担当教員：宮地 兵衛　研究室：A447　E-mail:miyachi@math.nagoya-u.ac.jp

線形空間の基底、線形写像の表現行列

作成日：October 11, 2010　Updated：December 02, 2010　Version：1.3

線形空間の基底とは「座標系」を定めるための基準となるベクトルの組です．その「座標系」はわれわれの都合に応じて好き勝手に選ぶことができます．

今後の予定

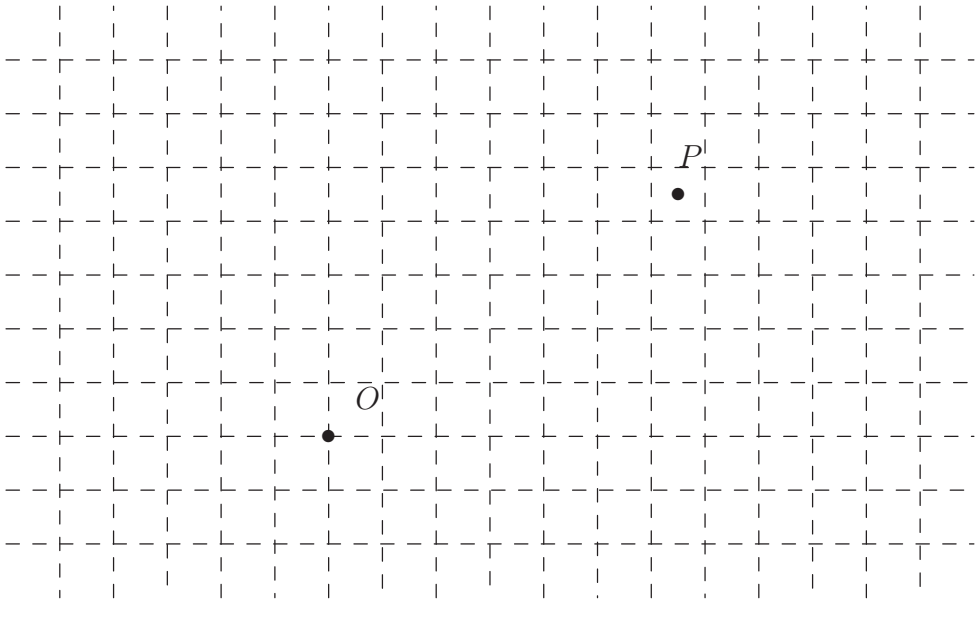
- 12/1：表現行列と対角化
- 12/8：中間試験

基底と座標

問題 1. このプリントのこのページを平面と思い，Π で表す．

(1) 下の点 O を Π の原点と定め，これを始点とする同一直線上にないベクトル $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$ を自由に描け．

(2) 下の点 P に対し，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = a_1\boldsymbol{u}_1 + a_2\boldsymbol{u}_2 = (\boldsymbol{u}_1\ \ \boldsymbol{u}_2)\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ なる実数 a_1, a_2 が**ただひと組**定まるはずである．そのような a_1, a_2 の大体の値（小数点以下 1 桁ぐらい）を求めよ．



あなたが作った $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = a_1\boldsymbol{u}_1 + a_2\boldsymbol{u}_2 = (\boldsymbol{u}_1\ \ \boldsymbol{u}_2)\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ という関係式は，「$\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2$ というベクトルを単位系として測った点 P の座標値が $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ だった」と解釈できる．

担当教員：宮地 兵衛　研究室：A447　E-mail:miyachi@math.nagoya-u.ac.jp

このように，**平面全体に一意な座標値を与えるベクトルの組** $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2\}$ を平面の**基底**と呼ぶ．同じベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ も，別の誰かが選んだ基底 $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}$ を用いれば

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (\boldsymbol{u}_1\ \boldsymbol{u}_2)\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = (\boldsymbol{v}_1\ \boldsymbol{v}_2)\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = (\text{基　底})\begin{pmatrix} \text{座} \\ \text{標} \\ \text{値} \end{pmatrix} \quad \cdots (*)$$

のように，異なる表現をもつ．これは，同じモノの長さを cm で測るか，inch で測るか，といった状況と似ている．

問題 2. (異なる基底の関係)　「別の誰か」Joe さんの基底 $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}$ をあなたの基底で測ったところ，次のようになった：

$$\boldsymbol{v}_1 = (\boldsymbol{u}_1\ \boldsymbol{u}_2)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = (\boldsymbol{u}_1\ \boldsymbol{u}_2)\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

ある正方行列 P が存在して，上の式 $(*)$ において $(\boldsymbol{v}_1\ \boldsymbol{v}_2) = (\boldsymbol{u}_1\ \boldsymbol{u}_2)P$ および $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ を満たすことを示せ．

基底の変換． $\mathbb{R}^n$ のベクトル $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ が異なる基底 $\{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n\}$ と $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ で

$$\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{u}_1\ \ldots\ \boldsymbol{u}_n)\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = (\boldsymbol{v}_1\ \ldots\ \boldsymbol{v}_n)\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = (\text{基　底})\begin{pmatrix} \text{座} \\ \text{標} \\ \text{値} \end{pmatrix}.$$

と表されたとする．このとき，ある n 次正則行列 P が存在して，

$$(\boldsymbol{u}_1\ \ldots\ \boldsymbol{u}_n)P = (\boldsymbol{v}_1\ \ldots\ \boldsymbol{v}_n), \quad P^{-1}\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

基底の変換も，長さの単位変換と考え方はまったく同じである．単位が k 倍されると数値が $1/k$ 倍されるように，基底が「右から P 倍」されると座標値は「左から P^{-1} 倍」される．

基底となる条件

問題 3. $\mathbb{R}^3$ 上のベクトルを以下のように定める：

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{w}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{w}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

担当教員：宮地 兵衛　研究室：A447　E-mail:miyachi@math.nagoya-u.ac.jp

(1) $\mathbb{R}^3$ のベクトル $\begin{pmatrix}12\\9\\5\end{pmatrix}$ について，ベクトルの組 $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$, $\{\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\boldsymbol{u}_3\}$, $\{\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2\}$ および $\{\boldsymbol{w}_1,\boldsymbol{w}_2,\boldsymbol{w}_3,\boldsymbol{w}_4\}$ のそれぞれを用いた 1 次結合の形で表せ.（表せないこともありうる.）例えば，適当な数字の組 (d_1,d_2,d_3,d_4) を見つけて，

$$\begin{pmatrix}12\\9\\5\end{pmatrix} = d_1\boldsymbol{w}_1 + d_2\boldsymbol{w}_2 + d_3\boldsymbol{w}_3 + d_4\boldsymbol{w}_4$$

の形で書き表せ.

(2) ベクトルの組 $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$, $\{\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\boldsymbol{u}_3\}$, $\{\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2\}$ および $\{\boldsymbol{w}_1,\boldsymbol{w}_2,\boldsymbol{w}_3,\boldsymbol{w}_4\}$ の中で，$\mathbb{R}^3$ の基底になっているものを選べ．基底とならないものについては，その理由を考えよ.

基底の条件（定義）. $\mathbb{R}^n$ の基底とは次の 2 点を満たすベクトルの組 $\{\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\ldots,\boldsymbol{x}_n\}$ である：
(B1) その基底で測った座標値は，必ずひと通りに決まる（$\Longleftrightarrow$ **一次独立性**:）

$$a_1\boldsymbol{x}_1 + a_2\boldsymbol{x}_2 + \cdots + a_n\boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{0} \Rightarrow a_1 = \cdots = a_n = 0.$$

(B2) その基底の一次結合で，$\mathbb{R}^n$ のすべてのベクトルが表示できる:

$$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \boldsymbol{x} = b_1\boldsymbol{x}_1 + \cdots b_n\boldsymbol{x}_n, (b_1,\ldots,b_n \in \mathbb{R}) \text{ と書ける.}$$

1 次変換の表現行列

問題 4. (基底を用いた 1 次変換の表現) 線形写像 $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ が与えられているのだが，うっかり $\mathbb{R}^2$ に描かれていた xy 座標系を消してしまい，原点以外の座標がわからなくなってしまった．復元には相当な手間がかかるので，平面 $\mathbb{R}^2$ に新たに基底（平行でない 2 ベクトル）$\{\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2\}$ をとり，座標系を定めることにした.

(1) f は $f(\boldsymbol{u}_1) = 2\boldsymbol{u}_1$，$f(\boldsymbol{u}_2) = 3\boldsymbol{u}_2$ を満たしていた．このとき，任意の $\boldsymbol{x} = a_1\boldsymbol{u}_1 + a_2\boldsymbol{u}_2$ にたいし $f:\boldsymbol{x} \mapsto f(\boldsymbol{x})$ が $f:(\boldsymbol{u}_1\ \ \boldsymbol{u}_2)\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix} \mapsto (\boldsymbol{u}_1\ \ \boldsymbol{u}_2)A\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}$ と表されるような 2 次正方行列 A を求めよ.

(2) $f(\boldsymbol{u}_1) = \boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2$，$f(\boldsymbol{u}_2) = -\boldsymbol{u}_1$ を満たす場合の A は何か？

(3) 別の基底 $\{\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2\}$ が，ある正則行列 P により

$$(\boldsymbol{v}_1\ \ \boldsymbol{v}_2) = (\boldsymbol{u}_1\ \ \boldsymbol{u}_2)P$$

と書けている．$\boldsymbol{x} = b_1\boldsymbol{v}_1 + b_2\boldsymbol{v}_2$ とするとき，$f:(\boldsymbol{v}_1\ \ \boldsymbol{v}_2)\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix} \mapsto (\boldsymbol{v}_1\ \ \boldsymbol{v}_2)B\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}$ を満たす 2 次正方行列 B は $P^{-1}AP$ で与えられることを示せ.

担当教員：宮地 兵衛　研究室：A447　E-mail:miyachi@math.nagoya-u.ac.jp

問題 4 でいう行列 A は，$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ の基底 $\{\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2\}$ に関する**表現行列**と呼ばれる．同じ線形写像でも，その表現行列は基底の取り方に依存する．そのため，きれいな表現行列が得られるように，基底を上手に選ぶ方法がいくつか知られている．次週のテーマ「**対角化**」は，その典型例である．表現行列の基底の取り方に対する**依存性**について、実は、表現行列の取り方は**共役**を除いて一意的である．ここで行列 A,B が共役とは、ある正則行列 P が存在して、$B=PAP^{-1}$ を満たすときをいう．問題 4 はこのことも述べている．

問題 5. **問題 4** において，うっかり消される前の xy 座標を復元したところ，実は標準基底 $\left\{\boldsymbol{e}_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{e}_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$ により $\boldsymbol{u}_1=(\boldsymbol{e}_1\ \ \boldsymbol{e}_2)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{u}_2=(\boldsymbol{e}_1\ \ \boldsymbol{e}_2)\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ と書けていた．f が**問題 4**(1) の条件を満たしていた場合，$f:\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\mapsto B\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ となる行列 B を求めよ．また，B^n $(n\in\mathbb{N})$ を求めよ．

今週の宿題

宿題 7-1. Joe さんが $\mathbb{R}^2$ のある直線 ℓ について調べたところ，基底 $\left\{\boldsymbol{e}_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{e}_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$ を用いて

$$\ell\ =\ \left\{x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2\in\mathbb{R}^2\ :\ x-3y=1\right\}$$

と書けることがわかった．一方，Bernard さんが別の基底 $\left\{\boldsymbol{u}_1=\begin{pmatrix}a\\c\end{pmatrix},\boldsymbol{u}_2=\begin{pmatrix}b\\d\end{pmatrix}\right\}$ を用いて直線 ℓ を調べたところ，

$$\ell\ =\ \left\{s\boldsymbol{u}_1+t\boldsymbol{u}_2\in\mathbb{R}^2\ :\ s=2\right\}$$

を満たしていた．

(1) $\boldsymbol{x}=x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2=s\boldsymbol{u}_1+t\boldsymbol{u}_2$ と表すとき，x,y をそれぞれ s,t を用いて表せ．

(2) Bernard さんの基底 $\{\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2\}$ が互いに直行するベクトルであると仮定した場合，$\{\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2\}$ として考えられる候補をすべて求めよ（無限にある）．

(3) さらに $\boldsymbol{u}_1$ と $\boldsymbol{u}_2$ の長さが一致すると仮定した場合，$\{\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2\}$ の候補をすべて求めよ．

宿題 7-2. 線形写像 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ が $f:\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\longmapsto\begin{pmatrix}2x+98y\\100y\end{pmatrix}$ で与えられている．

(1) f の標準基底 $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2\}$ に関する表現行列 A はなにか？（答えのみでよい）

(2) 別の基底 $\{\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2\}$ を用いたところ，

$$(\boldsymbol{e}_1\ \ \boldsymbol{e}_2)\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}\ =\ (\boldsymbol{u}_1\ \ \boldsymbol{u}_2)\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\quad (\boldsymbol{e}_1\ \ \boldsymbol{e}_2)\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\ =\ (\boldsymbol{u}_1\ \ \boldsymbol{u}_2)\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$$

が成立した．このとき，f の基底 $\{\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2\}$ に関する表現行列 B を求めよ．

担当教員：宮地 兵衛　研究室：A447　E-mail:miyachi@math.nagoya-u.ac.jp

(3) $n \in \mathbb{N}$ に対し，A^n を求めよ．

(4) 直線 $\ell_0 : x = 0$（y 軸）にたいし，直線 ℓ_n $(n \in \mathbb{N})$ を帰納的に $\ell_n = f(\ell_{n-1})$ $(n \in \mathbb{N})$ で定める．このとき，ℓ_n $(n \in \mathbb{N})$ のパラメーター表示を求めよ．

(5) ℓ_n は原点を通る直線であるが，その傾きはある一定値に近づく．その値はなにか？

お話: 群?

前回のお話 (問題 8-12) のつづきである．そこで登場した集合 G は、単に集合というだけでなく、いくつか良い性質を持っている:

問題 6. 次を示せ:

(1) $\forall X, Y \in G; XY \in G.$

(2) (単位行列 (元)) $\exists I \in G$

(3) $\forall X \in G; \exists Z \in G; XZ = I.$

$S_4 := \{\sigma \mid \sigma$は $\{1, 2, 3, 4\}$ の置換.$\}$ とする．

1 が 2 に移り, 2 が 3 に移り, 3 が 1 に移り, 4 が 4 に移る置換を, 上段を移す前, 下段を行き先として

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

のように書く．

問題 7.

(1) S_4 にはいくつ元があるか？

(2) 次の写像の合成は何になるか？

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

問題 8. 次を示せ:

(1) $\forall X, Y \in S_4; X \circ Y \in S_4.$

(2) (恒等写像) $\exists I \in S_4.$

(3) $\forall X \in S_4; \exists Z \in S_4; X \circ Z = I.$