$ が成り立つ．したがって $A^4 - 3A^3 - 4A^2 = A^2(A^2 - 3A - 4E) = O$. また，多項式の除法により $x^5 = (x^2 - 3x - 4)(x^3 + 3x^2 + 13x + 51) + 205x + 204$ となるので，
$A^5 = 205A + 204E = \begin{pmatrix} 819 & 410 \\ 410 & 204 \end{pmatrix}$.

(3) $x^n = (x^2 - 3x - 4)Q(x) + ax + b = (x+1)(x-4)Q(x) + ax + b$ に $x = -1$ を代入して，$(-1)^n = -a + b$. 同様に $x = 4$ を代入して，$4^n = 4a + b$. この連立方程式から，$a = (4^n - (-1)^n)/5$, $b = (4^n + 4(-1)^n)/5$ を得る.

(4) ケイリー・ハミルトンの定理より，$A^n = F_A(A)Q(A) + aA + bE = aA + bE$. これを計算して，$A^n = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 4^{n+1} + (-1)^n & 2(4^n - (-1)^n) \\ 2(4^n - (-1)^n) & 4^n + 4(-1)^n \end{pmatrix}$.

担当教員：宮地 兵衛　研究室：A447　E-mail:miyachi@math.nagoya-u.ac.jp

問題 3. a_0E_n を移項して, $(-a_0)^{-1}A^{-1}$ を掛ける.

問題 4.

(1) A の固有多項式は $(x-1)^2(x-2)$ となる. $G_A(x)=(x-1)^2(x-2)$ とおく. ケイリーハミルトンの定理より $G_A(A)=O$ となり題意を満たす.

(2) すでに見たので省略.

(3) $M_A(x):=(x-1)(x-2)$ とおくと, 具体的な計算により $(A-E)(A-2E)=O$ が分かる.

(4) $A^2-3A+2E=O$ より $X:=\frac{1}{2}(3E-A)$ は A にかけると単位行列になるので A の逆行列である. 従って X を計算して

$$A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&3&1\\1&-1&1\end{pmatrix}.$$

先週の宿題

宿題 8-1. (1) 固有方程式 $\det(\lambda E-A)=0$ を解いて，$\lambda=\pm5$.
$\lambda=5$ の固有ベクトルとして $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$，$\lambda=-5$ の固有ベクトルとして $\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ がとれる.
(2) $P=\begin{pmatrix}1&2\\2&-1\end{pmatrix}$ とすればよい．このとき，$B=P^{-1}AP=\begin{pmatrix}5&0\\0&-5\end{pmatrix}$.
(3) $\begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x_{n-1}\\y_{n-1}\end{pmatrix}=A^{n-1}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ である．一般に

$$A^n=PB^nP^{-1}=5^{n-1}\begin{pmatrix}1+4(-1)^n&2(1-(-1)^n)\\2(1-(-1)^n)&4+(-1)^n\end{pmatrix}$$

が成り立つから，$x_n=5^{n-2}(3-2(-1)^n)$，$y_n=5^{n-2}(6+(-1)^n)$.
　別解は,

$$\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\frac{3}{5}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+\frac{1}{5}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$$

に着目して $A^{n-1}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ を計算する.

宿題 8-2

(1) $\det(\lambda E-A)=(\lambda-1)^2(\lambda-2)$ となるから.

担当教員：宮地 兵衛　研究室：A447　E-mail:miyachi@math.nagoya-u.ac.jp

(2) $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ と置くとき，$\boldsymbol{u} \in W_1 \iff A\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u} \iff x + y + z = 0$ となる．これは原点を通る平面の方程式である．

(3) 同様にして，$\boldsymbol{u} \in W_2 \iff A\boldsymbol{u} = 2\boldsymbol{u} \iff 2x + y = 0$ かつ $z = 0$．これは原点を通る直線の方程式である．

(4) たとえば $\left\{ \boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ とできる．

(5) $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3\}$ は基底なので，1 次独立．とくに $\det P = |\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3| \neq 0$.

(6) $A\boldsymbol{u}_i = \boldsymbol{u}_i,\ i = 1, 2$ と $A\boldsymbol{u}_3 = 2\boldsymbol{u}_3$ より

$$AP = [A\boldsymbol{u}_1, A\boldsymbol{u}_2, A\boldsymbol{u}_3] = [\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, 2\boldsymbol{u}_3] = [\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3] \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = PB.$$

(プリント 108-2 参照!)

(7) 上の基底の場合 $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ となる．このとき $P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$,

$B = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

(8) $A^n = PB^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 2 - 2^n & 1 - 2^n & 1 - 2^n \\ -2 + 2^{n+1} & -1 + 2^{n+1} & -2 + 2^{n+1} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.