担当教員：宮地 兵衛　研究室：A447　E-mail:miyachi@math.nagoya-u.ac.jp

1変数関数の凹凸とテイラー展開

作成日：October 19, 2010　Version：1.2

テイラー展開を用いて1変数関数のグラフの凹凸や極値の判定などができるようになることが目的です．次回は、2変数関数! 基礎から積み上げよう!

今後の予定

- 11/10：2変数関数の極大・極小.
- 11/17：線形写像

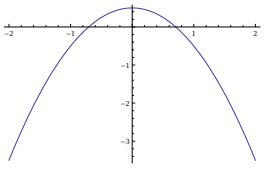
11月10日（水）に理学部1年生を対象とした分属のための「数理学科説明会」を開催します.

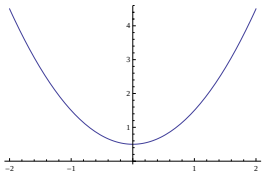
定義 1. (関数の極値) I の点 $c \in I$ を考える.

(1) 点 c を含む開区間 $U \subset I$ が存在して、「任意の $x \in U$, $x \neq c$ に対して $f(x) < f(c)$ が成り立つ」とき、関数 $f(x)$ は $x = c$ で極大であるという.

(2) 点 c を含む開区間 $U \subset I$ が存在して、「任意の $x \in U$, $x \neq c$ に対して $f(x) > f(c)$ が成り立つ」とき、関数 $f(x)$ は $x = c$ で極小であるという.

補足 1. 上で述べたのが極値の厳密な定義である. 多くの場合、上の様に「点 c を含む開区間 $U \subset I$ が存在して、任意の $x \in U$ に対して...」という文章を、「点 c の近傍で...」と省略して書く.

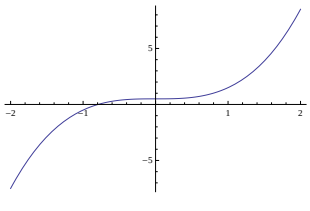




左のグラフは両方とも $x = 0$ で極値である. 極値の前後で、導関数 $f'(x)$ の正負が変わっていることに注目せよ. この事実の帰結として、関数の極値に関して、以下の定理が知られている.

定理 1. 微分可能な関数 $f(x)$ が点 $x = c$ で極値を取るとき、$f'(c) = 0$ が成り立つ.

右のグラフが示す通り、$f'(c) = 0$ が成り立っていても、$f(x)$ が $x = c$ で極値を取らない場合があることに注意せよ. $x = c$ で極値となるのは、この点の前後で導関数 $f'(x)$ の正負が変わるときである.



関数の凹凸

関数 $f(x)$ が I 上微分可能であるとする. 点 $x = c \in I$ での $f(x)$ の接線は $g(x) = f'(c)(x - c) + f(c)$ である. 関数 $f(x)$ の点 $x = c$ での凹凸は、$f(x)$ と $g(x)$ の関係を表している.

定義 2. (関数の凹凸) 記号を上の通りとする.

(1) 点 c の近傍で、$x \neq c$ に対して $f(x) > g(x)$ が成り立つとき、関数 $f(x)$ は $x = c$ で下に凸であるという.

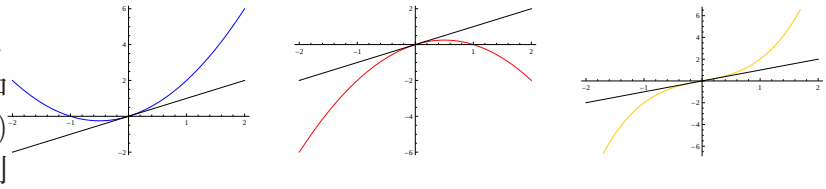
(2) 点 c の近傍で、$x \neq c$ に対して $f(x) < g(x)$ が成り立つとき、関数 $f(x)$ は $x = c$ で上に凸であるという.

担当教員：宮地 兵衛　研究室：A447　E-mail:miyachi@math.nagoya-u.ac.jp

問題 1. $f(x)$ が点 $x=c$ で下に凸であることの定義を定義 1 を参照して近傍という言葉を用いずに厳密に書き下せ．また、上に凸であることの定義を書き下せ．

定義 3. 点 $x=c$ の前後で $f(x)$ の凹凸がかわるとき、点 $(c, f(c))$ を関数 $f(x)$ の変曲点と呼ぶ．

最初のグラフは $x=0$ で下に凸、2 番目のグラフは $x=0$ で上に凸である．3 番目のグラフで点 $(0,0)$ は変曲点である．関数の凹凸の判定方法として、以下の定理が知られている．



定理 2. $f(x)$ を 2 回微分可能な関数として、2 回の導関数を $f''(x)$ と記す．

(1) 点 $c \in I$ で $f''(c) > 0$ のとき、$f(x)$ は $x=c$ の近傍で下に凸である．

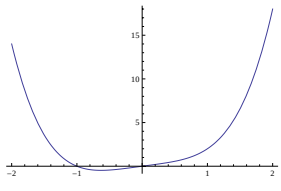
(2) 点 $c \in I$ で $f''(c) < 0$ のとき、$f(x)$ は $x=c$ の近傍で上に凸である．

定理 3. 2 回微分可能な関数 $f(x)$ に対して、点 $(c, f(c))$ が変曲点になるとき、$f''(c)=0$ が成り立つ．

極値の場合と同様に、$f''(c)=0$ が成り立っていても、$(c, f(c))$ が $f(x)$ の変曲点にならない場合があることに注意せよ．例えば、右は

$$f(x) = x^4 + x$$

のグラフであるが、$(0,0)$ は変曲点でない．



問題 2. 定理 1 〜定理 3 が成り立つ直感的な理由を、自分なりに考えてみよ．隣の人に説明してみて、納得してもらえるか試してみよ．

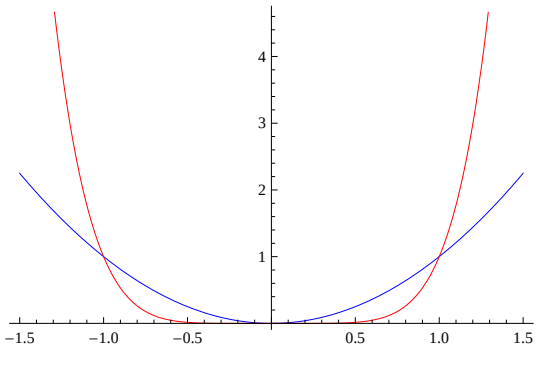
テーラー展開による極値の判定

問題 3. 点 $x=a$ の近傍で、次の関数の絶対値の大小を比較せよ．

(1) $f_1(x) = (x-a)$　(2) $f_2(x) = (x-a)^2$　(3) $f_3(x) = (x-a)^6$

例えば、$a=2$, $x=2.01$ などで計算してみよ．

実数 x が a から離れていると、$(x-a)^6$ の方が $(x-a)^2$ より大きい．しかし、x が a に近くなると、状況は逆転する．$x=a$ の近傍では、n が大きければ大きいほど、$(x-a)^n$ の値は小さくなる．右は $f(x)=x^2$ と $f(x)=x^6$ のグラフである．0 の近傍では、x^2 の値の方が x^6 の値より大きいことに注目せよ．



担当教員：宮地 兵衛　研究室：A447　E-mail:miyachi@math.nagoya-u.ac.jp

多項式 $f(x)$ を $x=a$ でテイラー展開したものを考える.

$$f(x)=a_0+a_1(x-a)+a_2(x-a)^2+a_3(x-a)^3+\cdots+a_n(x-a)^n$$

$x=a$ の近傍で、任意の $x\neq a$ に対して $f(x)>f(a)$ が成り立てば $f(a)$ は極小値、$f(x)<f(a)$ が成り立てば極大値である. 上の式の両辺から $f(a)=a_0$ を引くと、

$$f(x)-f(a)=a_1(x-a)+a_2(x-a)^2+\cdots+a_n(x-a)^n$$

となる. $x=a$ の近傍では、低次の項が関数のグラフに影響を与える. 従って、右辺の最低次な項を見ることによって $f(a)$ が極値かどうか判定できる.

例題 1. 次の $f(x)$ は $x=2$ で極値を取るか判定せよ.
(1) $f(x)=3+2(x-2)^4+(x-2)^5$　　(2) $f(x)=1+(x-2)^5+(x-2)^8$

【解答】

(1) $x=2$ の近傍で $f(x)-f(2)\approx 2(x-2)^4$ である. $2(x-2)^4$ は任意の $x\neq 2$ に対して $2(x-2)^4>0$. 従って $f(2)$ は極小値である.

(2) $x=2$ の近傍で $f(x)-f(2)\approx (x-2)^5$ である. $(x-2)^5$ は正負両方の値を取るので、$f(2)$ は極値でない.

問題 4. 次の多項式関数 $f(x)$ は $x=a$ で極値を取るか、判定せよ.

(1) $f(x)=3+2(x-1)^3-3(x-1)^6,\ a=1.$

(2) $f(x)=-2+2(x+2)^4-2(x+2)^8,\ a=-2.$

テーラー展開による凹凸の判定

多項式関数 $f(x)=\sum_{k=0}^{n}a_k(x-a)^k$ の $x=a$ での接線は $g(x)=a_0+a_1(x-a)$ によってあたえられる. 関数 $f(x)$ の $x=a$ での 凹凸は、$f(x)$ と $g(x)$ の関係で与えられる. テーラー展開を用いて極値を判定する場合と同様に、$x=a$ の近傍で $f(x)-g(x)$ の正負を調べれば良い.

問題 5. 次の多項式関数 $f(x)$ の $x=a$ での凹凸を判定せよ.

(1) $f(x)=-3+3(x+2)+(x+2)^6,\ a=-2.$

(2) $f(x)=-3+3(x+1)-3(x+1)^6,\ a=-1.$

担当教員：宮地 兵衛　研究室：A447　E-mail:miyachi@math.nagoya-u.ac.jp

宿題

以下は、M103 に登場した設問である．全体的に、接平面のところが分かりにくかったようである．**締め切りは、次週が文化の日のため例外的に 11/10 の数学演習 II 時間開始まで**.

宿題 4-1 $z = f(x, y) = x^2 - 3xy + 3y^2 + 4x - 9y$ とする．以下の問いに答えよ．

(1) $(x, y) = (0, 0)$ における曲面 $z = f(x, y)$ の接平面の方程式は何か？（答えのみでよい.）

(2) プリント M103 の**問題 3** の計算を真似て，$(x, y) = (1, 1)$ における接平面の方程式および 2 次のテイラー多項式を求めよ．

宿題 4-2 次の関数について，(a, b) における接平面の方程式および 2 次テイラー多項式を求めよ．

(1) $z = f(x, y) = \dfrac{1}{1 + x^2 + y^2}$,　$(a, b) = (0, 0)$

(2) $z = f(x, y) = e^{x+y}$,　$(a, b) = (1, 1)$　　(Hint: $e^{x+y} = e^2 \cdot e^{(x-1)+(y-1)}$)

宿題 4-3 (1 次近似と勾配ベクトル) xy 平面上にある地図を広げたところ，海抜高度を与える関数がちょうど $z = f(x, y) = 1 + \sin(2x - y)$ であった．

(1) $z = f(x, y)$ の $(x, y) = (0, 0)$ における接平面を与える 1 次関数 $z = F_1(x, y)$ を求めよ．

(2) 平面上の動点 $\mathrm{P}(x, y)$ が原点から一定方向に一定距離 $\epsilon > 0$ だけ移動するとき，定数でない 1 次関数 $z = F(x, y) = ax + by$ が最大および最小となるのは，ベクトル (x, y) が (a, b) に平行なときであることを示せ．(Hint: $ax + by$ はこれらのベクトルの内積．これらベクトルの成す角度を考えよ.)

(3) 原点 $(x, y) = (0, 0)$ に対応する地点にボールをおいた場合，地図（xy 平面）上でいうとどのベクトルの方向に転がり始めるか？