担当教員：宮地 兵衛　研究室：A447　E-mail:miyachi@math.nagoya-u.ac.jp

2 変数関数の極大と極小

作成日：October 26, 2010　Updated：November 9, 2010　Version：1.3

● **以下で扱う関数はすべて，必要なだけ偏微分できるものとする．**

問題 1.（極大・極小の判定：1 変数関数の場合） $f(x) = e^{\sin^2 x}$ とする．このとき，$f(x)$ は $x = 0$ において極小となることを示せ．(Hint: 2 次のテイラー多項式を考えよ．)

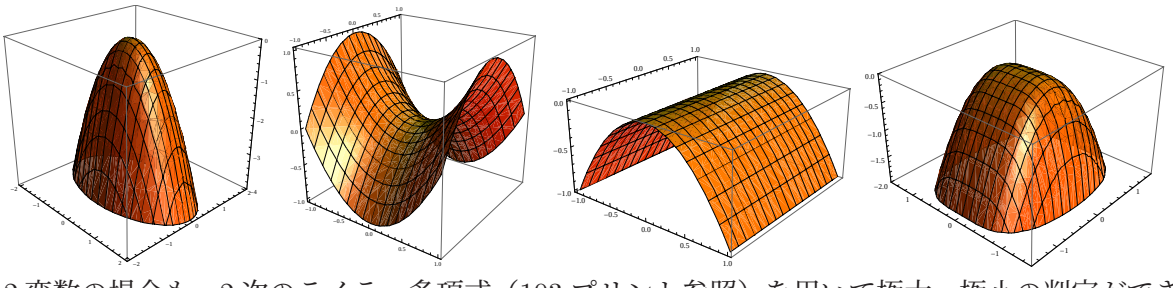
2 変数の極大と極小

定義 1. 2 変数関数 $z = f(x, y)$ が $(x, y) = (p, q)$ で**極大（極小）**とは，(p, q) を中心とする十分近くで $f(p, q)$ が $f(x, y)$ の唯一の最大値（最小値）になっているときを言う．

厳密には、ある $\epsilon > 0$ が存在して (p, q) 以外の勝手な $B((p, q), \epsilon)$ の点 (x, y) に対して $f(x, y) < f(p, q)$ が成り立つとき，f は点 (p, q) で極大となるという．ここで $B((p, q), r)$ は中心 (p, q)，半径 $r > 0$ の円盤内部のこと: $B((p, q), r) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - p)^2 + (y - q)^2 < r\}$．$f$ が点 (p, q) において極大もしくは極小となるとき、値 $f(p, q)$ を極値という．

例． 「極値かどうか」は，関数のグラフの局所的な形状を調べないと判定できない：

(1) $z = -(x^2 + 3y^2)$　(2) $z = x^2 - y^2$　(3) $z = -x^2$　(4) $z = -(x^2 + y^4)$



2 変数の場合も，2 次のテイラー多項式（103 プリント参照）を用いて極大・極小の判定ができる場合がある．いま，$z = f(x, y)$ の $(x, y) = (p, q)$ における 2 次のテイラー展開が

$$
\begin{aligned}
f(x, y) &= C + A(x - p) + B(y - q) \quad \text{（ここまでで 1 次近似，接平面の式）} \\
&\quad + \frac{1}{2!}\{a(x - p)^2 + 2b(x - p)(y - q) + c(y - q)^2\} + [\text{3 次以上の項}] \quad \cdots (*)
\end{aligned}
$$

で与えられたとする．ただし，

$$
\begin{aligned}
C &= f(p, q), \quad A = f_x(p, q), \quad B = f_y(p, q) \\
a &= f_{xx}(p, q), \quad b = f_{xy}(p, q), \quad c = f_{yy}(p, q)
\end{aligned}
$$

である．もし $(x, y) = (p, q)$ においてこの関数が極値をもつならば，そこでの接平面は水平な定数関数 $z = C$ でなくてはならない．すなわち，$A = B = 0$ でなくてはならない（**必要条件**）．以下この条件のもと，$f(x, y)$ が極値をもつための条件を 2 階導関数の値 a, b, c を通してみていこう．

問題 2. 上の式 $(*)$ で $A = B = 0$ を仮定し，次の問いに答えよ．

(1) 変数変換 $X = x - p$，$Y = y - q$, $Z = z - C$ を施し，$(*)$ を $Z = F(X, Y)$ の形に書き直せ．

担当教員：宮地 兵衛　研究室：A447　E-mail:miyachi@math.nagoya-u.ac.jp

(2) 一般に，2 次式 $G(X,Y) = aX^2 + 2bXY + cY^2$ を考える．この関数が $(X,Y) \neq (0,0)$ のとき，常に $G(X,Y) > 0$ となるための a，b，c の必要十分条件は「$a > 0$ かつ $ac - b^2 > 0$」であることを示せ．（Hint: 平方完成，もしくは $t = X/Y$ として 2 次関数の問題に帰着させる.）

定理 1.　2 階導関数による極値の判定法．仮定: $f(x,y)$ は考えている定義域 (領域)$M \subset \mathbb{R}^2$ で C^2 級と仮定する．[a] 式 $(*)$ において $A = B = 0$ $(\Longleftrightarrow f_x(p,q) = f_y(p,q) = 0)$ と仮定する．このとき，

$$ac - b^2 \;=\; f_{xx}(p,q)f_{yy}(p,q) - f_{xy}(p,q)^2$$

の値に応じて，次のことがわかる：

(1) $ac - b^2 > 0$ かつ $a < 0 \implies f$ は $(x,y) = (p,q)$ で**極大**

(2) $ac - b^2 > 0$ かつ $a > 0 \implies f$ は $(x,y) = (p,q)$ で**極小**

(3) $ac - b^2 < 0 \implies f$ は $(x,y) = (p,q)$ で**極値にならない（鞍点）**

(4) $ac - b^2 = 0 \implies$ さらに調べないと分からない.

[a] f が M で C^1 級とは，f_x, f_y が共に連続となることを言う．f が M で C^2 級とは，$f_{xx}, f_{xy}, f_{yx}, f_{yy}$ がすべて連続のときを言う.

参考　ちなみに $ac - b^2$ は行列

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} f_{xx}(p,q) & f_{xy}(p,q) \\ f_{yx}(p,q) & f_{yy}(p,q) \end{pmatrix}$$

の行列式である．これを**ヘッシアン**と呼ぶ．3 変数の場合もこれに対応する行列の行列式の符号を計算することで，極値を探すことができる.

問題 3. 次の関数について 2 次テイラー多項式を計算し，$(*)$ 式における係数 a，b，c を決定せよ．さらに，原点 $(0,0)$ において極値をもつか判定せよ.

(1) $z = f(x,y) = -xy$　　(2) $z = f(x,y) = x^2 - xy + y^2$

(3) $z = f(x,y) = \sqrt{1 + x^2 + y^2}$　　(4) $z = f(x,y) = \cos(x+y)$

(5) $z = f(x,y) = (x + y^2)e^{x+y}$

問題 4. 関数 $z = f(x,y) = x^2 - 3xy + 3y^2 + 4x - 9y$ の極値を全て求めよ.

今週の宿題

宿題 5-1.　関数 $f(x) = x^2 \sin x - x^3 e^x$ が原点で極大値・極小値をもつか判定せよ.（**問題 1** のように，f の原点におけるテイラー多項式を必要な次数まで求めた上で，その関数の形をもとに判定すること.）

宿題 5-2.　関数 $z = f(x,y) = x^3 - 6xy + 2y^3$ の極値を全て求めよ.

宿題 5-3.　$f(x,y) = (\sqrt{x^2 + y^2} - 1)^2$ の極値を全て求めよ．(微分可能でない点があることに注意!)

担当教員：宮地 兵衛　研究室：A447　E-mail:miyachi@math.nagoya-u.ac.jp

パラドックス

問題 5. 2 変数関数 f を次で定義する.

$$f(x,y) := \begin{cases} x^2+y^2-6x^2y^2(x^2+y^2)^{-1}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(1) 次を確認せよ.

$$f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0, f_{xx}(0,0) = 2$$

$$f_{xy}(0,0) = f_{yx}(0,0) = 0, f_{yy}(0,0) = 2.$$

(2) 以下の議論が正しいかどうか吟味せよ (どこに問題があったか？ペロンと分かるように!):

> このプリントの記号で $a = 2, ac - b^2 = 4$ となり 2 階導関数による極値判定法より $f(x,y)$ は $(0,0)$ で極小値 $f(0,0) = 0$ をとる. よって, 勝手な実数 $\alpha \neq 0$ に対して
>
> $$0 = f(0,0) < f(\alpha,\alpha) = -\alpha^2$$
>
> が成立し, 特に 0 は負の数より真に小さい.

パラドックスに関する本をひとつ紹介する:
Martin Gardner(マーチン ガードナー, 1914 - **2010.5.22**), 竹内郁雄訳, Aha!ゴッチャゆかいなパラドックス, 日経サイエンス, ISBN 4-532-06231-4

(1) 「クレタ人は、嘘つきである」とエピメニデス (クレタ人!) は言った.

(2) 床屋のパラドックス: ある村の床屋は自分で髭をそらない村人すべての人の髭だけを剃ることになっている. では、この床屋自身の髭は誰が剃るのか？(床屋は実は女性だった?)

(3) ヒルベルトの無限ホテルのパラドックス: 無限に部屋のあるホテルは、満室であってもそれぞれ n 番目の客室の客に $n+m$ 番目の客室に移ってもらうことにより、さらに m 人の客を泊めることができる.

といった命題が面白いと感じた人にはおすすめである.