

原田多元環の表現論

学生番号：320701522

氏名：山浦浩太

1年次アドバイザー：吉田健一准教授

2年次アドバイザー：伊山修准教授

目次

1	多元環の表現論	11
1.1	クイバーと関係式による多元環の表現	11
1.2	圏のイデアルと剰余圏	16
1.3	AR-クイバー	18
1.4	並進クイバー	25
1.5	傾加群	29
2	原田多元環の基本事項	33
2.1	中山多元環と自己移入多元環	33
2.2	原田多元環の定義	35
2.3	原田多元環の構造定理	37
2.4	原田多元環の連結性	42
3	原田多元環のクイバー表示	43
3.1	ブロック拡大のクイバー表示	43
3.2	定理 3.1, 定理 3.3 の証明	45
3.3	原田多元環のクイバー表示	49
4	有限表現型の原田多元環に関する結果	52
4.1	Drozd-Kirichenko の削除補題	52
4.2	数え上げ理論	55
4.3	自己移入多元環の AR-クイバー	59
4.4	定理 4.2 の証明	64
5	原田多元環上の傾加群の分類	95
5.1	体上の上半三角行列環上の傾加群の分類	96
5.2	原田多元環上の直既約射影加群の間の準同型	98
5.3	原田多元環上の傾加群	101

記号の設定

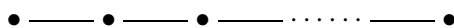
環 R とその上の加群 M に対して次の記号を用いる.

- \mathbb{N} : 自然数全体のなす集合.
- \mathbb{N}_0 : 非負整数全体のなす集合.
- \mathbb{Z} : 整数全体のなす集合.
- $\text{Pi}(R)$: R の直交原始冪等元の完全系.
- $J(M)$: M のジャコブソン根基.
- $J^k(M)$: M の k -th ジャコブソン根基.
- $S(M)$: M の底.
- $\text{length}(M)$: 加群の長さ.
- M^n : $\mathbb{N} \ni n$ 個の M の直和.
- $\text{pd } M$: M の射影次元.
- $\text{Mod } R$: 右 R -加群の圏.
- $\text{mod } R$: 有限生成右 R -加群の圏.
- $\text{add } M$: M の有限個の直和の直和因子を対象とする $\text{mod } R$ の充満部分圏.
- $D(-) = \text{Hom}_K(-, K)$: K -双対.
- $T_n(R)$: R 上の n 次の上三角行列環.
- $\langle a \rangle_{ij}$: (i, j) -成分が a で, 他の成分が 0 である行列.

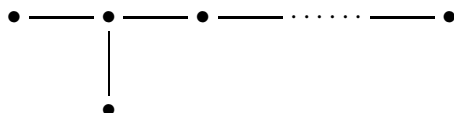
この報告書では多元環は常に代数閉体 K 上の有限次元多元環を意味するとする. また加群は注意しない限り右加群を考えているとし, 準同型は左から作用させるものとする.

以下の図形を Dynkin 図形と呼ぶ.

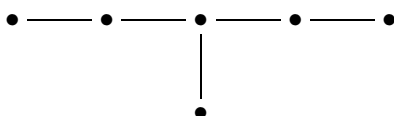
- $k \geq 1$ とする. 頂点を k 個もつ次の図形を A_k で表わす.



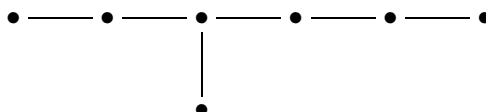
- $k \geq 1$ とする. 頂点を k 個もつ次の図形を D_k で表わす.



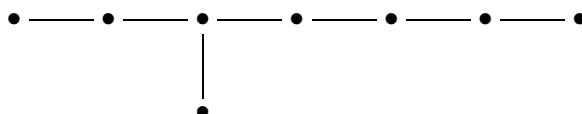
- 次の図形を E_6 で表わす.



- 次の図形を E_7 で表わす.



- 次の図形を E_8 で表わす.



序文

私は修士課程 1 年次に自主学習としてアルティン環に関する本である [6] の一部を読み、原田環と呼ばれるアルティン環について勉強した。[6] はアルティン環に関する最近の話題が書かれた本である。私自身学部的时候から環論、特にアルティン環に興味を持っていたので、[6] を読むことにしたのである。修士課程 2 年次では少人数クラスで多元環の表現論の基礎について学んだ。テキストは [4] で、ここ 30 年の間に確立されたクイバーと呼ばれる道具を用いた多元環の解析手法を中心とする本である。私はこれらを学習して、多元環の表現論で学んだ道具を用いて原田多元環を調べてみたいと考えた。そこで私は修士課程 2 年次の自主学習として、原田多元環を多元環の表現論の手法を用いて調べた。この修士論文はその研究によって得られた新しい結果を述べることを目的としている。

昔から調べられている二つのアルティン環がある。一つは中山環と呼ばれるアルティン環で、もう一つは準フロベニウス環と呼ばれるアルティン環である。アルティン環 R が中山環であるとは、任意の原始冪等元 $e \in R$ に対して、 R -加群 eR と R^{op} 加群 Re は唯一つの組成列をもつときをいう。例えば体上の上半三角行列環が代表例である。アルティン環 R が準フロベニウス環 (自己移入多元環を含む) であるとは、 R が右加群として移入的かつ左加群として移入的であるときをいう。例えば体上の有限群の群環が代表例である。これら二つのアルティン環は中山正 [18, 19] によって導入されて以来、数多くの研究者によって調べられており、[13, 17, 18, 19, 20, 21, 29, 31] や他多数の文献で、その構造論や加群論が述べられている。

1970 年代後半に原田学は [9] の中で、後に原田環と呼ばれることになるアルティン環を定義した。原田環は上で述べた中山環と準フロベニウス環を同時に一般化した環であるといえる。

定義 R を基本的なアルティン環とする。 $\text{Pi}(R)$ を次のように並べることができるとき、 R を原田環という。

$$\text{Pi}(R) = \{e_{ij}\}_{i=1, j=1}^{m, n_i}$$

- (a) $e_{i1}R$ は右移入 R -加群である。 ($1 \leq i \leq m$)
- (b) $e_{i,j+1}R \simeq J(e_{ij}R)$ である。 ($1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n_i - 1$)

但し本論文で用いるこの定義は、原田 [9] による定義ではなく、後に示された同値条件であることを注意しておく。

例を用いてこの条件を説明しよう。 R を基本的な準フロベニウス環とし、その直交原始冪等元の完全系を $\{f_1, f_2\}$ とする。このとき R は次の形に行列表示できる。

$$R = \begin{pmatrix} f_1 R f_1 & f_1 R f_2 \\ f_2 R f_1 & f_2 R f_2 \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} Q & A \\ B & W \end{pmatrix}.$$

Q, W のジャコブソン根基をそれぞれ J, K とおく。 R の行列表示を次のように拡大するこ

とにより, 新しい環 P を構成する.

$$P = R(3, 2) = \left(\begin{array}{ccc|cc} Q & Q & Q & A & A \\ J & Q & Q & A & A \\ J & J & Q & A & A \\ \hline B & B & B & W & W \\ B & B & B & K & W \end{array} \right)$$

このような拡大の仕方をブロック拡大といい, この場合 $R(3, 2)$ で表す. ブロック拡大をして作った P は通常の行列の演算によって環をなしており, 直交原始冪等元の完全系として次がとれる.

$$\{e_i = \langle 1 \rangle_{ii} \mid 1 \leq i \leq 5\}$$

しかも P は基本的なアルティン環であることがわかる. この P は上で述べた (a),(b) の条件をみたすことを確かめる. まず R が自己移入的であることから,

$$e_1P = (Q Q Q A A), \quad e_4P = (B B B W W)$$

は移入右 P -加群である (これは明らかではないことを注意しておく). 次に e_2P, e_3P, e_5P を見ると以下の包含関係が成り立っている.

$$e_1P = (Q Q Q A A) \supset e_2P = (J Q Q A A) \supset e_3P = (J J Q A A)$$

$$e_4P = (B B B W W) \supset e_5P = (B B B K W)$$

従って次を得る.

(a) e_1P, e_4P は移入右 P -加群である.

(b) $e_2P \simeq J(e_1P), e_3P \simeq J(e_2P), e_5P \simeq J(e_4P)$ である.

以上から P は原田環である. 原田環は中山環と準フロベニウス環の一般化であると述べたが, (a),(b) の条件からそのことが理解できると思う.

以上, 原田環の一例を挙げたが, 実は一般に準フロベニウス環のブロック拡大は原田環になることが示される. さらにそれを特別なイデアルで割り, 上階段型剰余環と呼ばれる剰余環をつくることで, より多くの原田環が構成できる.

任意の原田環はこの方法で構成される. つまり次の定理が示されている.

原田環の構造定理 ([27]) 任意の基本的な原田環はある準フロベニウス環のブロック拡大の上階段型剰余環と同型である.

この定理は原田環の研究における重要な結果で, 原田環と準フロベニウス環が構造的に深い関係にあることを示している. 他にも原田環と準フロベニウス環に中山環を加えた三者の関係は [6, 22, 23, 24, 27] 等で調べられている.

原田環はこれまでアルティン環の研究者によってその構造論が研究されていたが, 以下に述べる多元環の表現論の道具を用いての研究は未だされていなかった. そこで私は多元

環の表現論の道具を用いることで、原田環の表現論的研究を試みたのである。本論文では、その成果を報告する。

クイバーを用いた多元環の表現論について少し述べよう。三つの代表的な道具、クイバーと関係式、AR-クイバー、そして傾加群について述べる。

多元環の表現論におけるクイバーと関係式は1970年代に Gabriel によって導入された多元環の研究道具である。多元環の研究にクイバーを用いることには、三つの大きな利点がある。一つ目は与えられた多元環をクイバーと関係式で表示することにより、その環の構造を視覚的に捉えることができる点である。二つ目は多元環上の加群をその多元環のクイバーを用いて表現することができ、加群に関する種々の計算を線型代数的手法に帰着できる点である。三つ目はクイバーと関係式を与えることにより、容易に環の具体例を作り出すことができる点である。一つ目と二つ目の利点から現在では、与えられた多元環を調べる際にその環のクイバーと関係式による表示を求めることは、最初に行うべき計算となっている。

環の表現論の一つの目的は環上の加群を分類することであったが、現在ではより強く、環上の加群圏の構造を明らかにすることが環の表現論の一つの目的である。多元環においては、1970年代に Auslander, Reiten によって既約写像や概分裂完全列の概念が導入されてから、有限生成加群圏の記述が可能になった。有限生成加群の基本単位は有限生成直既約加群であることが Krull-Schmidt の定理としてよく知られている。一方、既約写像は有限生成直既約加群の間の準同型の基本となる写像であり、有限生成加群の間の準同型を知るには既約写像を知ることが重要である。これより有限生成加群圏を記述する新しいクイバーが定義される。頂点を有限生成直既約加群の同型類とし、矢を既約写像としたクイバーである。このクイバーを AR-クイバーという。AR-クイバーを描くことは概分裂完全列を用いることにより可能となる。AR-クイバーは有限生成加群圏を視覚的に捉えるのを可能にするに止まらず、様々な応用 ([14, 15, 16, 29, 30]) が存在し、多元環の研究に不可欠な道具になっている。

与えられた多元環 R についてある問題を考えるとき、 R を別のより良い多元環 S に置き換えて問題を考えることができれば便利である。例えば森田理論により、多元環の表現論は基本的多元環の場合に帰着される。そこで森田同値よりも一般に、与えられた多元環 R に近い多元環を構成する方法が、 R 上の傾加群とよばれる特別な加群を求めることである。 R 上の傾加群 T を得たとき、 $S = \text{End}_R(T)$ を考えると $\text{mod}R$ と $\text{mod}S$ は類似した性質をもつ圏になる。この事実は Brenner-Butler の定理として知られており、実際に様々な問題を R から S に移して考えることができる。さらにこのことは導来圏同値の観点からより良く理解できることが知られており、傾加群を用いて導来圏の構造を解析することができる。以上から与えられた多元環に対して、その上の傾加群を全て求めることは表現論における一つの基本的な問題となっている。

本論文では以上の多元環の表現論の道具を用いて、原田環を表現論的に研究する。特に次の三つの新しい結果を証明することを目的とする。以下それぞれの主定理と概要を述べる。

(I) 一つ目は原田多元環のクイバー表示に関する結果である。原田多元環を表現論的に調べる際に、まず原田多元環のクイバー表示を決定することは重要な問題である。なぜな

らクイバー表示が決定することができれば, 多くの例を容易に生み出すことができ, この先の研究のサンプルが豊富に作れるからである. また上で述べたように環をクイバー表示で与えると, 種々の計算ができるというのもクイバー表示を決定したい理由の一つである.

ここでは原田環の構造定理から次の主定理を証明する (詳しく主定理を述べるには多くの準備が必要なので雑に主定理を述べる).

主定理 (1-1) R を基本的な多元環とする. R のクイバー表示から, R のブロック拡大のクイバー表示が直ちに得られる.

主定理 (1-1) は R が基本的な多元環であれば良く, 自己移入的であることを必要としない. 主定理 (1-1) の応用として主定理 (1-2) を得る.

主定理 (1-2) R を基本的な自己移入多元環とする. R のクイバー表示から, R のブロック拡大の上階段型剰余環のクイバー表示が直ちに得られる.

直ちに得られると述べてあるが, 本文の主張では R のクイバー表示を用いて, R のブロック拡大とその上階段型剰余環のクイバー表示を統一的に記述している. 証明はブロック拡大や上階段型剰余環の構成法に従って, クイバー表示を計算することで得られる.

これにより具体的な原田多元環の例がほしいときには, 具体的な自己移入多元環を与えれば良い. 自己移入多元環の構成法は数多く知られており, 特にクイバー表示による自己移入多元環の構成法が [29] で与えられている. 従って原田多元環の例が構成でき, 多くの計算例をつくることができるようになる.

(II) 二つ目は有限表現型の原田多元環に関する結果である. 有限表現型の自己移入多元環 R で $R(1, 2)$ は有限表現型であるが, $R(2, 1)$ は無限表現型になる例がある. 従って有限表現型の自己移入多元環のブロック拡大は有限表現型になるとは限らない. 私はいつ与えられた有限表現型の自己移入多元環に対して, そのブロック拡大がいつ有限表現型になるかを判定する方法を探した. しかし今のところそのような判定法はわかっていない.

そこで基本的な対象と考えられる, 任意のブロック拡大が有限表現型になる自己移入多元環を考えてみる. このような自己移入多元環を考えることで, 上で述べた判定法を見つける足がかりにしたいのである. ここでの主定理は任意のブロック拡大が有限表現型になる自己移入多元環の特徴付けである.

主定理 (2) R を基本的な自己移入多元環とする. 次は同値である

- (1) R の任意のブロック拡大が有限表現型である.
- (2) R が中山多元環である.

主定理 (2) の (2) \implies (1) は次のように示せる. 中山多元環は有限表現型であることが知られている. R が中山多元環ならば, R の任意のブロック拡大は中山多元環になるので, R の任意のブロック拡大が有限表現型である.

証明が大変なのは逆, すなわち主定理 (2) の (1) \implies (2) である. これの証明のポイントは二つある. ポイントと共に証明の概略を述べる. 一つ目のポイントは次の補題から主定理 (2) の証明が自己移入多元環の考察に帰着できることである.

補題 R を有限表現型の基本的な自己移入多元環とする. 次は同値である.

- (1) R の任意のブロック拡大が有限表現型である.
- (2) 任意の n に対して, R のブロック拡大 $R(n, \dots, n)$ を特別なイデアルで割って作った自己移入多元環 $\bar{P}(n)$ が有限表現型である.

二つ目のポイントは自己移入多元環 $\bar{P}(n)$ の AR-クイバーが非常に特殊な性質をもつということである. その性質をもつ自己移入多元環の AR-クイバーになりうる並進クイバーがどれだけあるかを計算してみると, 実は中山多元環の AR-クイバーしかないというのが証明の概略である.

(III) 三つ目の結果は原田多元環上の傾加群の分類である. 上で述べたとおり多元環 R 上の傾加群 T が一つ与えられると, R に近い多元環 $S = \text{End}_R(T)$ が得られる. R のいくつかの問題は S で考えることができる. このようなことから, 与えられた多元環上の傾加群を分類することは重要な問題である.

さて, 主定理は次である.

主定理 (3) R を定義の (a),(b) の構造をもつ原田多元環とする. このとき次の一対一対応がある.

$$\text{tilt}(R) \longleftrightarrow \text{tilt}(T_{n_1}(K)) \times \cdots \times \text{tilt}(T_{n_m}(K)).$$

証明において重要になのは原田多元環の有限生成射影加群の構造 (a),(b) であり, これから導かれる性質が R 上の傾加群の分類の鍵を握る. その性質を使ってまず R 上射影次元 1 以下の加群を分類する. その後 $\text{mod}R$ のある充満部分圏を介して, R 上射影次元 1 以下の加群の間の拡大の有無の判定を, 上半三角行列環の場合に帰着することにより与える. そして最後に上半三角行列環上の傾加群を用いて R 上の傾加群を記述する.

上半三角行列環上の傾加群はすでに分類が知られており, この主定理の対応とあわせることで, 与えられた原田多元環上の傾加群の分類が得られる.

本論文の構成を述べる. 1 章は少人数クラスで学んだ多元環の表現論の基礎事項をまとめたものである. 1 節ではクイバーと関係式による多元環の構成と, 多元環のクイバー表示について述べる. 2 節では 3 節で必要になる加法圏のイデアルについて述べる. 3 節で多元環の AR-クイバーによる, 有限生成加群圏の記述について述べる. 4 節では有限表現型の多元環の AR-クイバーの一般化である, 並進クイバーについて述べる. 5 節では多元環上の傾加群と Brenner-Butler の定理について述べる.

2 章は 1 年次に自主学習で学んだ原田多元環に関する基本事項をまとめたものである. 1 節では中山多元環と自己移入多元環の定義を述べ, それらの例を挙げる. 2 節では原田多元環の定義を述べ, いくつかの例を挙げる. 3 節では 3 章, 5 章の基盤となる原田多元環の構造定理を述べる. 4 節では自己移入多元環のブロック拡大の上階段型剰余環の連結性について述べる.

3 章は原田多元環のクイバー表示に関する新しい結果について述べる. 1 節でこの章の主定理を述べ, 2 節で証明をする. 3 節では前節までで得た主定理を応用して, 原田多元環のクイバー表示を自己移入多元環のそれを用いて決定する.

4 章は原田多元環の表現型に関する新しい結果について述べる. 最初に 4 章の主定理を述べる. 1 節から 3 節は主定理の証明に必要な概念や補題を説明する. 1 節では Drozd-Kirichenko の削除補題とそれに関する補題を証明する. 2 節では AR-クイバーを用いた数

え上げ理論について説明する. 3節では重要な概念である配置を定義し, その性質を述べる. 以上の準備事項をもとに kd 4章では主定理を証明する.

5章は新しい結果である, 原田多元環の傾加群の分類を行う. 最初に5章の主定理を述べる. 1節ではすでに知られている, 体上の上半三角行列環上の傾加群の分類について述べる. 2節では原田多元環の構造を用いて, 鍵となる補題を証明する. 3節では2節で示したことを用いて, 主定理を証明する.

序文の最後に, 2年間私を熱心に指導してくださった吉田健一准教授, 伊山修准教授に感謝の意を表わします. また, 私に様々な助言をくださった本研究科及び他大学の先生方, 少人数クラスにおいて多くの議論をし, 共に学んだ先輩・後輩・同期の皆様にも感謝の言葉を送ります.

1 多元環の表現論

ここでは2年次少人数クラスで学んだ、多元環の表現論の基礎についてまとめる。少人数クラスで用いたテキストは [4] であり、1節、2節、3節、5節はそれぞれ [4] の Chapter I, Appendix, Chapter IV, Chapter VI をまとめたものである。4節は主に [5] の並進クイバーについて書かれている部分をまとめたものである。

1.1 クイバーと関係式による多元環の表現

この節ではクイバーと関係式により多元環が構成でき、逆に与えられた多元環をクイバーと関係式によって表示できることを述べる。

最初にクイバーを定義し、例を紹介する。

定義 1.1. Q_0, Q_1 が集合であり、 s, t が Q_1 から Q_0 への写像であるとき、 (Q_0, Q_1, s, t) の四つ組をクイバー (quiver) という。このとき Q_0 の元を頂点、 Q_1 の元を矢という。また $\alpha \in Q_1$ に対して $s(\alpha)$ を α の始点、 $t(\alpha)$ を α の終点といい、 α は $s(\alpha)$ から $t(\alpha)$ への矢であるという。以下、混乱しそうに無いときはクイバー (Q_0, Q_1, s, t) を単に Q と表すことにする。

クイバー $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ について Q_0, Q_1 が共に有限集合であるとき、 Q を有限クイバー (finite quiver) という。以下、この節ではクイバーというときは全て有限クイバーを考えているものとする。

クイバーは次の例のように有向グラフとして図示できる。

例 1.2.

- (1) クイバー Q を $Q_0 = \{1, 2, 3\}, Q_1 = \{\alpha, \beta\}, s(\alpha) = 1, t(\alpha) = 2, s(\beta) = 2, t(\beta) = 3$ で定める。このとき Q を次のように図示できる。

$$Q : 1 \xrightarrow{\alpha} 2 \xrightarrow{\beta} 3$$

- (2) クイバー Q を $Q_0 = \{1\}, Q_1 = \{\alpha\}, s(\alpha) = 1, t(\alpha) = 1$ で定める。このとき Q を次のように図示できる。

$$Q : \alpha \circlearrowleft 1$$

クイバーを有向グラフで図示したとき、矢の向きを無視した図形をグラフ (graph) という。クイバー Q のグラフが連結であるとき、 Q は連結 (connected) であるという。

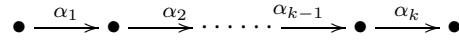
次にクイバーから多元環が構成できることを述べる。その後に述べる関係式と合わせて、多種多様な多元環を具体的に構成することができる。この事はクイバーを考える大きな利点の一つである。

定義 1.3. $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ をクイバーとする。

(1) $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in Q_1$ に対して $t(\alpha_i) = s(\alpha_{i+1})$ ($1 \leq i \leq r-1$) をみたすとき, 列

$$(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$$

を $s(\alpha_1)$ から $t(\alpha_r)$ への長さ r の道 (path) といい, 単に $\alpha_1 \cdots \alpha_r$ で表す. ここで $a \in Q_0$ も長さ 0 の道とし, ε_a で表すことにする. 道 $\alpha_1 \cdots \alpha_k$ は次のように図示される.



(2) KQ を Q の全ての道を基底とする K 上のベクトル空間とする. この KQ に以下のように積を定義する. 任意の道 $\alpha = \alpha_1 \cdots \alpha_r, \beta = \beta_1 \cdots \beta_s$ に対して

$$\alpha\beta = \begin{cases} \alpha_1 \cdots \alpha_r \beta_1 \cdots \beta_s & (t(\alpha_r) = s(\beta_1)) \\ 0 & (t(\alpha_r) \neq s(\beta_1)) \end{cases}$$

と定める. この道同士の積を KQ 上へ線型に拡張する. そのとき KQ は K 上の多元環となる (但し有限次元とは限らない). こうしてできた多元環 KQ を Q の道多元環 (path algebra) という. 今 Q_0 は有限であることを仮定していることから,

$$\sum_{a \in Q_0} \varepsilon_a$$

が KQ の単位元になり,

$$\{\varepsilon_a \mid a \in Q_0\}$$

は KQ の直交原始幂等元の完全系となることがいえる.

例 1.4.

(1) 例 1.2 (1) から出来る道多元環は以下のようなになる.

$$KQ = K\varepsilon_1 \oplus K\varepsilon_2 \oplus K\varepsilon_3 \oplus K\alpha \oplus K\beta \oplus K\alpha\beta$$

である. このとき対応

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &\leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon_2 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon_3 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ \alpha &\leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha\beta \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

により, 環同型

$$KQ \simeq \begin{pmatrix} K & K & K \\ 0 & K & K \\ 0 & 0 & K \end{pmatrix}$$

を得る.

(2) 例 1.2 (2) から出来る道多元環は以下ようになる.

$$KQ = K\varepsilon_1 \oplus K\alpha \oplus K\alpha^2 \oplus \cdots$$

である. このとき ε_1 に 1, α に x を対応させることにより, 環同型

$$KQ \simeq K[x]$$

を得る.

上で構成した道多元環は一般には有限次元でない. そこで以下で定義する許容イデアルで道多元環を割ってやることにより, 有限次元多元環を作る.

定義 1.5. $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ をクイバーとする. KQ_+ を Q の長さ 1 以上の全ての道からなる KQ のイデアルとする. KQ の両側イデアル I について, $(KQ_+)^m \subset I \subset (KQ_+)^2$ となる $m \geq 2$ があるとき, I を許容イデアル (admissible ideal) という.

道多元環を許容イデアルで割ったとき次の性質をもつ有限次元多元環が出来上がる.

補題 1.6. $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ をクイバーとし, I を KQ の許容イデアルとする. このとき KQ/I は基本的な有限次元多元環になる. また

$$\{\varepsilon_a + I \mid a \in Q_0\}$$

は KQ/I の直交原始冪等元の完全系となる.

例 1.7.

(1) 例 1.4 (1) の KQ のイデアル $(\alpha\beta)$ は許容イデアルである. 例 1.4 (1) で与えた対応によって, 環同型

$$KQ/(\alpha\beta) \simeq \begin{pmatrix} K & K & 0 \\ 0 & K & K \\ 0 & 0 & K \end{pmatrix}$$

を得る.

(2) 例 1.4 (2) の KQ のイデアル (α^3) は許容イデアルである. 例 1.4 (2) で与えた対応によって, 環同型

$$KQ \simeq K[x]/(x^3)$$

を得る.

許容イデアルに関連してクイバーの関係式を定義する.

定義 1.8. $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ をクイバーとする. $\rho = \sum_{i=1}^n \lambda_i p_i \in KQ$ ($\lambda_i \in K$, 各 p_i は Q の道) とする. ρ が次の条件をみたすとき Q の関係式 (relation) であるという.

- (1) 各 p_i は長さ 2 以上である.
- (2) 任意の $1 \leq i, j \leq n$ に対して $s(p_i) = s(p_j)$ かつ $t(p_i) = t(p_j)$ である.

許容イデアルは有限個の関係式で表すことができるというのが次の補題である。

補題 1.9. $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ をクイバーとし, I を KQ の許容イデアルとする. このとき有限個の Q の関係式 ρ_1, \dots, ρ_w によって

$$I = (\rho_1, \dots, \rho_w)$$

と表せる.

以上のようにしてクイバーと許容イデアル (関係式) によって多元環が構成できる. この節の残りで今度は与えられた多元環に対してクイバーが定義され, そのクイバーとある関係式によって, 与えられた多元環が再構成できることを述べる.

定義 1.10. R を基本的な多元環とし, $\text{Pi}(R) = \{e_1, \dots, e_m\}$ とする.

$$d_{ij} = \dim_K e_i(J(R)/J(R)^2)e_j$$

とおく. R のクイバー Q を以下で定める.

- (a) Q の頂点の集合は $\{1, 2, \dots, m\}$ とする.
- (b) i から j へ d_{ij} 本の矢を引く.

こうして定めた Q は R の直交原始冪等元の完全系のとり方に依らない. また R がであるから, Q は有限クイバーになることを注意しておく.

上で多元環 R のクイバー Q を定義したが, 一般に $R \simeq KQ$ とはならない. しかし, KQ をある許容イデアル I で割ってやることにより $R \simeq KQ/I$ とできる.

補題 1.11. Q をクイバーとし, R を多元環とする. 二つの写像

$$\varphi_0 : Q_0 \longrightarrow R, \quad \varphi_1 : Q_1 \longrightarrow R$$

が次をみたすとする.

- (1) $1 = \sum_{a \in Q_0} \varphi_0(a)$, $\varphi_0(a)^2 = \varphi_0(a)$, $a \neq b \implies \varphi_0(a)\varphi_0(b) = 0$.
- (2) a から b への矢 α に対して, $\varphi_0(a)\varphi_1(\alpha)\varphi_0(b) = \varphi_1(\alpha)$.

このとき $\varphi|_{Q_0} = \varphi_0$, $\varphi|_{Q_1} = \varphi_1$ をみたす環準同型

$$\varphi : KQ \longrightarrow R$$

が唯一つ存在する.

[証明] $\varphi : KQ \longrightarrow R$ の作り方だけ述べておく. $a \in Q_0, \alpha \in Q_1$ に対して

$$\varphi(\varepsilon_a) = \varphi_0(a), \quad \varphi(\alpha) = \varphi_1(\alpha)$$

とする. さらに Q の道 $\alpha_1 \cdots \alpha_r$ ($\alpha_i \in Q_1$) に対して

$$\varphi(\alpha_1 \cdots \alpha_r) = \varphi_1(\alpha_1) \cdots \varphi_1(\alpha_r)$$

とする. そしてこの写像を KQ 上に線型に拡張する. こうして作った φ が求める環準同型となる. □

定理 1.12. R を基本的な多元環とし, Q をそのクイバーとする. このとき, ある KQ の許容イデアル I が存在して, $R \simeq KQ/I$ となる. 従って補題 1.9 より, ある Q の関係式 ρ_1, \dots, ρ_w が存在して

$$R \simeq KQ/(\rho_1, \dots, \rho_w)$$

となる.

[証明] 簡単に証明の筋だけ述べておく. Q の各矢 $i \xrightarrow{\alpha} j$ に対して, $x_\alpha \in J(R)$ を

$$\{x_\alpha + J(R)^2 \mid \alpha \text{ は } i \text{ から } j \text{ への矢を動く}\}$$

が $e_i(J(R)/J(R)^2)e_j$ の基底になるようにとる. 補題 1.11 より, 次をみたす環準同型 $\varphi : KQ \rightarrow R$ が作れる.

$$\begin{aligned} KQ \ni i &\longmapsto e_i \in R, \\ KQ \ni \alpha &\longmapsto x_\alpha \in R. \end{aligned}$$

この φ は全射になることが言える. さらに $\text{Ker } \varphi$ は KQ の許容イデアルである. \square

3章で原田多元環のクイバーと関係式の計算を行う. その際にこの定理の証明における φ の構成の仕方をを用いるので注意してほしい.

例 1.13.

$$R = \begin{pmatrix} K & K & K & K \\ 0 & K & 0 & K \\ 0 & 0 & K & K \\ 0 & 0 & 0 & K \end{pmatrix}$$

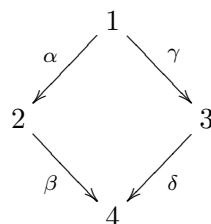
として, R のクイバー Q を計算する.

$$J(R) = \begin{pmatrix} 0 & K & K & K \\ 0 & 0 & 0 & K \\ 0 & 0 & 0 & K \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, J(R)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & K \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

であるから,

$$J(R)/J(R)^2 = \begin{pmatrix} 0 & K & K & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K \\ 0 & 0 & 0 & K \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

である. 従って R のクイバー Q は次になる.



補題 1.11 より $\varphi(\varepsilon_i) = \langle 1 \rangle_{ii}$, $\varphi(\alpha) = \langle 1 \rangle_{12}$, $\varphi(\beta) = \langle 1 \rangle_{24}$, $\varphi(\gamma) = \langle 1 \rangle_{13}$, $\varphi(\delta) = \langle 1 \rangle_{34}$ となる環準同型 $\varphi : KQ \rightarrow R$ が存在する. 定理 1.12 の証明より φ は全射である. また $\text{Ker } \varphi = (\alpha\beta - \gamma\delta)$ となることが直ちにわかるので, 環同型

$$KQ/(\alpha\beta - \gamma\delta) \simeq R$$

を得る.

1.2 圏のイデアルと剰余圏

ここでは 3 節で必要になる, 圏のイデアルについて説明する.

定義 1.14. \mathcal{A} を加法圏とし, \mathcal{A}_m を \mathcal{A} の全ての射からなるクラスとする.

- (1) \mathcal{I} を \mathcal{A}_m のサブクラスとする. $X, Y \in \mathcal{A}$ に対して

$$\mathcal{I}(X, Y) = \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y) \cap \mathcal{I}$$

と記すことにする. \mathcal{I} が次の条件をみたすとき, \mathcal{I} は \mathcal{A} のイデアル (ideal) であるという.

- (a) 任意の $X, Y \in \mathcal{A}$ に対して, $\mathcal{I}(X, Y)$ は $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y)$ の部分加法群である.
- (b) 任意の $X, Y, Z \in \mathcal{A}$ に対して, $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(Y, Z) \circ \mathcal{I}(X, Y) \subset \mathcal{I}(X, Z)$ である.
- (c) 任意の $X, Y, Z \in \mathcal{A}$ に対して, $\mathcal{I}(Y, Z) \circ \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y) \subset \mathcal{I}(X, Z)$ である.

- (2) \mathcal{A} のイデアル \mathcal{I} に対して,

$$\mathcal{I}^2 = \{fg \mid f \in \mathcal{I}(Y, Z), g \in \mathcal{I}(X, Y), X, Y, Z \in \text{mod } R\}$$

と定義する. これも \mathcal{A} のイデアルになる. 任意の $i \in \mathbb{N}$ に対して \mathcal{I}^i が同様に定義される.

環に対してそのイデアルがあるとき, 剰余環と呼ばれる新しい環が構成できた. 同様に圏に対してもそのイデアルがあるとき, 剰余圏と呼ばれる新しい圏を構成することができる.

定義 1.15. \mathcal{A} を加法圏とし, \mathcal{I} をそのイデアルとする. このとき新しい圏 \mathcal{A}/\mathcal{I} を以下で定める.

- (a) \mathcal{A}/\mathcal{I} の対象は \mathcal{A} の対象と同じとする.
- (b) \mathcal{A}/\mathcal{I} の対象 X, Y に対して

$$\text{Hom}_{\mathcal{A}/\mathcal{I}}(X, Y) = \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y)/\mathcal{I}(X, Y)$$

とする.

イデアルの定義より, \mathcal{A}/\mathcal{I} は加法圏になる. この圏 \mathcal{A}/\mathcal{I} を \mathcal{A} の \mathcal{I} による剰余圏 (factor category) という.

最後に Krull-Schmidt 圏を定義し, Krull-Schmidt 圏の特別なイデアルを定義する.

定義 1.16. \mathcal{A} を加法圏とする. 任意の $X \in \mathcal{A}$ が $\text{End}_{\mathcal{A}}(X_i)$ が局所環である $X_1, \dots, X_m \in \mathcal{A}$ によって

$$X \simeq X_1 \oplus \dots \oplus X_m$$

と分解できるとき, \mathcal{A} を Krull-Schmidt 圏という.

各 i について $\text{End}_{\mathcal{A}}(X_i)$ が局所環であることから, X_i は直既約である. また各 $\text{End}_{\mathcal{A}}(X_i)$ が局所環であることから, 上の分解は一意的である. すなわち X の二通りの直既約分解

$$X \simeq X_1 \oplus \dots \oplus X_m \simeq X'_1 \oplus \dots \oplus X'_n$$

があるとき, $m = n$ であり,

$$X_i \simeq X'_{\sigma(i)} \quad (1 \leq i \leq m)$$

となる $\{1, \dots, m\}$ 上の置換 σ が存在する.

定義 1.17. \mathcal{A} を Krull-Schmidt 圏とする. 以下で \mathcal{A} のイデアル $J_{\mathcal{A}}$ を定める. 直既約な対象 $X, Y \in \mathcal{A}$ に対して

$$J_{\mathcal{A}}(X, Y) = \begin{cases} J(\text{End}_{\mathcal{A}}(X)) & (X \simeq Y), \\ \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y) & (X \not\simeq Y) \end{cases}$$

とする. 一般の $X, Y \in \mathcal{A}$ に対して, それらの直既約分解

$$X \simeq X_1 \oplus \dots \oplus X_m, \quad Y \simeq Y_1 \oplus \dots \oplus Y_n$$

がある. このとき

$$\text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y) = \begin{pmatrix} \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X_1, Y_1) & \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X_2, Y_1) & \cdots & \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X_m, Y_1) \\ \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X_1, Y_2) & \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X_2, Y_2) & \cdots & \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X_m, Y_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X_1, Y_n) & \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X_2, Y_n) & \cdots & \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X_m, Y_n) \end{pmatrix}$$

と行列表現できる. このとき $J_{\mathcal{A}}$ を

$$J_{\mathcal{A}}(X, Y) = \begin{pmatrix} J_{\mathcal{A}}(X_1, Y_1) & J_{\mathcal{A}}(X_2, Y_1) & \cdots & J_{\mathcal{A}}(X_m, Y_1) \\ J_{\mathcal{A}}(X_1, Y_2) & J_{\mathcal{A}}(X_2, Y_2) & \cdots & J_{\mathcal{A}}(X_m, Y_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ J_{\mathcal{A}}(X_1, Y_n) & J_{\mathcal{A}}(X_2, Y_n) & \cdots & J_{\mathcal{A}}(X_m, Y_n) \end{pmatrix}$$

で定める. こうして定められた $J_{\mathcal{A}}$ は \mathcal{A} のイデアルとなる. このイデアルを \mathcal{A} の根基 (radical) という.

1.3 AR-クイバー

R を基本的な多元環とする. ここでは R の有限生成加群圏 $\text{mod}R$ を記述する, AR-クイバーの解説をする.

次の定理は多元環の有限生成加群圏を調べる際に基本となる定理で, 有限生成加群の直既約分解の存在と一意性を述べている.

定理 1.18 (Krull-Schmidt). 有限生成加群圏 $\text{mod}R$ は Krull-Schmidt 圏である.

定理 1.18 より, 多元環上の有限生成加群を全て求めるには, 有限生成直既約加群を全て求めることができれば十分である. 今 $X, Y \in \text{mod}R$ とすれば, X, Y の直既約分解

$$X \simeq X_1 \oplus \cdots \oplus X_m, \quad Y \simeq Y_1 \oplus \cdots \oplus Y_n$$

が得られる. このとき $f \in \text{Hom}_R(X, Y)$ は次のように行列の形で表現できる.

$$f = \begin{pmatrix} f_{11} & \cdots & f_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ f_{n1} & \cdots & f_{nm} \end{pmatrix}, \quad f_{ij} : X_j \longrightarrow Y_i.$$

従って有限生成加群の間の準同型を全て求めるには, 有限生成直既約加群の間の準同型を全て求めることができれば十分である. そこで有限生成直既約加群の間の準同型で一番基本的な準同型を定義する.

定義 1.19. X, Y を有限生成直既約 R -加群とする. $f \in \text{Hom}_R(X, Y)$ が次の条件をみたすとき, f を既約写像 (irreducible map) という.

- (a) f は同型でない.
- (b) $f = f_1 f_2$ ならば, f_1 が分裂全射かまたは f_2 が分裂単射である.

(a) は $\text{Hom}_R(X, Y)$ から自明な写像を除くための条件である. (b) は既約写像は二つの既約写像の合成で書けないという条件である. つまり (b) は加群における直既約の性質の類似である.

次の補題は既約写像が同型に近い写像であることを示している.

補題 1.20. X, Y を有限生成直既約 R -加群とする. $f \in \text{Hom}_R(X, Y)$ に対して次は同値である.

- (1) f は既約写像である.
- (2) $f \in J_{\text{mod}R}(X, Y) \setminus J_{\text{mod}R}^2(X, Y)$ である.

この補題より有限生成直既約 R -加群 X, Y の間の既約写像を理解するには,

$$J_{\text{mod}R}(X, Y) / J_{\text{mod}R}^2(X, Y)$$

を理解すればよいことがわかる.

さて, 多元環の有限生成加群圏を図示するクイバーを定義する. 上で述べたことから, そのクイバーの定義は有限生成加群圏を図示するのに非常に妥当であることがわかるだろう.

定義 1.21. クイバー $\Gamma(\text{mod}R)$ を以下で定める.

- (a) 頂点集合は有限生成直既約 R -加群の同型類全体とする. 有限生成直既約 R -加群 X の同型類を $[X]$ で表すことにする.
- (b) $[X]$ から $[Y]$ への矢を $\dim_K(J_{\text{mod}R}(X, Y)/J_{\text{mod}R}^2(X, Y))$ 本引く.

このようにして定めたクイバー $\Gamma(\text{mod}R)$ を R の AR-クイバー (Auslander-Reiten quiver) という.

こうして AR-クイバーを定義したが, 与えられた多元環に対して実際にどう AR-クイバーを得るのかということが問題になる. 以下では AR-クイバーを描く方法を与える. まず概分裂写像を定義する. 概分裂写像は既約写像の情報を含んでいる故に重要な概念である (命題 1.34).

定義 1.22. $L, M, N \in \text{mod}R$ とする.

- (1) $f \in \text{Hom}_R(L, M)$ が次をみたすとき, f は左概分裂写像 (left almost split map) であるという.
 - (a) f は分裂単射でない.
 - (b) 任意の $U \in \text{mod}R$ と任意の $u \in \text{Hom}_R(L, U)$ に対して, u が分裂単射でないならば $u = u'f$ なる $u' \in \text{Hom}_R(M, U)$ が存在する.

このとき L は直既約であることが示される.

- (2) $g \in \text{Hom}_R(M, N)$ が次をみたすとき, g は右概分裂写像 (right almost split map) であるという.
 - (a) g は分裂全射でない.
 - (b) 任意の $V \in \text{mod}R$ と任意の $v \in \text{Hom}_R(V, N)$ に対して, v が分裂全射でないならば $v = gv'$ なる $v' \in \text{Hom}_R(V, M)$ が存在する.

このとき N は直既約であることが示される.

$L, M \in \text{mod}R$ とし, $f : L \rightarrow M$ を左概分裂写像とする. このとき任意の $M' \in \text{mod}R$ に対して,

$$\begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix} : L \rightarrow M \oplus M'$$

も左概分裂写像となる. このような余計な直和因子 M' を除いた左概分裂写像を考えるために, 写像の極小性を定義する.

定義 1.23. $L, M, N \in \text{mod}R$ とする.

- (1) $f \in \text{Hom}_R(L, M)$ とする. $hf = f$ なる $h \in \text{End}_R(M)$ が必ず同型写像になるとき, f は左極小 (left minimal) であるという.

- (2) 左極小である左概分裂写像を左極小概分裂写像 (left minimal almost split map) という. L が直既約であるとする. L に対して $L \rightarrow M$ なる左極小概分裂写像は存在すれば一意である.
- (3) $g \in \text{Hom}_R(M, N)$ とする. $gk = g$ なる $k \in \text{End}_R(M)$ が必ず同型写像になるとき, g は右極小 (right minimal) であるという.
- (4) 右極小である右概分裂写像を右極小概分裂写像 (right minimal almost split map) という. N が直既約であるとする. N に対して $M \rightarrow N$ なる右極小概分裂写像は存在すれば一意である.

次の命題は極小概分裂写像の例である.

命題 1.24. $\text{mod}R$ で次が成立する.

- (1) 直既約射影 R -加群 P に対して, 自然な単射 $J(P) \rightarrow P$ は右極小概分裂写像である.
- (2) 直既約移入 R -加群 I に対して, 自然な全射 $I \rightarrow I/S(I)$ は左極小概分裂写像である.

次に概分裂完全列を定義する.

命題 1.25. $\text{mod}R$ の完全列

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$$

に対して, 次は同値である.

- (1) f が左極小概分裂かつ g が右極小概分裂である.
- (2) L が直既約かつ g が右概分裂である.
- (3) N が直既約かつ f が左概分裂である.
- (4) f が左極小概分裂である.
- (5) g が右極小概分裂である.

定義 1.26. 命題 1.25 の同値条件をみたす $\text{mod}R$ の完全列

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$$

を概分裂完全列 (almost split sequence) という. 概分裂完全列は左端の項 L または右端の項 N に対して, 存在すれば同型を除いて一意に定まる. 定義より L は移入的でなく, N は射影的でないことを注意しておく.

これから直既約 R -加群 $N \in \text{mod}R$ に対して, N を右端にもつ概分裂完全列が存在するかどうかを考える. 上で述べたとおり N が射影的であるときはそのような概分裂完全列は存在しないが, 実は N が射影的でなければそのような概分裂完全列が必ず存在する.

それを説明するためにいくつかの準備をする.

定義 1.27. $M \in \text{mod}R$ とする. M の極小射影分解

$$P_1 \xrightarrow{p_1} P_0 \xrightarrow{p_0} M \longrightarrow 0$$

をとる. この完全列に $\text{Hom}_R(-, R)$ を施して, 完全列

$$\text{Hom}_R(P_0, R) \xrightarrow{\text{Hom}_R(p_1, R)} \text{Hom}_R(P_1, R) \longrightarrow \text{Coker Hom}_R(p_1, R) \longrightarrow 0$$

を得る. ここで

$$\text{Tr}M = \text{Coker Hom}_R(p_1, R)$$

とおき, これを M の転置 (transpose) という. $\text{Tr}M$ は有限生成 R^{op} -加群である. また $\text{Tr}M$ は射影被覆の一意性から, 同型を除いて一意に決まる. 従って Tr は有限生成 R -加群から有限生成 R^{op} -加群への対応である.

この Tr は射影加群を 0 にしてしまう. そこで射影加群を無視するために次の剰余圏を考える.

定義 1.28.

- (1) $M, N \in \text{mod}R$ に対して, $\text{Hom}_R(M, N)$ の部分集合 $\mathcal{P}(M, N)$ を次で定める.

$$\mathcal{P}(M, N) = \{f \in \text{Hom}_R(M, N) \mid f = gh, h : M \rightarrow P, g : P \rightarrow N, P \text{ は射影加群}\}.$$

これにより定められる $\text{mod}R$ の射のクラス \mathcal{P} は $\text{mod}R$ のイデアルになる. 従って剰余圏

$$\underline{\text{mod}}R = (\text{mod}R)/\mathcal{P}$$

を考えることができる (定義 1.14, 定義 1.15 参照). これを射影安定圏 (projectively stable category) という. この圏の射の集合を $\underline{\text{Hom}}_R(-, -)$ で表すことにする.

- (2) $M, N \in \text{mod}R$ に対して, $\text{Hom}_R(M, N)$ の部分集合 $\mathcal{I}(M, N)$ を次で定める.

$$\mathcal{I}(M, N) = \{f \in \text{Hom}_R(M, N) \mid f = gh, h : M \rightarrow I, g : I \rightarrow N, I \text{ は移入加群}\}.$$

これにより定められる $\text{mod}R$ の射のクラス \mathcal{I} は $\text{mod}R$ のイデアルになる. 従って剰余圏

$$\overline{\text{mod}}R = (\text{mod}R)/\mathcal{I}$$

を考えることができる. これを移入安定圏 (injectively stable category) という. この圏の射の集合を $\overline{\text{Hom}}_R(-, -)$ で表すことにする.

Tr は上で定義した射影安定圏上で双対性を導く.

定理 1.29. 対応 Tr によって反変関手

$$\text{Tr} : \underline{\text{mod}}R \longrightarrow \underline{\text{mod}}R^{\text{op}}$$

が引き起こされ, $\underline{\text{mod}}R$ と $\underline{\text{mod}}R^{\text{op}}$ の間の双対性を与える.

定義 1.30.

- (1) 定理 1.29 で得た双対性 $\text{Tr} : \underline{\text{mod}}R \longrightarrow \underline{\text{mod}}R^{\text{op}}$ を転置 (transpose) という.
- (2) 二つの双対性 Tr と D を合成して, 次の共変関手を作る.

$$\tau : \underline{\text{mod}}R \xrightarrow{\text{Tr}} \underline{\text{mod}}R^{\text{op}} \xrightarrow{D} \overline{\text{mod}}R.$$

τ は $\underline{\text{mod}}R$ と $\overline{\text{mod}}R$ の間の圏同値を導く. この τ を AR-移動 (Auslander-Reiten translation) という.

次の定理の同型は概分裂完全列の存在性を導く重要な同型である.

定理 1.31. $M, N \in \underline{\text{mod}}R$ とする. 次の同型が存在する.

$$\text{Ext}_R^1(M, N) \simeq D\underline{\text{Hom}}_R(\tau^{-1}N, M) \simeq D\overline{\text{Hom}}_R(N, \tau M).$$

次が概分裂完全列の存在性を示す定理である.

定理 1.32. $\underline{\text{mod}}R$ で次が成立する.

- (1) M を射影的でない有限生成直既約 R -加群とする. このとき概分裂完全列

$$0 \longrightarrow \tau M \longrightarrow E \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

が存在する.

- (2) M を移入的でない有限生成直既約 R -加群とする. このとき概分裂完全列

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow E \longrightarrow \tau^{-1}M \longrightarrow 0$$

が存在する.

[証明] (1) の証明の概略だけ述べる. M が直既約より $\text{End}_R(M)$ は局所多元環である. また M が射影的でないことから, $\mathcal{P}(M, M) \subset J(\text{End}_R(M))$ である. よって $\underline{\text{End}}_R(M)$ は局所多元環である. 単純右 $\text{End}_R(M)$ かつ単純左 $\text{End}_R(M)$ -加群 $\underline{\text{End}}_R(M)/J(\underline{\text{End}}_R(M))$ を S_M とおく. このとき自然な全射

$$p_M : \underline{\text{End}}_R(M) \longrightarrow S_M$$

がある. これに $D(-)$ を施して

$$D(p_M) : D(S_M) \longrightarrow D(\underline{\text{End}}_R(M))$$

を得る. $D(p_M)$ は単純 $\underline{\text{End}}_R(M)$ -加群 $S(D(\underline{\text{End}}_R(M)))$ への単射である.

今 $D(S_M) \ni \xi' \neq 0$ をとり, $\xi = D(p_M)(\xi')$ とおく. 定理 1.31 の同型で ξ に対応する $\text{Ext}_R^1(M, \tau M)$ の元を η とおく.

$$D(\underline{\text{End}}_R(M)) \ni \xi \longleftarrow \eta \ni \text{Ext}_R^1(M, \tau M).$$

そして η に対応する $\text{mod}R$ の完全列

$$0 \longrightarrow \tau M \longrightarrow E \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

をとる. こうして得られた完全列が求める概分裂完全列となる. \square

以上より概分裂完全列の存在性が示された. 命題 1.24 と合わせて次の定理が得られる.

定理 1.33. 任意の $L \in \text{mod}R$ に対して, 左極小概分裂写像 $L \longrightarrow M$ が存在する. また任意の $N \in \text{mod}R$ に対して, 右極小概分裂写像 $M \longrightarrow N$ が存在する.

次に述べるのは既約写像と極小概分裂写像の関係である.

命題 1.34. M を有限生成 R -加群とし, $M = \bigoplus_{i=1}^t M_i^{n_i}$ をその直既約分解とする.

(1) L を有限生成直既約 R -加群とし, $f \in \text{Hom}_R(L, M)$ とする. f を次のように表す.

$$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_t \end{pmatrix},$$

$$f_i = \begin{pmatrix} f_{i1} \\ \vdots \\ f_{in_i} \end{pmatrix} : L \longrightarrow M_i^{n_i}.$$

このとき f が左極小概分裂写像であることと, 次の性質をみたすことは同値である.

- (a) $f_{ij} \in J_{\text{mod}R}(L, M_i)$ ($1 \leq i \leq t, 1 \leq j \leq n_i$).
- (b) $\{f_{ij} + J_{\text{mod}R}^2(L, M_i) \mid 1 \leq j \leq n_i\}$ は $J_{\text{mod}R}(L, M_i)/J_{\text{mod}R}^2(L, M_i)$ の基底である ($1 \leq i \leq t$).
- (c) M' が $J_{\text{mod}R}(L, M')/J_{\text{mod}R}^2(L, M') \neq 0$ をみたす直既約 R -加群ならば, $M' \simeq M_i$ となる i がある.

(2) N を有限生成直既約 R -加群とし, $g \in \text{Hom}_R(M, N)$ とする. g を次のように表す.

$$g = \begin{pmatrix} g_1 & \cdots & g_t \end{pmatrix},$$

$$g_i = \begin{pmatrix} g_{i1} & \cdots & g_{in_i} \end{pmatrix} : M_i^{n_i} \longrightarrow N.$$

このとき g が右極小概分裂写像であることと, 次の性質をみたすことは同値である.

- (a) $g_{ij} \in J_{\text{mod}R}(M_i, N)$ ($1 \leq i \leq t, 1 \leq j \leq n_i$).
- (b) $\{g_{ij} + J_{\text{mod}R}^2(M_i, N) \mid 1 \leq j \leq n_i\}$ は $J_{\text{mod}R}(M_i, N)/J_{\text{mod}R}^2(M_i, N)$ の基底である ($1 \leq i \leq t$).
- (c) M' が $J_{\text{mod}R}(M', N)/J_{\text{mod}R}^2(M', N) \neq 0$ をみたす直既約 R -加群ならば, $M' \simeq M_i$ となる i がある.

命題 1.34 をみてわかるとおり, 全ての既約写像を求めるには全ての極小概分裂写像を求めればよい. そしてそれらを求めるには $\text{mod}R$ の概分裂完全列を全て計算すればよい.

以上より与えられた多元環 R に対して, $\text{mod}R$ の概分裂完全列を計算することで $\text{mod}R$ の構造が解り, R の AR-クイバーが描ける.

次の命題は概分裂完全列の例である.

命題 1.35. P を単純でない射影的かつ移入的な直既約 R -加群とする. 次は概分裂完全列である.

$$0 \longrightarrow J(P) \xrightarrow{\begin{pmatrix} q \\ i \end{pmatrix}} (J(P)/S(P)) \oplus P \xrightarrow{\begin{pmatrix} -j & p \end{pmatrix}} P/S(P) \longrightarrow 0.$$

但し, i, j は自然な単射, p, q は自然な全射とする.

この節の最後に多元環の表現型を定義し, AR-クイバーの例を紹介する.

定義 1.36. R を多元環とする. 有限生成直既約 R -加群の同型類が有限のとき, R は有限表現型 (representation-finite) であるという. これに対して有限生成直既約 R -加群の同型類が無限にあるとき, R は無限表現型 (representation-infinite) であるという.

R に有限表現型の仮定を課したとき, $\text{mod}R$ の根基は次の性質をもつ.

補題 1.37. R が有限表現型の多元環であるとき, $J_{\text{mod}R}^n = 0$ となる $n \in \mathbb{N}$ が存在する.

有限表現型の多元環の AR-クイバーに関して次の結果が知られている.

定理 1.38. 有限表現型の連結かつ基本的な多元環の AR-クイバーは連結である.

例 1.39. 多元環

$$R = \begin{pmatrix} K & K & K \\ 0 & K & K \\ 0 & 0 & K \end{pmatrix}.$$

の AR-クイバーを示す. $\text{mod}R$ の概分裂完全列を計算すると, 次が全てである.

$$0 \longrightarrow (0 \ K \ K) \xrightarrow{\begin{pmatrix} f_2 \\ g_1 \end{pmatrix}} (K \ K \ K) \oplus (0 \ K \ 0) \xrightarrow{\begin{pmatrix} g_2 & f_3 \end{pmatrix}} (K \ K \ 0) \longrightarrow 0$$

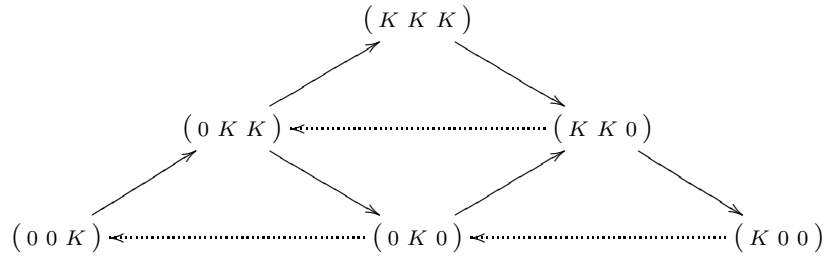
$$0 \longrightarrow (0 \ 0 \ K) \xrightarrow{f_1} (0 \ K \ K) \xrightarrow{g_1} (0 \ K \ 0) \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow (0 \ K \ 0) \xrightarrow{f_3} (K \ K \ 0) \xrightarrow{g_3} (K \ 0 \ 0) \longrightarrow 0$$

ここで

$$(K \ K \ 0) = (K \ K \ K)/(0 \ 0 \ K), \quad (K \ 0 \ 0) = (K \ K \ K)/(0 \ K \ K), \quad (0 \ K \ 0) = (0 \ K \ K)/(0 \ 0 \ K)$$

であり, f_1, f_2, f_3 は自然な単射, g_1, g_2, g_3 は自然な全射である. 従って R の AR-クイバーは以下で与えられる. 但し点線は τ を表わしている.



1.4 並進クイバー

この節では並進クイバーについて説明する. 並進クイバーは AR-クイバーのもつ特徴を抽出したクイバーであり, 実際に並進クイバーに関する結果を応用して有限表現型の多元環の AR-クイバーの構造が調べられている.

定義 1.40. Γ をクイバーとする.

- (1) $x \in \Gamma_0$ に対して

$$x^+ = \{y \in \Gamma_0 \mid \text{矢 } x \longrightarrow y \text{ が存在する}\}$$

$$x^- = \{y \in \Gamma_0 \mid \text{矢 } y \longrightarrow x \text{ が存在する}\}$$

とする.

- (2) 任意の $x \in \Gamma_0$ に対して $x^+ \cup x^-$ が有限集合であるとき, Γ は局所有限 (locally finite) であるという.

定義 1.41. Γ をクイバーとし, τ を Γ_0 の部分集合 Γ_0^* から Γ_0 への単射とする. (Γ, τ) の組が次の条件をみたすとき, (Γ, τ) を並進クイバー (translation quiver) という. また τ を (Γ, τ) の並進写像 (translation) という.

- (a) Γ は局所有限である.
- (b) Γ はループをもたない.
- (c) 任意の $x, y \in \Gamma_0$ に対して, x から y への矢は 0 本か 1 本のどちらかである.
- (d) 任意の $x \in \Gamma_0^*$ に対して $x^- = \tau(x)^+$ である.

並進クイバー (Γ, τ) について τ の定義域に属さない $x \in \Gamma_0$ を射影頂点 (projective vertex) といい, τ の像に属さない $x \in \Gamma_0$ を移入頂点 (injective vertex) という.

有限表現型の AR-クイバーは並進クイバーとなる.

命題 1.42. [4] R を有限表現型の多元環とし, Γ を R の AR-クイバーとする. このとき以下が成り立つ.

- (1) Γ は局所有限である.
- (2) 有限生成直既約 R -加群 X に対して, X から X への既約写像は存在しない.
- (3) 有限生成直既約 R -加群 X, Y に対して

$$\dim_K(J_{\text{mod}R}(X, Y)/J_{\text{mod}R}^2(X, Y)) \leq 1$$

である.

- (4) Γ は AR-移動を並進写像とする並進クイバーである.

次に安定並進クイバーを定義する.

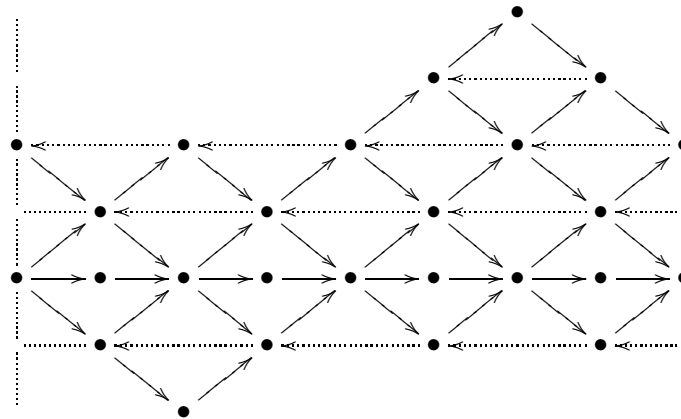
定義 1.43. 並進クイバー (Γ, τ) について, τ が Γ_0 から Γ_0 への全単射であるとき安定並進クイバーという.

並進クイバー (Γ, τ) に対して射影頂点の集合を \mathcal{P} , 移入頂点の集合を \mathcal{I} とする. Γ_0 から頂点集合

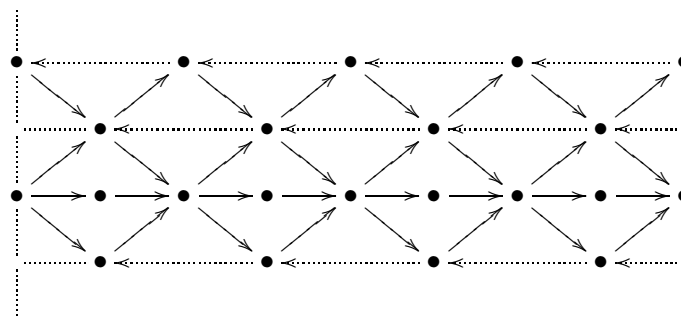
$$\bigcup_{k \geq 0} (\tau^{-k}(\mathcal{P}) \cup \tau^k(\mathcal{I}))$$

を除くことにより, 安定並進クイバーを得る. これを ${}_s\Gamma$ で表す.

例 1.44. Γ を次のクイバーとし, τ を点線とする (左端と右端の点線は同一視の点線).



これは並進クイバーであり, ${}_s\Gamma$ は次になる.



次に重要な安定並進クイバーを定義する.

定義 1.45. Δ を Dynkin 図形とする. Δ から以下のクイバー $\mathbb{Z}\Delta$ を構成する.

(a) 頂点集合は

$$(\mathbb{Z}\Delta)_0 := \mathbb{Z} \times \Delta_0 = \{(i, x) \mid i \in \mathbb{Z}, x \in \Delta_0\}$$

とする.

(b) (i, x) から $(i, x^+) \cup (i + 1, x^-)$ に属す頂点へ 1 本づつ矢を引く.

(c) τ を

$$\tau : (\mathbb{Z}\Delta)_0 \ni (i, x) \mapsto (i - 1, x) \in (\mathbb{Z}\Delta)_0$$

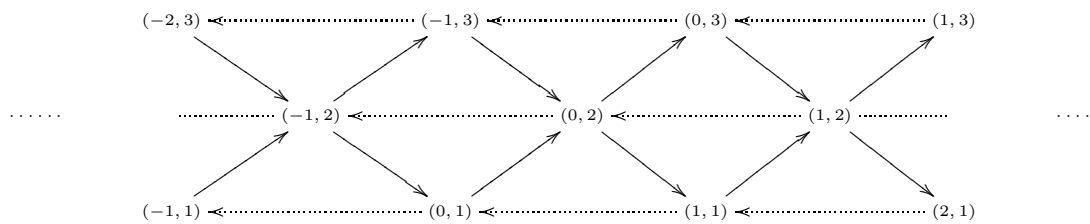
とする.

こうして構成した $(\mathbb{Z}\Delta, \tau)$ は安定並進クイバーであり, $\mathbb{Z}\Delta$ は Δ の向き付けによらないことが示されている.

例 1.46. 定義 1.45 における $\Delta = A_3$ の場合と $\Delta = D_4$ の場合を見てみよう.

$$\Delta = A_3 : 1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3$$

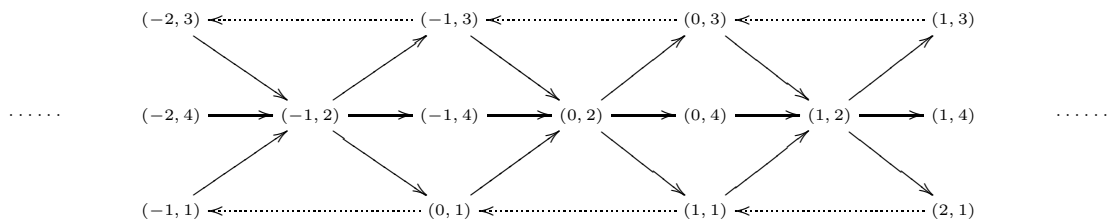
とする. このとき $(\mathbb{Z}\Delta, \tau)$ 以下で与えられる.



次に

$$\Delta = D_4 : \begin{array}{ccccc} 1 & \longrightarrow & 2 & \longrightarrow & 3 \\ & & \downarrow & & \\ & & 4 & & \end{array}$$

とする. このとき $(\mathbb{Z}\Delta, \tau)$ 以下で与えられる.



定義 1.47. $(\Gamma, \tau), (\Gamma', \tau')$ を並進クイバーとする. $f : (\Gamma, \tau) \longrightarrow (\Gamma', \tau')$ を二つの写像

$$f_0 : \Gamma_0 \longrightarrow \Gamma'_0, \quad f_1 : \Gamma_1 \longrightarrow \Gamma'_1$$

の組とする. f が次の条件をみたすとき並進クイバーの写像 (translation quiver morphism) という.

- (a) Γ の矢 $x \xrightarrow{\alpha} y$ に対して, $f_0(x) \xrightarrow{f_1(\alpha)} f_0(y)$ である.
- (b) $x \in \Gamma_0^*$ に対して, $f_0\tau(x) = \tau'f_0(x)$ である.

さらに f_0, f_1 が全単射であるとき, f は並進クイバーの同型という. 並進クイバーの自己同型のなす群を $\text{Aut}(\Gamma)$ で表す.

定義 1.48. (Γ, τ) を並進クイバーとし, G を $\text{Aut}(\Gamma)$ の部分群とする. G が次の条件をみたすとき許容群 (admissible group) という.

- (a) 任意の $x \in \Gamma_0$ に対して, Γ_0 の各 G -軌道と $\{x\} \cup x^+$ の交わりは多くても一つ.
- (b) 任意の $x \in \Gamma_0$ に対して, Γ_0 の各 G -軌道と $\{x\} \cup x^-$ の交わりは多くても一つ.

このとき Γ と G から新しい並進クイバーが構成できる. クイバー Γ/G を次で定義する.

- (a) 頂点集合は $\{Gx \mid x \in \Gamma_0\}$ とする.
- (b) Γ において x から y への矢が存在すれば, Gx から Gy への矢を引く.

許容群の条件から, Γ/G は $\tilde{\tau}(Gx) = G(\tau(x))$ を並進写像とする並進クイバーとなる. さらに (Γ, τ) が安定並進クイバーのとき, $(\Gamma, \tilde{\tau})$ は安定並進クイバーとなる. 以下混乱のないときは $\tilde{\tau}$ を単に τ で表わす.

並進クイバーの写像の定義と許容部分群の定義より次の補題が従う.

補題 1.49. (Γ, τ) を並進クイバーとし, G を $\text{Aut}(\Gamma)$ の許容部分群とする. このとき自然な並進クイバーの写像

$$\Pi : \Gamma \longrightarrow \Gamma/G$$

がある. これについて以下が成り立つ.

- (1) 任意の $x \in \Gamma_0$ に対して,

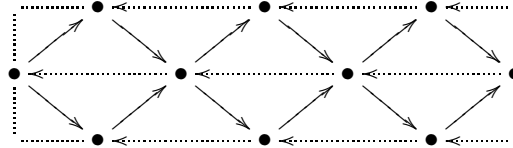
$$\Pi|_{x^+} : x^+ \longrightarrow (\Pi x)^+$$
 は全単射である.
- (2) 任意の $x \in \Gamma_0$ に対して,

$$\Pi|_{x^-} : x^- \longrightarrow (\Pi x)^-$$
 は全単射である.
- (3) 任意の $x \in \Gamma_0^*$ に対して, $\Pi(\tau x) = \tau(\Pi x)$ である.

例 1.50. 例 1.46 の $\Delta = A_3$ の場合を考える.

$$G = \{\tau^{3n} \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

と定める. このとき G は $\text{Aut}(\mathbb{Z}\Delta)$ の許容部分群であり, 並進クイバー $(\mathbb{Z}\Delta/G, \tau)$ は以下で与えられる. 但し右端と左端の点線は同一視であり, 左へ進む点線は τ を表わしている.



安定並進クイバー Γ の頂点が有限個のとき, Γ は Dynkin 図形と許容群を用いて記述できるというのが次の定理である.

定理 1.51. [8, 30] Γ を頂点が有限個である連結な安定並進クイバーとする. このとき

$$\Gamma = \mathbb{Z}\Delta/G$$

となる唯一つの Dynkin 図形 Δ と $\text{Aut}(\mathbb{Z}\Delta)$ の許容部分群 G がある. 特に有限表現型の連結かつ基本的な多元環の AR-クイバー Γ に対して

$${}_s\Gamma = \mathbb{Z}\Delta/G$$

となる唯一つの Dynkin 図形 Δ と $\text{Aut}(\mathbb{Z}\Delta)$ の許容部分群 G がある.

この定理は 4 章の主定理の証明において重要になる.

1.5 傾加群

環上の加群を調べるにあたって, 調べる対象である環から, より扱いやすい環に視点を移すことができれば便利である. このことから, 二つの環上の加群圏がいつ一致するかということは重要な問題である. この問題に回答を与えるのが次の森田の定理である.

定理 1.52 (森田). 環 R, S について次は同値である.

- (1) R 上の有限生成射影生成加群 P が存在して, $S \simeq \text{End}_R(P)$ である.
- (2) $\text{Mod}R$ と $\text{Mod}S$ は圏同値である.
- (3) $\text{mod}R$ と $\text{mod}S$ は圏同値である.

例えばこの定理のよく知られた応用として次の命題がある.

命題 1.53. R をアルティン環とする. このとき

$$\text{Mod}R \simeq \text{Mod}S$$

なる基本的なアルティン環 S が存在する.

この命題によりアルティン環上の加群を調べるときは、環が基本的であるという仮定をつけてもよい。環が基本的であるということは非常に強力な仮定であり、我々に数々の恩恵を与えてくれる。このように森田の定理によって、与えられた環上の加群を調べる際により良い環に置き換えて加群の構造を調べることができるのである。但し定理 1.52 (1) の有限生成射影生成というのは強い条件で、一つの環に対してのその上の有限生成射影生成加群はほとんど存在しない。

以下では有限生成 R -加群の圏 $\text{mod}R$ について考える。これから述べる多元環上の傾加群とは定理 1.52 の条件 (1) にある有限生成射影生成加群の類似であり、傾加群が一つ与えられると定理 1.52 (3) に近い状況が起こる。すなわち多元環 R 上の傾加群 T があるとき、 $S = \text{End}_R(T)$ とおくと $\text{mod}R$ と $\text{mod}S$ のある充満部分圏の間に圏同値が導かれる。

以下この節では R を基本的な多元環とする。

定義 1.54. $T \in \text{mod}R$ が以下の三条件をみたすとき、 R 上の傾加群 (tilting module) であるという。

(T1) $\text{pd} M \leq 1$.

(T2) $\text{Ext}_R^1(T, T) = 0$.

(T3) ある $T_0, T_1 \in \text{add}T$ が存在して、次の完全列が存在する。

$$0 \longrightarrow R \longrightarrow T_0 \longrightarrow T_1 \longrightarrow 0.$$

定義の (T1),(T2),(T3) は射影生成という条件を緩めたものになっている。実際、射影生成加群は傾加群である。

今 R 上の傾加群 T が与えられたとする。 T より定義される次の二つの $\text{mod}R$ の充満部分圏を定める。

$$\mathcal{T}(T) := \{M \in \text{mod}R \mid \text{Ext}_R^1(T, M) = 0\}$$

$$\mathcal{F}(T) := \{M \in \text{mod}R \mid \text{Hom}_R(T, M) = 0\}$$

さらに $S = \text{End}_R(T)$ とおき、次の二つの $\text{mod}S$ の充満部分圏を定める。

$$\mathcal{X}(T) := \{M \in \text{mod}S \mid M \otimes_S T = 0\}$$

$$\mathcal{Y}(T) := \{M \in \text{mod}S \mid \text{Tor}_1^S(M, T) = 0\}$$

このように定めた充満部分圏の組の間に次の圏同値が発生する。

定理 1.55 (Brenner-Butler). $T \in \text{mod}R$ を傾加群とし、 $S = \text{End}_R(T)$ とおく。このとき次の二つの圏同値を得る。

- (1) 二つの関手 $\text{Hom}_R(T, -) : \mathcal{T}(T) \longrightarrow \mathcal{Y}(T)$ と $- \otimes_S T : \mathcal{Y}(T) \longrightarrow \mathcal{T}(T)$ が定義され、互いに quasi-inverse である。従って

$$\mathcal{T}(T) \simeq \mathcal{Y}(T)$$

である。

(2) 二つの関手 $\text{Ext}_R^1(T, -) : \mathcal{F}(T) \rightarrow \mathcal{X}(T)$ と $\text{Tor}_1^S(-, T) : \mathcal{X}(T) \rightarrow \mathcal{F}(T)$ が定義され, 互いに quasi-inverse である. 従って

$$\mathcal{F}(T) \simeq \mathcal{X}(T)$$

である.

この定理は Brenner-Butler の定理と呼ばれているもので, 定理 1.52 (1) \implies (2) の類似である. 傾加群は射影生成加群を緩めたものであるから加群圏全体の圏同値は得られないが, 部分的に圏同値を得るのである.

例 1.56. 多元環

$$R = \begin{pmatrix} K & K & K \\ 0 & K & K \\ 0 & 0 & K \end{pmatrix}$$

を考える. R の傾加群として

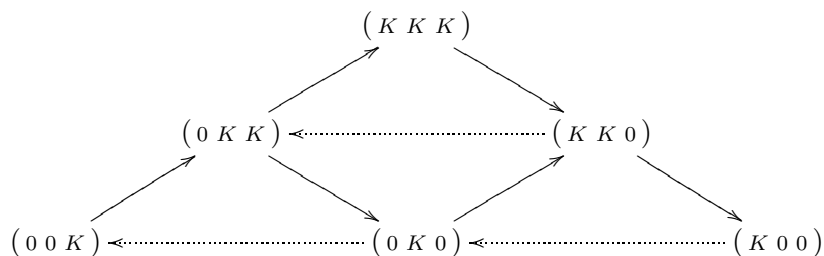
$$T = (K K K) \oplus (K K 0) \oplus (0 K 0)$$

がとれる. $S = \text{End}_R(T)$ とおくと,

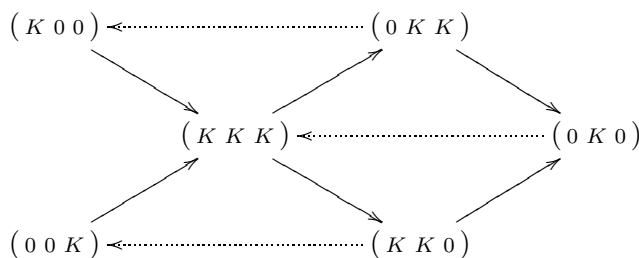
$$S \simeq \begin{pmatrix} K & 0 & 0 \\ K & K & K \\ 0 & 0 & K \end{pmatrix}$$

である. R と S の AR-クイバーを示し, $\mathcal{T}(T), \mathcal{F}(T), \mathcal{X}(T), \mathcal{Y}(T)$ を図示する. 但し加群を表し方は, 例 1.39 と同じとする.

R の AR-クイバー



S の AR-クイバー



この節の最後に傾加群の条件 (T3) の言い換えである次の命題述べておく. 命題の中の (T3') は (T3) よりも扱い易く, 5 章では非常に重要になる言い換えである.

命題 1.57. $T \in \text{mod}R$ が (T1),(T2) をみたすとする. このとき T が (T3) をみたすことと, 次の (T3') をみたすことは同値である.

(T3') T の互いに非同型な直既約直和因子の個数は $\text{Pi}(R)$ の元の個数と同じである.

定義 1.58. T を傾加群とし, その直既約分解を $T = T_1 \oplus \cdots \oplus T_m$ とする. T_1, \dots, T_m が互いに非同型であるとき, T は基本的 (basic) であるという. このとき命題 1.57 より m は $\text{Pi}(R)$ の元の個数と一致する. 基本的な R 上の傾加群の同型類の集合を $\text{tilt}(R)$ と表すことにする.

Brenner-Butler の定理で見たように, R の傾加群 T があると R の有限生成加群圏に近い有限生成加群圏をもつ多元環 $S = \text{End}_R(T)$ が作られる. このときある種の問題は R から S に移して考えることができる. このことから与えられた多元環に対して, その上の傾加群を全て求めるということは一つの問題である. 5章では原田多元環 R の $\text{tilt}(R)$ の記述を与えることによって, 原田多元環上の傾加群を全て求める.

2 原田多元環の基本事項

ここでは研究の対象である原田多元環 (以下単に原田多元環) について説明する. 昔から調べられている二つの多元環がある. 一つは中山多元環と呼ばれる多元環で, 有限生成直既約射影加群の構造が非常に単純になっている多元環である (定義 2.1). もう一つは自己移入多元環と呼ばれている多元環で, その名の通り環自身を加群と見たときに移入的である多元環である (定義 2.4). 原田多元環は中山多元環と自己移入多元環を同時に一般化した多元環である. それは以下で述べている定義 2.7 から窺えるが, 実際に原田多元環は中山多元環と自己移入多元環を含む環のクラスであることが [6] で述べられている. また [6, 22, 23, 27] で原田多元環と中山多元環と自己移入多元環の三者の関係が調べられており, 特に [27] で原田多元環と自己移入多元環は構造的に深い関係にあることが述べられている. 原田多元環を研究する一つの理由として, 中山多元環と自己移入多元環をより一般的に扱い, 得られた結果をそれらに応用して環構造を調べることが挙げられる.

3章, 4章, 5章では原田多元環を多元環の道具を使って調べ, 新しい結果を得る. この章ではそこで必要な原田多元環の定義と原田多元環の構造定理を述べる. とりわけ原田多元環の構造定理は3章, 4章の基盤となる重要な定理である.

1節で中山多元環と自己移入多元環の定義と例を紹介する. 2節で原田多元環を直既約射影加群の構造によって定義し, いくつかの例を紹介する. そして3節で原田多元環の研究において重要な結果である原田環の構造定理を述べる. 最後に4節で原田環の連結性に関する補題を証明する. なおここで紹介する事実は [6, 9, 27] 等で述べられている結果の一部である.

2.1 中山多元環と自己移入多元環

この節では中山多元環と自己移入多元環を定義し, それらの例を挙げる. 最初に中山多元環を定義し, 例を紹介する.

定義 2.1. R を多元環とする.

- (1) X を有限生成 R -加群とする. X の組成列が唯一つであるとき, X を単列加群 (uniserial module) という.
- (2) 有限生成直既約射影 R -加群と有限生成直既約射影 R^{op} -加群が単列加群であるとき, R を中山多元環 (Nakayama algebra) という.

定義からわかるように中山多元環は, 射影加群が非常に単純な構造をもった環である. そのことが次の例からわかってもらえるだろう.

例 2.2.

- (1) 多元環

$$R = \begin{pmatrix} K & K & K \\ 0 & K & K \\ 0 & 0 & K \end{pmatrix}$$

は中山多元環である. 有限生成直既約射影 R -加群の組成列は

$$(000) \subset (00K) \subset (0KK) \subset (KKK)$$

及び, その 0 から始まり射影加群で終わる部分列のみである. また有限生成直既約射影 R^{op} -加群の組成列も同様に一通りのみ与えられる.

(2) 多元環

$$R = \begin{pmatrix} K[x]/(x^3) & K[x]/(x^3) & K[x]/(x^3) \\ (x)/(x^3) & K[x]/(x^3) & K[x]/(x^3) \\ (x)/(x^3) & (x)/(x^3) & K[x]/(x^3) \end{pmatrix}$$

は中山多元環である. 有限生成直既約射影 R -加群の組成列は

$$\begin{aligned} (000) \subset (00(x^2)/(x^3)) &\subset (0(x^2)/(x^3)(x^2)/(x^3)) \\ &\subset ((x^2)/(x^3)(x^2)/(x^3)(x^2)/(x^3)) \\ &\subset ((x^2)/(x^3)(x^2)/(x^3)(x)/(x^3)) \\ &\subset ((x^2)/(x^3)(x)/(x^3)(x)/(x^3)) \\ &\subset ((x)/(x^3)(x)/(x^3)(x)/(x^3)) \\ &\subset ((x)/(x^3)(x)/(x^3)K[x]/(x^3)) \\ &\subset ((x)/(x^3)K[x]/(x^3)K[x]/(x^3)) \\ &\subset (K[x]/(x^3)K[x]/(x^3)K[x]/(x^3)) \end{aligned}$$

及び, その 0 から始まり射影加群で終わる部分列のみである. また有限生成直既約射影 R^{op} -加群の組成列も同様に一通りのみ与えられる.

中山多元環は射影加群の構造故に, 直既約加群も単純な構造をしていることが示されている.

定理 2.3. [4, V Lemma3.5] R を中山多元環とする.

- (1) 任意の有限生成直既約 R -加群 X に対して, $X \simeq P/I$ となる有限生成直既約射影 R -加群 P とその部分加群 I が存在する. 従って特に有限生成直既約 R -加群は単列加群である.
- (2) R は有限表現型である.

次に自己移入多元環とその中山置換の定義を述べ, 例を紹介する.

定義 2.4. 多元環 R が R -加群として移入的であり, また R^{op} -加群としても移入的であるとき, R を自己移入多元環 (self-injective algebra) という.

自己移入多元環は多くの特徴付けが知られている ([18, 19, 13, 21]). その中の一つを紹介する.

定理 2.5. [13, Thm1],[18, Thm2] 多元環 R に対して次は同値である.

- (1) R は自己移入多元環である.
- (2) R の直交原始冪等元の基本系を $\{e_1, \dots, e_m\}$ とするとき, 次の条件をみたす $\{1, \dots, m\}$ 上の置換 σ が存在する.

$$S(e_i R) \simeq e_{\sigma(i)} R / J(e_{\sigma(i)} R), \quad S(Re_{\sigma(i)}) \simeq Re_i / J(Re_i).$$

この置換 σ を R の中山置換 (Nakayama permutation) という.

自己移入多元環の例を挙げる.

例 2.6.

- (1) 体と有限群で構成される群環は自己移入多元環である.
- (2) R を次のクイバーと関係式で構成される多元環とする.

$$1 \begin{array}{c} \xrightarrow{\alpha} \\ \xleftarrow{\beta} \end{array} 2 \begin{array}{c} \xrightarrow{\gamma} \\ \xleftarrow{\delta} \end{array} 3 \quad \begin{cases} \beta\alpha = \gamma\delta \\ \alpha\beta = 0 \\ \delta\gamma = 0 \end{cases}$$

有限生成直既約射影 R -加群をレヴィー列で表わす.

$$\varepsilon_1 R = \frac{1}{3}, \quad \varepsilon_2 R = \frac{1}{2} \frac{2}{3}, \quad \varepsilon_3 R = \frac{3}{1}.$$

有限生成直既約移入 R -加群も同様にレヴィー列で表わすと, これらと一致していることがわかる. 従って R は自己移入多元環であり, レヴィー列から R の中山置換は

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

である.

2.2 原田多元環の定義

まず最初に原田多元環を定義する.

定義 2.7. R を多元環とする. 直交原始冪等元の完全系 $\text{Pi}(R)$ が次のように並べることができるとき, R を原田多元環 (Harada algebra) であるという.

$$\text{Pi}(R) = \{e_{ij}\}_{i=1, j=1}^m, n_i$$

- (a) $e_{i1}R$ は右移入 R -加群である. ($1 \leq i \leq m$)
- (b) $e_{i,j+1}R \simeq J(e_{ij}R)$ であるか, または $e_{i,j+1}R \simeq e_{ij}R$ である. ($1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n_i - 1$)

R が原田多元環でも R^{op} が原田多元環であるとは限らない (例 2.8 (6)). 原田多元環のクラスは森田同値で閉じているので, 基本的な原田多元環を考えればよい.

原田多元環の例をいくつか紹介しよう.

例 2.8.

- (1) 定義より自己移入多元環は原田多元環である.
- (2) 中山多元環は原田多元環である ([6]). 以下の例 (3),(4) は中山多元環である.
- (3) 上半三角行列環

$$R = \begin{pmatrix} K & K & K & K & K \\ 0 & K & K & K & K \\ 0 & 0 & K & K & K \\ 0 & 0 & 0 & K & K \\ 0 & 0 & 0 & 0 & K \end{pmatrix}$$

を考える. これについて

- (a) $\langle 1 \rangle_{11}R$ は右移入 R -加群である.
- (b) $\langle 1 \rangle_{i+1,i+1}R \simeq J(\langle 1 \rangle_{ii}R)$ である. ($1 \leq i \leq 4$)

よって R は原田多元環である ($\langle 1 \rangle_{ij}$ は 3 ページの記号表参照).

- (4) 例 (2) の剰余環を考える.

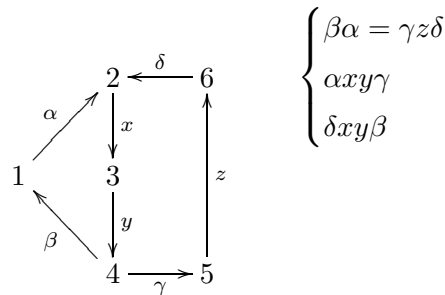
$$R = \begin{pmatrix} K & K & K & K & K \\ 0 & K & K & K & K \\ 0 & 0 & K & K & K \\ 0 & 0 & 0 & K & K \\ 0 & 0 & 0 & 0 & K \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & K & K & K \\ 0 & 0 & 0 & 0 & K \\ 0 & 0 & 0 & 0 & K \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

とし, $\bar{R} = R/X$ とする. これについて

- (a) $\langle 1 \rangle_{11}\bar{R}, \langle 1 \rangle_{22}\bar{R}, \langle 1 \rangle_{44}\bar{R}$ は右移入 R -加群である.
- (b) $\langle 1 \rangle_{33}\bar{R} \simeq J(\langle 1 \rangle_{22}\bar{R}), \langle 1 \rangle_{55}\bar{R} \simeq J(\langle 1 \rangle_{44}\bar{R})$ である.

よって \bar{R} は原田多元環である.

- (5) 次のクイバーと関係式から構成される多元環 R を考える.



有限生成直既約射影 R -加群をレヴィー列で表わしてみる.

$$\varepsilon_1 = \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 1 \end{matrix}, \quad \varepsilon_2 = \begin{matrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix}, \quad \varepsilon_3 = \begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix}, \quad \varepsilon_4 = \begin{matrix} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix}, \quad \varepsilon_5 = \begin{matrix} 5 \\ 6 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix}, \quad \varepsilon_6 = \begin{matrix} 6 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix}.$$

これについて

- (a) $\varepsilon_1 R, \varepsilon_2 R, \varepsilon_5 R$ は右移入 R -加群である.
 (b) $\varepsilon_3 R \simeq J(\varepsilon_2 R), \varepsilon_4 R \simeq J(\varepsilon_3 R), \varepsilon_6 R \simeq J(\varepsilon_5 R)$ である.

よって R は原田多元環である. この例は中山多元環でも自己移入多元環でもない原田多元環の例である.

- (6) 局所自己移入多元環 $Q = K[x, y]/(x^2, y^2)$ を考える. $J(Q) = (x, y)/(x^2, y^2), S(Q) = (xy, x^2, y^2)/(x^2, y^2)$ である.

$$R = \left(\begin{array}{cc} Q & Q \\ J(Q) & Q \end{array} \right) / \left(\begin{array}{cc} 0 & S(Q) \\ 0 & S(Q) \end{array} \right)$$

とする. R は原田多元環であることが言える. しかし二列目の底は単純ではないことから, R^{op} は原田多元環ではない.

2.3 原田多元環の構造定理

ここでは3章と4章の基本となる原田多元環の構造定理を紹介する. 原田多元環の構造定理とは, 全ての原田多元環は自己移入多元環にある操作を施すことにより構成されるという定理である. ある操作とはブロック拡大, 上階段型剰余環を作るという二つの操作の事である. まずはこの二つの操作を定義し, その後に原田多元環の構造定理を述べよう.

定義 2.9. R を基本的な多元環とし, $\text{Pi}(R) = \{e_1, \dots, e_m\}$ とする.

$$A_{ij} = e_i R e_j \quad (1 \leq i, j \leq m)$$

とおく. 特に $Q_i = A_{ii}$ ($1 \leq i \leq m$) とおく. このとき R は次の行列で表現できる.

$$R = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1m} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_1 & A_{12} & \cdots & A_{1m} \\ A_{21} & Q_2 & \cdots & A_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & Q_m \end{pmatrix}$$

これから $n_1, \dots, n_m \in \mathbb{N}$ に対する R のブロック拡大 $R(n_1, \dots, n_m)$ を構成する.

$$P_{ij, st} = \begin{cases} Q_i & (i = s, j \leq t) \\ J(Q_i) & (i = s, j > t) \\ A_{is} & (i \neq s) \end{cases}$$

とし, $n_i \times n_s$ 行列 $P(i, s)$ を

$$P(i, s) = \begin{pmatrix} P_{i1,s1} & P_{i1,s2} & \cdots & P_{i1,sn_s} \\ P_{i2,s1} & P_{i2,s2} & \cdots & P_{i2,sn_s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{in_i,s1} & P_{in_i,s2} & \cdots & P_{in_i,sn_s} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{cases} \begin{pmatrix} Q_i & \cdots & Q_i \\ & \ddots & \vdots \end{pmatrix} & (i = s) \\ \begin{pmatrix} J(Q_i) & Q_i \\ A_{is} & \cdots & A_{is} \\ \vdots & \vdots \\ A_{is} & \cdots & A_{is} \end{pmatrix} & (i \neq s) \end{cases}$$

とする. これをもって

$$P = R(n_1, \dots, n_m) = \begin{pmatrix} P(1,1) & P(1,2) & \cdots & P(1,m) \\ P(2,1) & P(2,2) & \cdots & P(2,m) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P(m,1) & P(m,2) & \cdots & P(m,m) \end{pmatrix}$$

と定める. この $n_1 + \cdots + n_m$ 次正方形行列 P は通常の行列の和と積によって環になる. $P = R(n_1, \dots, n_m)$ を R のブロック拡大 (block extension) という. P は基本的な多元環であり, 直交原始冪等元の完全系として

$$\{p_{ij} = \langle 1 \rangle_{ij,ij} \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n_i\}$$

がとれる.

このように定義したブロック拡大について次が成り立つ.

命題 2.10. 基本的な自己移入多元環の任意のブロック拡大は基本的な原田多元環になる.

[証明] 定義 2.9 の記号を用いる. R が基本的な自己移入多元環であるとする. 次のことが示せる.

- (a) $p_{i1}R$ は右移入 R -加群である. ($1 \leq i \leq m$)
- (b) $p_{i,j+1}R \simeq J(p_{ij}R)$ である. ($1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n_i - 1$)

従って $R(n_1, \dots, n_m)$ は原田多元環であることがわかる. □

例 2.11.

- (1) 例 2.8 (2) は K の 5 に対するブロック拡大である.

(2) 定義 2.9 において, $m = 2, n_1 = 3, n_2 = 2$ のときを考える. このとき

$$R(3, 2) = \left(\begin{array}{ccc|cc} Q_1 & Q_1 & Q_1 & A_{12} & A_{12} \\ J(Q_1) & Q_1 & Q_1 & A_{12} & A_{12} \\ J(Q_1) & J(Q_1) & Q_1 & A_{12} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{21} & A_{21} & Q_2 & Q_2 \\ A_{21} & A_{21} & A_{21} & J(Q_2) & Q_2 \end{array} \right)$$

である. もし R が自己移入多元環ならば $R(3, 2)$ は原田多元環になる.

従ってブロック拡大は自己移入多元環から原田多元環を構成する一つの方法である. 次にブロック拡大を特別なイデアルで割ることにより, 新しい原田多元環が構成できることを述べる.

定義 2.12. R を基本的な自己移入多元環とし, $\text{Pi}(R) = \{e_1, \dots, e_m\}$ とする. また σ をその中山置換とする. 定義 2.9 の記号をそのまま用いる.

まず最初に $P(i, \sigma(i))$ の $(P(i, i), P(\sigma(i), \sigma(i)))$ -両側部分加群 $S(i, \sigma(i))$ を作る.

(I) $i = \sigma(i)$ のとき. 次の自然数の列をとる.

$$1 \leq c_{i1} \leq c_{i2} \leq \dots \leq c_{in_i} \leq n_i.$$

$P(i, i)$ の部分集合 $S(i, i)$ を定める. まず

$$S_{ij, it} = \begin{cases} 0 & (1 \leq t \leq c_{ij}), \\ S(Q_i) & (c_{ij} < t \leq n_i) \end{cases}$$

とする. $S(Q_i)$ は左 Q_i 単純かつ右 Q_i 単純加群であることを注意しておく. そして

$$P(i, i) \supset S(i, i) = \begin{pmatrix} S_{i1, i1} & S_{i1, i2} & \cdots & S_{i1, in_i} \\ S_{i2, i1} & S_{i2, i2} & \cdots & S_{i2, in_i} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{in_i, i1} & S_{in_i, i2} & \cdots & S_{in_i, in_i} \end{pmatrix}$$

とする. $S(i, i)$ は $P(i, i)$ のイデアルになる. このとき $S(i, i)$ は次の形をしている.

$$S(i, i) = \begin{pmatrix} 0 \cdots 0 & \begin{array}{c} S(Q_i) \\ \hline \\ \hline \\ \hline \end{array} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(II) $i \neq \sigma(i)$ のとき. 次の自然数の列をとる.

$$1 \leq c_{i1} \leq c_{i2} \leq \dots \leq c_{in_i} \leq n_{\sigma(i)}.$$

$P(i, \sigma(i))$ の部分集合 $S(i, \sigma(i))$ を定める. まず

$$S_{ij, \sigma(i)t} = \begin{cases} 0 & (1 \leq t \leq c_{ij}), \\ S(A_{i\sigma(i)}) & (c_{ij} < t \leq n_{\sigma(i)}) \end{cases}$$

とする. $S(A_{i\sigma(i)})$ は左 Q_i 単純かつ右 $Q_{\sigma(i)}$ 単純加群であることを注意しておく. そして

$$P(i, \sigma(i)) \supset S(i, \sigma(i)) = \begin{pmatrix} S_{i1, \sigma(i)1} & S_{i1, \sigma(i)2} & \cdots & S_{i1, \sigma(i)n_{\sigma(i)}} \\ S_{i2, \sigma(i)1} & S_{i2, \sigma(i)2} & \cdots & S_{i2, \sigma(i)n_{\sigma(i)}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{in_i, \sigma(i)1} & S_{in_i, \sigma(i)2} & \cdots & S_{in_i, \sigma(i)n_{\sigma(i)}} \end{pmatrix}$$

とする. $S(i, \sigma(i))$ は $P(i, \sigma(i))$ の $(P(i, i), P(\sigma(i), \sigma(i)))$ -両側部分加群になる. このとき $S(i, \sigma(i))$ は次の形をしている.

$$S(i, \sigma(i)) = \begin{pmatrix} 0 \cdots 0 & \begin{array}{|l} S(A_{i\sigma(i)}) \end{array} \\ \vdots & \vdots \\ 0 & \end{pmatrix}.$$

このように (I), (II) で定めた $S(i, \sigma(i))$ をもって, $P = R(n_1, \dots, n_m)$ の部分集合 X を作る.

$$P(i, s) \supset X(i, s) = \begin{cases} S(i, \sigma(i)) & (s = \sigma(i)), \\ 0 & (s \neq \sigma(i)), \end{cases}$$

として,

$$X = \begin{pmatrix} X(1,1) & X(1,2) & \cdots & X(1,m) \\ X(2,1) & X(2,2) & \cdots & X(2,m) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X(m,1) & X(m,2) & \cdots & X(m,m) \end{pmatrix}.$$

とする. この X は P のイデアルになる. そこで P の剰余環

$$\bar{P} = P/X = R(n_1, \dots, n_m)/X$$

を考える. この剰余環を $R(n_1, \dots, n_m)$ の上階段型剰余環 (upper staircase factor ring) という.

このように定義した上階段型剰余環について次が成り立つ.

命題 2.13. 基本的な自己移入多元環のブロック拡大の上階段型剰余環は基本的な原田多元環になる.

[証明] 定義 2.9, 定義 2.12 の記号を用いる. R が基本的な自己移入多元環であるとする. $l_{i0}, l_{i1}, \dots, l_{iu_i}$ を次の条件をみたす自然数の列とする.

- (1) $l_{i0} = 0, l_{iu_i} = n_i$.
- (2) $c_{i,l_{ij-1}+1} = \dots = c_{il_{ij}} \ (1 \leq j \leq u_i)$.
- (3) $c_{il_{ij}} < c_{i,l_{ij}+1} \ (1 \leq j \leq u_i)$.

このとき次が示せる.

- (a) $p_{i,l_{ij-1}+1}R$ は右移入 R -加群である. $(1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq u_i)$
- (b) $p_{i,k+1}R \simeq J(p_{ik}R)$ である. $(1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq u_i, l_{ij-1} + 1 \leq k \leq l_{ij} - 1)$

従って $R(n_1, \dots, n_m)$ は原田多元環であることがわかる. □

例 2.14.

- (1) 例 2.7 (3) の R は K の 5 に対するブロック拡大であると述べた. R/X は自然数の列を

$$c_{11} = 1, c_{12} = 4, c_{13} = 4, c_{14} = 5, c_{15} = 5$$

としたときの段階型剰余環である.

- (2) 例 2.11 (2) の $P = R(3, 2)$ を考える. 今 R は中山置換が恒等置換である基本的な自己移入多元環であると仮定する. 次の自然数の列をとる.

$$c_{11} = 1, c_{12} = 2, c_{13} = 2, c_{21} = 1, c_{22} = 2.$$

このとき X は次で定められる.

$$X = \left(\begin{array}{ccc|cc} 0 & S(Q_1) & S(Q_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S(Q_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S(Q_1) & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & S(Q_2) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

剰余環 P/X は基本的な原田多元環になる.

自己移入多元環のブロック拡大とその段階型剰余環が原田多元環になることを述べた. 実は全ての原田多元環はこの方法で構成することができる.

定理 2.15. (原田多元環の構造定理 [27, Thm2]) 任意の基本的な原田多元環 T に対してある基本的な自己移入多元環 R が存在して, T は R のあるブロック拡大の段階型剰余環と同型である.

この構造定理より自己移入多元環とそのブロック拡大の段階型剰余環の関係を調べるというのが, 原田多元環を研究する一つの方法である.

2.4 原田多元環の連結性

基本的な自己移入多元環のブロック拡大やその上階段型剰余環はまた基本的であった。この節ではこれらの連結性について述べる。

命題 2.16. R を連結かつ基本的な自己移入多元環とし, $P_i(R) = \{e_1, \dots, e_m\}$ とする。

- (1) 任意の $n_1, \dots, n_m \in \mathbb{N}$ に対して $R(n_1, \dots, n_m)$ は連結である。
- (2) 連結でない R のブロック拡大の上階段型剰余環が存在するならば, $R \simeq K$ である。

[証明] (1) $P = R(n_1, \dots, n_m)$ とおき, 定義 2.9 の記号を用いる。 P が連結でないとする。すなわち直交原始冪等元の完全系 $\{p_{ij}\}$ の分解による P の中心直交冪等元の組 e, f が存在するとする。 e が p_{11} を含むとする。

$$p_{i1}Pp_{s1} = e_iRe_s$$

であることと, R が連結であることから e は p_{11}, \dots, p_{m1} を含む。さらに

$$p_{i1}Pp_{ij} = e_iRe_i \quad (1 \leq j \leq n_i)$$

であるから, e は p_{ij} を全て含む。すなわち

$$\begin{aligned} e &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_i} p_{ij} = 1, \\ f &= 0 \end{aligned}$$

である。従って矛盾である。

(2) 連結でない R のブロック拡大の上階段型剰余環を $\bar{P} = P/X$ とし, 定義 2.12 の記号を用いる。直交原始冪等元の完全系 $\{p_{ij}\}$ の分解による \bar{P} の中心直交冪等元の組 e, f が存在する。 e が p_{11} を含むとする。

$$p_{i1}\bar{P}p_{s1} = e_iRe_s$$

であることと, R が連結であることから e は p_{11}, \dots, p_{m1} を含む。

$i \neq \sigma(i)$ ならば

$$p_{i1}\bar{P}p_{ij} = e_iRe_i \quad (1 \leq j \leq n_i)$$

であるから e は p_{ij} ($1 \leq j \leq n_i$) を含む。従って f に含まれる p_{st} をとると, $s = \sigma(s)$ である。 $i \neq s$ に対して

$$0 = p_{i1}\bar{P}p_{st} = e_iRe_s,$$

$$0 = p_{st}\bar{P}p_{i1} = e_sRe_i$$

である。このことと R が連結であるという仮定から $m = 1$ でなければならない。 $s = 1$ である。

今 p_{11} が e に含まれ, p_{1t} が f に含まれているから

$$0 = p_{1t}\bar{P}p_{11} = J(e_1Re_1) = J(R)$$

である。以上より R は $J(R) = 0$ なる局所多元環である。従って $R \simeq K$ である。 \square

3 原田多元環のクイバー表示

ここでは原田多元環のクイバー表示を決定する. この章の結果は新しい結果であり, [32]の内容を要約したものである. 定理 2.15 で原田多元環は自己移入多元環のブロック拡大の上階段型剰余環であると述べた. そこで与えられた自己移入多元環のクイバー表示が, ブロック拡大の上階段型剰余環によってどのように変化するかを調べる. つまりここでの目的は原田多元環のクイバー表示を対応する自己移入多元環のクイバー表示で記述することである.

1 節で記号の準備をし, この章の主定理を述べる. この章の主定理とは与えられた多元環のブロック拡大のクイバー表示を, 元の多元環のクイバー表示で記述することである. 2 節で 1 節で述べた主定理の証明をする. 3 節で主定理の結果を自己移入多元環のブロック拡大に適用する. そして最後に上階段型剰余環を与えるイデアルを生成する関係式を求める.

3.1 ブロック拡大のクイバー表示

R を基本的な多元環とし, $\text{Pi}(R) = \{e_1, \dots, e_m\}$ とする. 定義 2.9 の記号を用いる. R のジャコブソン根基 $J(R)$ は次のように行列で表現できる ([3]).

$$J(R) = \begin{pmatrix} J(Q_1) & A_{12} & \cdots & A_{1m} \\ A_{21} & J(Q_2) & \cdots & A_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & J(Q_m) \end{pmatrix}.$$

これを用いて $J(R)^2$ を計算すると次のようになる.

$$J(R)^2 = \begin{pmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{m1} & \cdots & B_{mm} \end{pmatrix}, \quad (1)$$

$$B_{ij} = \begin{cases} J(Q_i)^2 + \sum_{k \neq i} A_{ik} A_{ki} & (i = j), \\ J(Q_i) A_{ij} + A_{ij} J(Q_j) + \sum_{k \neq i, j} A_{ik} A_{kj} & (i \neq j). \end{cases}$$

ここで

$$d_{ij} = \begin{cases} \dim_K J(Q_i)/B_{ii} & (i = j), \\ \dim_K A_{ij}/B_{ij} & (i \neq j). \end{cases}$$

とおく. R のクイバー Q は以下で定められるクイバーであった.

- (a) Q の頂点の集合は $\{1, 2, \dots, m\}$ とする.
- (b) i から j へ d_{ij} 本の矢 $\{\alpha_{ij}^1, \alpha_{ij}^2, \dots, \alpha_{ij}^{d_{ij}}\}$ を引く.

道多元環 KQ から R への全射環準同型を作る. $J(Q_i)/B_{ii}, A_{ij}/B_{ij}$ の基底

$$\{x_{ij}^1, x_{ij}^2, \dots, x_{ij}^{d_{ij}}\}$$

をとる. このとき次をみたす環準同型 $\varphi: KQ \rightarrow R$ が作れる.

$$\begin{aligned} KQ \ni i &\longmapsto \langle 1 \rangle_{ii} \in R, \\ KQ \ni \alpha_{ij}^t &\longmapsto \langle x_{ij}^t \rangle_{ij} \in R. \end{aligned}$$

この φ は全射になることが言える. 従って

$$KQ/\text{Ker } \varphi \simeq R$$

である. $\text{Ker } \varphi$ は許容イデアルであり, 従って有限個の Q の関係式 ρ_1, \dots, ρ_w があって

$$\text{Ker } \varphi = (\rho_1, \dots, \rho_w)$$

と書ける.

これらの記号を用いて, R のブロック拡大のクイバーを与える定理を述べよう.

定理 3.1. $n_1, \dots, n_m \in \mathbb{N}$ とし, $P = R(n_1, \dots, n_m)$ とおく. P のクイバー Q' は次で与えられる.

- (a) Q' の頂点の集合は $\{(i, j) \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n_i\}$ とする.
- (b) 頂点の間に次の二種類の矢を引く.
 - (i, j) から $(i, j+1)$ へ 1 本の矢 δ_{ij} を引く.
 - (i, n_i) から $(s, 1)$ へ d_{is} 本の矢 $\{\beta_{is}^1, \beta_{is}^2, \dots, \beta_{is}^{d_{is}}\}$ を引く.

さらに R のブロック拡大の関係式を記述する. そのために必要な拡張写像を定義する.

定義 3.2. 定理 3.1 の記号を用いる. KQ_+, KQ'_+ をそれぞれ Q, Q' の長さ 1 以上の全ての道を基底とする KQ, KQ' の部分ベクトル空間とする.

$$\delta_i = \delta_{i1}\delta_{i2}\cdots\delta_{in_i-1} \in KQ' \quad (1 \leq i \leq m)$$

とおく. 線型写像 $e: KQ_+ \rightarrow KQ'_+$ を次のように定める. 任意の Q の道

$$\begin{aligned} p &= \alpha_{i_1 i_2}^{t_1} \alpha_{i_2 i_3}^{t_2} \cdots \alpha_{i_k i_{k+1}}^{t_k} \\ &= i_1 \xrightarrow{\alpha_{i_1 i_2}^{t_1}} i_2 \xrightarrow{\alpha_{i_2 i_3}^{t_2}} i_3 \longrightarrow \cdots \xrightarrow{\alpha_{i_k i_{k+1}}^{t_k}} i_{k+1} \end{aligned}$$

に対して KQ' の道

$$\begin{aligned} e(p) &= \beta_{i_1 i_2}^{t_1} \delta_{i_2} \beta_{i_2 i_3}^{t_2} \cdots \beta_{i_{k-1} i_k}^{t_{k-1}} \delta_{i_k} \beta_{i_k i_{k+1}}^{t_k} \\ &= (i_1, n_{i_1}) \xrightarrow{\beta_{i_1 i_2}^{t_1}} (i_2, 1) \xrightarrow{\delta_{i_2}} (i_2, n_{i_2}) \xrightarrow{\beta_{i_2 i_3}^{t_2}} \cdots \longrightarrow (i_k, 1) \xrightarrow{\delta_{i_k}} (i_k, n_{i_k}) \xrightarrow{\beta_{i_k i_{k+1}}^{t_k}} (n_{i_{k+1}}, 1) \end{aligned}$$

を対応させる. この対応を線型に拡張することで e を定義する. この e を拡張写像 (extension map) という. 明らかに e は単射である.

以上の設定の下で, R のブロック拡大のクイバーの関係式に関する次の結果が得られる.

定理 3.3. $P \simeq KQ' / (e(\rho_1), \dots, e(\rho_w))$.

定理 3.1, 定理 3.3 の証明は次節で与える.

例 3.4. R を次のクイバー表示から構成される多元環とする.

$$\alpha_{11} \circlearrowleft 1 \begin{array}{c} \xrightarrow{\alpha_{12}} \\ \xleftarrow{\alpha_{21}} \end{array} 2 \quad \begin{cases} \alpha_{11}^3 = \alpha_{12}\alpha_{21} \\ \alpha_{11}\alpha_{12} = 0 \\ \alpha_{21}\alpha_{11} = 0 \end{cases}$$

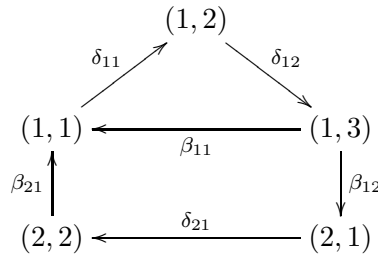
このとき R は次のように行列表示できる.

$$R = \begin{pmatrix} K[\alpha_{11}]/(\alpha_{11})^4 & K\alpha_{12} \\ K\alpha_{21} & K[\alpha_{21}\alpha_{12}]/(\alpha_{21}\alpha_{12})^2 \end{pmatrix}$$

例えば $R(3, 2)$ を考える. ブロック拡大の定義より.

$$R(3, 2) = \left(\begin{array}{ccc|cc} K[\alpha_{11}]/(\alpha_{11})^4 & K[\alpha_{11}]/(\alpha_{11})^4 & K[\alpha_{11}]/(\alpha_{11})^4 & K\alpha_{12} & K\alpha_{12} \\ (\alpha_{11})/(\alpha_{11})^4 & K[\alpha_{11}]/(\alpha_{11})^4 & K[\alpha_{11}]/(\alpha_{11})^4 & K\alpha_{12} & K\alpha_{12} \\ (\alpha_{11})/(\alpha_{11})^4 & (\alpha_{11})/(\alpha_{11})^4 & K[\alpha_{11}]/(\alpha_{11})^4 & K\alpha_{12} & K\alpha_{12} \\ \hline K\alpha_{21} & K\alpha_{21} & K\alpha_{21} & K[\alpha_{21}\alpha_{12}]/(\alpha_{21}\alpha_{12})^2 & K[\alpha_{21}\alpha_{12}]/(\alpha_{21}\alpha_{12})^2 \\ K\alpha_{21} & K\alpha_{21} & K\alpha_{21} & (\alpha_{21}\alpha_{12})/(\alpha_{21}\alpha_{12})^2 & K[\alpha_{21}\alpha_{12}]/(\alpha_{21}\alpha_{12})^2 \end{array} \right)$$

となる. 定理より $R(3, 2)$ のクイバー表示は以下で与えられる.



$$\begin{cases} e(\alpha_{11}^3) = \beta_{11}\delta_{11}\delta_{12}\beta_{11}\delta_{11}\delta_{12}\beta_{11} = \beta_{12}\delta_{21}\beta_{21} = e(\alpha_{12}\alpha_{21}) \\ e(\alpha_{11}\alpha_{12}) = \beta_{11}\delta_{11}\delta_{12}\beta_{12} = 0 \\ e(\alpha_{21}\alpha_{11}) = \beta_{21}\delta_{11}\delta_{12}\beta_{11} = 0 \end{cases}$$

3.2 定理 3.1, 定理 3.3 の証明

前節の記号を引き続き用いる. まず定理 3.1 を証明する. P のジャコブソン根基は次で与えられる.

$$J(P) = \begin{pmatrix} J(1, 1) & J(1, 2) & \cdots & J(1, m) \\ J(2, 1) & J(2, 2) & \cdots & J(2, m) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ J(m, 1) & J(m, 2) & \cdots & J(m, m) \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}
P(i, s) \supset J(i, s) &= \begin{pmatrix} J_{i1,s1} & \cdots & J_{i1,sn_s} \\ \vdots & & \vdots \\ J_{in_i,s1} & \cdots & J_{in_i,sn_s} \end{pmatrix} \\
&= \begin{cases} \begin{pmatrix} J(Q_i) & Q_i & \cdots & \cdots & Q_i \\ & J(Q_i) & Q_i & \cdots & Q_i \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & J(Q_i) & Q_i \\ J(Q_i) & & & & J(Q_i) \end{pmatrix} & (i = s), \\ \begin{pmatrix} A_{is} & \cdots & A_{is} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{is} & \cdots & A_{is} \end{pmatrix} & (i \neq s). \end{cases}
\end{aligned}$$

ここで

$$P_{ij,st} \supset J_{ij,st} = \begin{cases} Q_i & (i = s, j + 1 \leq t), \\ J(Q_i) & (i = s, j + 1 > t), \\ A_{is} & (i \neq s) \end{cases}$$

である。これから $J(R)^2$ を計算する。 $J(R)^2$ の (ij, st) -成分を $C_{ij,st}$ とする。

(I) $i = s$ のとき,

$$\begin{aligned}
C_{ij,it} &= \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^{n_k} J_{ij,kl} J_{kl,it} \\
&= \sum_{l=1}^{n_i} J_{ij,il} J_{il,it} + \sum_{k=1, k \neq i}^m \sum_{l=1}^{n_k} J_{ij,kl} J_{kl,it} \\
&= \begin{cases} Q_i & (j + 1 < t), \\ J(Q_i) & (j + 1 \geq t, (j, t) \neq (n_i, 1)), \\ J(Q_i)^2 + \sum_{k=1, k \neq i}^m A_{ik} A_{ki} = B_{ii} & ((j, t) = (n_i, 1)) \end{cases}
\end{aligned}$$

となる。但し B_{ii} は (1) の B_{ii} である。

(II) $i \neq s$ のとき,

$$\begin{aligned}
C_{ij,st} &= \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^{n_k} J_{ij,kl} J_{kl,st} \\
&= \sum_{l=1}^{n_i} J_{ij,il} J_{il,st} + \sum_{l=1}^{n_j} J_{ij,jl} J_{jl,st} + \sum_{k=1, k \neq i, j}^m \sum_{l=1}^{n_k} J_{ij,kl} J_{kl,st} \\
&= \begin{cases} A_{is} & ((j, t) \neq (n_i, 1)), \\ J(Q_i) A_{is} + A_{is} J(Q_s) + \sum_{k=1, k \neq i, j}^m A_{ik} A_{ks} = B_{is} & ((j, t) = (n_i, 1)) \end{cases}
\end{aligned}$$

となる。但し B_{is} は (1) の B_{is} である。

この計算結果より

$$\begin{aligned}
 P(i, s) \supset C(i, s) &= \begin{pmatrix} C_{i1,s1} & \cdots & C_{i1,sn_s} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{in_i,s1} & \cdots & C_{in_i,sn_s} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{cases} \begin{pmatrix} J(Q_i) & J(Q_i) & & & Q_i \\ \vdots & J(Q_i) & J(Q_i) & & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ J(Q_i) & J(Q_i) & & J(Q_i) & J(Q_i) \\ B_{ii} & J(Q_i) & \cdots & \cdots & J(Q_i) \end{pmatrix} & (i = s), \\ \begin{pmatrix} A_{is} & A_{is} & \cdots & A_{is} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{is} & A_{is} & \cdots & A_{is} \\ B_{ij} & A_{is} & \cdots & A_{is} \end{pmatrix} & (i \neq s). \end{cases} \\
 J(P)^2 &= \begin{pmatrix} C(1,1) & C(1,2) & \cdots & C(1,m) \\ C(2,1) & C(2,2) & \cdots & C(2,m) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C(m,1) & C(m,2) & \cdots & C(m,m) \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

を得る. 従って

$$\begin{aligned}
 J(i, s)/C(i, s) &= \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & Q_i/J(Q_i) & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & Q_i/J(Q_i) & 0 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & & 0 & Q_i/J(Q_i) \\ J(Q_i)/B_{ii} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} & (i = s), \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ A_{is}/B_{is} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} & (i \neq s). \end{cases}
 \end{aligned}$$

となり, 定理 3.1 の主張を得る. □

次に定理 3.3 を証明しよう. 環準同型 $\varphi' : KQ' \rightarrow P$ を次をみたすように作れる ($\langle 1 \rangle_{ij, st}$ は 3 ページの記号表参照).

$$\begin{aligned}
 KQ' \ni (i, j) &\longmapsto \langle 1 \rangle_{ij, ij} \in P, \\
 KQ' \ni \delta_{ij} &\longmapsto \langle 1 \rangle_{ij, ij+1} \in P, \\
 KQ' \ni \beta_{is}^t &\longmapsto \langle x_{is}^t \rangle_{in_i, s1} \in P.
 \end{aligned}$$

このとき φ' は全射となる. 従って環同型

$$KQ'/\text{Ker } \varphi' \simeq P.$$

を得る. 後は $\text{Ker } \varphi' = (e(\rho_1), \dots, e(\rho_w))$ を示せばよい. そこで次の補題を示す.

補題 3.5. 拡張写像 $e : KQ_+ \rightarrow KQ'_+$ について次が成り立つ.

(1) $\text{Ker } \varphi'$ は $\text{Im } e$ の元で生成される.

(2) 任意の $p \in KQ_+$ に対して

$$\varphi(p) = 0 \iff \varphi'(e(p)) = 0.$$

(3) $j = t(p) = s(q)$ である道 $p, q \in KQ_+$ に対して

$$e(pq) = e(p)\delta_j e(q).$$

[証明] (1) $p' \in \text{Ker } \varphi'$ をとる. p' が関係式であるとする. このとき Q' の定義より

$$p' = \delta_{ij} \cdots \delta_{in_i} p'' \delta_{s_1} \cdots \delta_{st} \quad (p'' \in \text{Im } e).$$

となる $p'' \in \text{Im } e$ が存在する.

$$\begin{aligned} 0 = \varphi'(p') &= \varphi'(\delta_{ij} \cdots \delta_{in_i} p'' \delta_{s_1} \cdots \delta_{st}) \\ &= \varphi'(\delta_{ij}) \cdots \varphi'(\delta_{in_i}) \varphi'(p'') \varphi'(\delta_{s_1}) \cdots \varphi'(\delta_{st}) \\ &= \langle 1 \rangle_{ij, ij+1} \cdots \langle 1 \rangle_{in_i-1, in_i} \varphi'(p'') \langle 1 \rangle_{s_1, s_2} \cdots \langle 1 \rangle_{st, st+1} \end{aligned}$$

より, $\varphi'(p'') = 0$ を得る. 従って $p'' \in \text{Ker } \varphi' \cap \text{Im } e$ である. これより主張が従う.

(2) $p = \alpha_{i_1 i_2}^{t_1} \alpha_{i_2 i_3}^{t_2} \cdots \alpha_{i_k i_{k+1}}^{t_k} \in KQ_+$ をとる.

$$\begin{aligned} \varphi(p) &= \langle x_{i_1 i_2}^{t_1} \rangle_{i_1 i_2} \langle x_{i_2 i_3}^{t_2} \rangle_{i_2 i_3} \cdots \langle x_{i_k i_{k+1}}^{t_k} \rangle_{i_k i_{k+1}} \\ &= \langle x_{i_1 i_2}^{t_1} x_{i_2 i_3}^{t_2} \cdots x_{i_k i_{k+1}}^{t_k} \rangle_{i_1 i_{k+1}} \end{aligned}$$

である. 一方

$$\begin{aligned} \varphi'(e(p)) &= \varphi'(\beta_{i_1 i_2}^{t_1} \delta_{i_2} \beta_{i_2 i_3}^{t_2} \cdots \beta_{i_k i_{k+1}}^{t_k}) \\ &= \varphi'(\beta_{i_1 i_2}^{t_1}) \varphi'(\delta_{i_2}) \varphi'(\beta_{i_2 i_3}^{t_2}) \cdots \varphi'(\beta_{i_k i_{k+1}}^{t_k}) \\ &= \langle x_{i_1 i_2}^{t_1} \rangle_{i_1 n_{i_1}, i_2 1} \langle 1 \rangle_{i_2 1, i_2 n_{i_2}} \langle x_{i_2 i_3}^{t_2} \rangle_{i_2 n_{i_2}, i_3 1} \cdots \langle x_{i_k i_{k+1}}^{t_k} \rangle_{i_k n_{i_k}, i_{k+1} 1} \\ &= \langle x_{i_1 i_2}^{t_1} x_{i_2 i_3}^{t_2} \cdots x_{i_k i_{k+1}}^{t_k} \rangle_{i_1 n_{i_1}, i_{k+1} 1} \end{aligned}$$

である. 従って i から j への関係式 $p \in KQ_+$ に対して,

$$\begin{aligned} \varphi(p) &= \langle r \rangle_{ij} \\ \varphi'(e(p)) &= \langle r \rangle_{in_i, j1} \end{aligned}$$

となる $r \in e_i R e_j$ が存在する. 従って

$$\varphi(p) = 0 \iff r = 0 \iff \varphi'(e(p)) = 0$$

を得る.

(3) e の定義より従う. □

さて定理 3.3 の証明を完成させよう. $I' = (e(\rho_1), \dots, e(\rho_w))$ とおいて $I' = \text{Ker } \varphi'$ を示す. 補題 3.5 (2) より $I' \subset \text{Ker } \varphi'$ である.

逆の包含関係を示すには補題 3.5 (1) より $\text{Ker } \varphi \cap \text{Im } e \subset I'$ を示せばよい. $p \in KQ_+$ が $e(p) \in \text{Ker } \varphi'$ をみたすとする. 補題 3.5 (2) より $p \in \text{Ker } \varphi$ である. よって

$$p = a_1 \rho_1 b_1 + a_2 \rho_2 b_2 + \dots + a_w \rho_w b_w \quad (a_i, b_i \in KQ)$$

と表すことができる.

$$e(p) = e(a_1 \rho_1 b_1) + e(a_2 \rho_2 b_2) + \dots + e(a_w \rho_w b_w)$$

であり, 補題 3.5 (3) より $e(a_i \rho_i b_i) \in I'$ であるから, $e(p) \in I'$ である. 従って $I' \subset \text{Ker } \varphi \cap \text{Im } e$ が示せた. □

3.3 原田多元環のクイバー表示

2 節で得た結果を応用して, 原田多元環のクイバー表示を対応する自己移入多元環のクイバー表示で表す. 記号は前節までに用いたものと同じとする.

R を基本的な自己移入多元環とし, その中山置換を σ とする. $P = R(n_1, \dots, n_m)$ とする. 自然数の列

$$1 \leq c_{i1} \leq c_{i2} \leq \dots \leq c_{in_i} \leq n_i \quad (1 \leq i \leq m)$$

をとる. この列によって定められる X によって上階段型剰余環 $\bar{P} = P/X$ を作る (定義 2.12 参照). $l_{i0}, l_{i1}, \dots, l_{iu_i}$ を次の条件をみたす自然数の列とする.

- (1) $l_{i0} = 0, l_{iu_i} = n_i$.
- (2) $c_{i,l_{ij-1}+1} = \dots = c_{i,l_{ij}}$ ($1 \leq j \leq u_i$).
- (3) $c_{i,l_{ij}} < c_{i,l_{ij}+1}$ ($1 \leq j \leq u_i$).

\bar{P} の関係式を求める. 各 $1 \leq i \leq m$ に対して, $\varphi(\theta_i) \in S(e_i R) - \{0\}$ なる i から $\sigma(i)$ への Q の道 θ_i をとる. そして

$$\theta'_i = \delta_i e(\theta_i) \delta_{\sigma(i)} = \delta_{i1} \dots \delta_{i,n_i-1} e(\theta_i) \delta_{\sigma(i)1} \dots \delta_{\sigma(i),n_{\sigma(i)}-1} \quad (1 \leq i \leq m)$$

とおく. これについて次の補題が成り立つ.

補題 3.6. 各 $1 \leq i \leq m$ に対して, $\varphi'(\theta'_i) \in S(f_{i1} P) - \{0\}$ である.

[証明] 補題 3.5 (1),(2) の証明より, $\varphi'(\theta'_i) \neq 0$ である. また $\varphi'(\theta'_i) \in f_{i1}P$ は明らか. 後は $\varphi'(\theta'_i) \in S(f_{i1}P)$ を示せばよいが, それには $\varphi'(\theta'_i)J(P) = 0$ を示せば十分である. 各 $1 \leq t \leq d_{\sigma(i)s}$ に対して, 拡張写像の定義より

$$\theta'_i \beta_{\delta(i)s}^t = \delta_i e(\theta) \delta_{\sigma(i)} \beta_{\delta(i)s}^t = \delta_i e(\theta_i \alpha_{\sigma(i)s}^t)$$

を得る. $\varphi(\theta_i \alpha_{\sigma(i)s}^t) = 0$ と補題 3.5 (2) より, $\varphi'(e(\theta_i \alpha_{\sigma(i)s}^t)) = 0$ である. 従って

$$\varphi'(\theta'_i) \varphi'(\beta_{\delta(i)s}^t) = \varphi'(\theta'_i \beta_{\delta(i)s}^t) = 0$$

であるから, $\varphi'(\theta'_i)J(P) = 0$ である. □

さて,

$$\theta'_i(u, v) = \begin{cases} \delta_{iu} \cdots \delta_{in_i-1} e(\theta_i) \delta_{\sigma(i)1} \cdots \delta_{\sigma(i)v} & (1 \leq u \leq n_i - 1, 1 \leq v \leq n_{\sigma(i)} - 1), \\ e(\theta_i) \delta_{\sigma(i)1} \cdots \delta_{\sigma(i)v} & (u = n_i, 1 \leq v \leq n_{\sigma(i)} - 1) \end{cases}$$

とおく. X は

$$\varphi'(\theta'_i(l_{ij}, c_{il_{ij}})) \quad (1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq u_i)$$

で生成される P の両側イデアルである. 従って次の結果を得る.

定理 3.7. これまでの記号の設定の下で,

$$I' = (e(\rho_1), \dots, e(\rho_w)) + (\theta'_i(l_{ij}, c_{il_{ij}}) \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq u_i)$$

とする. このとき環同型

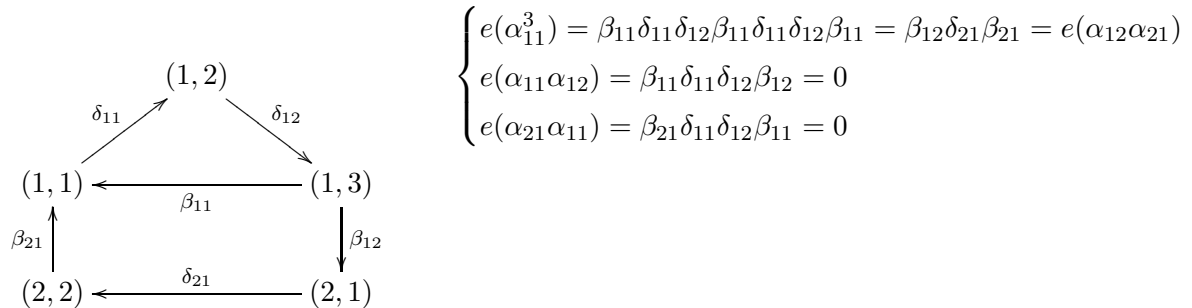
$$\bar{P} \simeq KQ'/I'$$

を得る.

例 3.8. 例 3.4 の $P = R(3, 2)$ を考える. R は中山置換が恒等的な自己移入多元環である. R のイデアルとして例 2.14 の X をとる.

$$X = \left(\begin{array}{ccc|cc} 0 & (\alpha_{11})^3/(\alpha_{11})^4 & (\alpha_{11})^3/(\alpha_{11})^4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\alpha_{11})^3/(\alpha_{11})^4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\alpha_{11})^3/(\alpha_{11})^4 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & (\alpha_{21}\alpha_{12})/(\alpha_{21}\alpha_{12})^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

このとき $l_{11} = 1, l_{12} = 3, l_{21} = 1, l_{22} = 2$ である. 上階段型剰余環 P/X のクイバー表示は例 3.4 のクイバー表示



に關係式

$$\begin{cases} \delta_{11}\delta_{12}e(\alpha_{11}^3)\delta_{11} = 0 \\ e(\alpha_{11}^3)\delta_{11}\delta_{12} = 0 \\ \delta_{21}e(\alpha_{21}\alpha_{12})\delta_{21} = 0 \end{cases}$$

を加えることで得られる。

4 有限表現型の原田多元環に関する結果

ここでは有限表現型の原田多元環に関して得られた結果を述べる. R を基本的な自己移入多元環とし, $\text{Pi}(R) = \{e_1, \dots, e_m\}$ とする. R は有限表現型であるという仮定を課したとき, R のブロック拡大がいつ有限表現型になるかを考える.

例 4.1. R を次のクイバーと関係式から構成される多元環とする.

$$\alpha_{11} \begin{array}{c} \circlearrowleft \\ \circlearrowright \end{array} 1 \begin{array}{c} \xrightarrow{\alpha_{12}} \\ \xleftarrow{\alpha_{21}} \end{array} 2 \quad \begin{cases} \alpha_{11}^3 = \alpha_{12}\alpha_{21} \\ \alpha_{11}\alpha_{12} = 0 \\ \alpha_{21}\alpha_{11} = 0 \end{cases}$$

これについて $R(1, 2)$ は有限表現型であるが, $R(2, 1)$ は無限表現型であることが計算によってわかる.

このように有限表現型の自己移入多元環のブロック拡大が, 常に有限表現型になるとは限らない. 現時点では有限表現型の自己移入多元環のブロック拡大がいつ有限表現型になるのかはまったくわかっていない. しかし, 私はこの表現型の問題に関連した次の新しい結果を得た.

定理 4.2. R を基本的な有限表現型の自己移入多元環とする. R の任意のブロック拡大が有限表現型である必要十分条件は, R が中山多元環であることである.

この章は定理 4.2 を証明することを目標とする. 1 節では定理 4.2 の証明に必要な Drozd-Kirichenko の補題を述べる. 2 節で AR-クイバーによる $\dim_K \text{Hom}_R(-, -)$ の数え方を説明する. 3 節で自己移入多元環の AR-クイバーに対して配置を定義と意味を述べる. 4 節で定理 4.2 を証明する. まず Drozd-Kirichenko の補題を使って定理 4.2 を特別な自己移入多元環の問題に帰着する. そしてその特別な自己移入多元環の配置を分類することで証明する.

4.1 Drozd-Kirichenko の削除補題

この節では定理 4.2 の証明において重要な補題の一つである Drozd-Kirichenko の補題を述べる. 最初に次を注意する. 多元環 R, S の間に環準同型

$$\phi : R \longrightarrow S$$

があるとき, 自然に関手

$$\Phi : \text{mod} S \longrightarrow \text{mod} R$$

が定義される. ϕ が全射ならば Φ は忠実かつ充満である. 従って特に次の補題を得る.

補題 4.3. R を基本的な多元環とし, I をそのイデアルとする.

(1) $\phi : R \longrightarrow R/I$ を自然な環準同型とする. このとき ϕ から自然に得られる関手

$$\Phi : \text{mod}(R/I) \longrightarrow \text{mod} R$$

は忠実かつ充満である. 従って $\text{mod}(R/I)$ は $\text{mod} R$ の充満部分圏である.

(2) 次の加群の同型類の間の一対一対応がある.

$$\{\text{有限生成直既約 } R/I\text{-加群}\} / \simeq \longleftrightarrow \{I \text{ で零化する有限生成直既約 } R\text{-加群}\} / \simeq .$$

Drozd-Kirichenko の削除補題を示すために次の補題を用意する.

補題 4.4. R を基本的な多元環とし, P を $R = P \oplus Q$ なる射影的かつ移入的な有限生成直既約 R -加群とする. $M \in \text{mod} R$ に対して, $M \cdot S(P) \neq 0$ ならば P は M の直既約因子である.

[証明] $m \cdot S(P) \neq 0$ なる $m \in M$ が存在する. 次の写像を考える.

$$f : P \ni x \longmapsto mx \in M$$

f は明らかに準同型である. もし $\text{Ker } f \neq 0$ ならば $S(P) \subset \text{Ker } f$ でなければならない. 従って $m \cdot S(P) = 0$ となり, m のとり方に矛盾する. よって $\text{Ker } f = 0$ であり, f は単射である. P が移入的だから f は分裂単射である. \square

次が Drozd-Kirichenko の削除補題である.

補題 4.5 (Drozd-Kirichenko). R を基本的な多元環とする. P を $R = P \oplus Q$ なる射影的かつ移入的な有限生成直既約 R -加群とし, $I = S(P)$ とおく. このとき以下が成り立つ.

- (1) I は R のイデアルである.
- (2) 次の加群の同型類の間の一対一対応がある.

$$\{\text{有限生成直既約 } R/I\text{-加群}\} / \simeq \longleftrightarrow (\{\text{有限生成直既約 } R\text{-加群}\} / \simeq) \setminus \{P\}.$$

[証明] (1) I が R の右イデアルであることは良い. I が R の左イデアルであることを示す. R が基本的であるということと補題 4.4 より, $Q \cdot I = 0$ である. 後は $P \cdot I \subset I$ を示せば良い. $p \cdot I \neq 0$ である $p \in P$ をとる.

$$f : I \ni x \longmapsto px \in p \cdot I$$

は零でない全射準同型であるから, $p \cdot I$ は I と同型な単純 R -加群である. $p \cdot I \subset P$ であるから, $p \cdot I = I$ である. 以上より $P \cdot I \subset I$ である.

(2) は, 補題 4.3 の一対一対応と補題 4.4 から直ちに得られる. \square

Drozd-Kirichenko の削除補題に加えて次の補題を得る.

補題 4.6. R を基本的な多元環とする. P を $R = P \oplus Q$ なる射影的かつ移入的な有限生成直既約 R -加群とし, $I = S(P)$ とおく. このとき以下が成り立つ.

- (1) $\text{mod} R$ の概分裂完全列と $\text{mod}(R/I)$ の概分裂完全列の間に次の関係がある.
 - (a) $\text{mod}(R/I)$ の概分裂完全列は $\text{mod} R$ でも概分裂完全列である.

(b) $\text{mod}R$ の概分裂完全列は $\text{mod}(R/I)$ の概分裂完全列かもしくは命題 1.35 の概分裂完全列

$$0 \longrightarrow J(P) \longrightarrow P \oplus (J(P)/I) \longrightarrow P/I \longrightarrow 0$$

のどちらかである.

(2) P/I は有限生成直既約射影 R/I -加群となり, $J(P)$ は有限生成直既約移入 R/I -加群となる.

[証明] (1) は補題 4.3 より明らか.

(2) P/I が射影 R/I -加群であることは明らか. $J(P)$ が移入 R/I -加群であることを示す. R/I の右イデアル K をとり, 任意の $\text{mod}(R/I)$ の準同型 $g: K \rightarrow J(P)$ をとる.

$$\begin{array}{ccc} 0 & \longrightarrow & K & \xrightarrow{f} & R/I \\ & & \downarrow g & & \\ & & J(P) & & \end{array}$$

但し f は自然な単射である. これらを $\text{mod}R$ に移して, 次の図式を考える.

$$\begin{array}{ccc} 0 & \longrightarrow & K & \xrightarrow{f} & R/I \\ & & \downarrow g & & \\ & & J(P) & & \\ & & \downarrow h & & \\ & & P & & \end{array}$$

但し h は自然な単射である. P が移入 R -加群であるから, $\varphi f = hg$ となる準同型 $\varphi: R/I \rightarrow P$ が存在する. もし φ が全射ならば, P は R/I の直和因子となり, R が基本的であることに矛盾する. 従って φ は全射ではない. すなわち $\text{Im } \varphi \subset J(P)$ である. よって $\text{mod}R$ において可換図式

$$\begin{array}{ccc} 0 & \longrightarrow & K & \xrightarrow{f} & R/I \\ & & \downarrow g & \searrow \varphi & \\ & & J(P) & & \end{array}$$

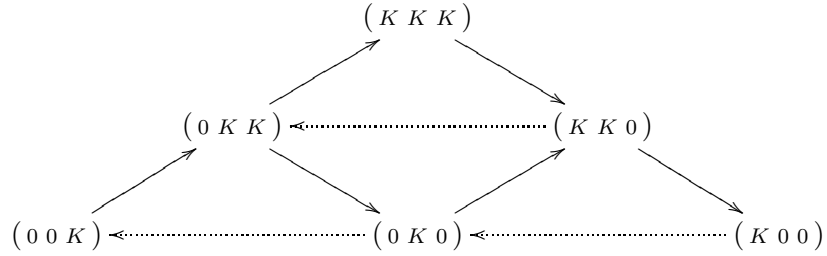
を得る. これは自然に $\text{mod}(R/I)$ の可換図式とも見れる. 以上より $J(P)$ は移入 R/I -加群である. □

以上より補題 4.5 の設定のとき, R/I の有限生成加群圏の構造は R の有限生成加群圏の構造からすぐにわかる. そのことを例で見てみよう.

例 4.7. 次の多元環を考える.

$$R = \begin{pmatrix} K & K & K \\ 0 & K & K \\ 0 & 0 & K \end{pmatrix}$$

R の AR-クイバーは



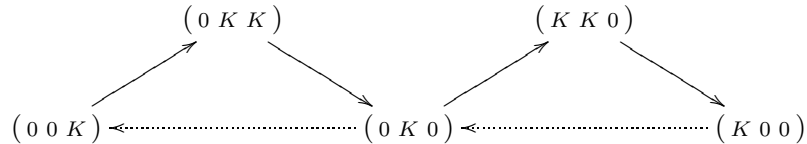
であった (例 1.39). $(K K K)$ は射影的かつ移入的 R -加群であり,

$$S((K K K)) = (0 0 K)$$

である. 補題 4.5 より

$$I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & K \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

は R のイデアルであり, 補題 4.6 より R/I の AR-クイバーは次で与えられる.



さらに有限生成直既約射影 R/I -加群は

$$(0 K K), (0 0 K), (K K 0)$$

であり, 有限生成直既約移入 R/I -加群は

$$(0 K K), (K K 0), (K 0 0)$$

である.

4.2 数え上げ理論

R を有限表現型の多元環とする. 今 R の AR-クイバー Γ がわかっているとす. 以下では Γ を使って, Γ の二点 x, y に対応する有限生成直既約 R -加群の間の $\dim_K \underline{\text{Hom}}_R(-, -)$ を求める方法を与える.

定義 4.8. Γ を並進クイバーとし, Γ の頂点 x を一つ固定する. 各 (n) において以下のように写像

$$h_{\Gamma, n}(x, -) : \Gamma_0 \longrightarrow \mathbb{N}_0$$

を定める.

$$(-1) h_{\Gamma, -1} := 0$$

$$(0) h_{\Gamma,0}(x,y) := \begin{cases} 1 & (y=x) \\ 0 & (x \neq y) \end{cases}$$

⋮

$$(n) \tilde{h}_{\Gamma,n}(x,y) := \begin{cases} \sum_{a \in y^-} h_{\Gamma,n-1}(x,a) - h_{\Gamma,n-2}(x,\tau y) & (y \in \Gamma_0^*) \\ \sum_{a \in y^-} h_{\Gamma,n-1}(x,a) & (y \notin \Gamma_0^*) \end{cases}$$

として,

$$h_{\Gamma,n}(x,y) := \max\{\tilde{h}_{\Gamma,n}(x,y), 0\}$$

と定める.

⋮

こうして構成した $h_{\Gamma,n}(x, -)$ をもって

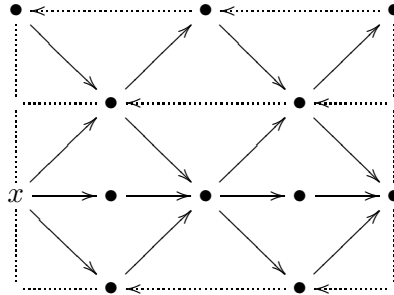
$$h_{\Gamma}(x, -) : \Gamma_0 \ni y \mapsto \sum_{n \geq 0} h_{\Gamma,n}(x,y) \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$$

とする. そして

$$H_{\Gamma}(x) := \{y \in \Gamma_0 \mid h_{\Gamma}(x,y) > 0\}$$

と定める.

例 4.9. 次の並進クイバー Γ とその頂点 x を考える. 左右の点線は同一視である.



$h_{\Gamma,n}(x, -)$ を各頂点 y に $h_{\Gamma,n}(x,y)$ を置いた形で表わす.

$$h_{\Gamma,0}(x, -) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad h_{\Gamma,1}(x, -) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad h_{\Gamma,2}(x, -) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$h_{\Gamma,3}(x, -) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad h_{\Gamma,4}(x, -) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad h_{\Gamma,5}(x, -) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$h_{\Gamma,6}(x, -) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad h_{\Gamma,7}(x, -) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

以降の操作は各頂点に 0 しかおかない. $h_{\Gamma}(x, -)$ は

$$h_{\Gamma}(x, -) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

である.

定義 4.8 で定めた $h_{\Gamma,n}$ について, 次の定理が成り立つ.

定理 4.10. R を有限表現型の多元環とし, Γ をその AR-クイバーとする. Γ から射影頂点を除いた並進クイバーを $\underline{\Gamma}$ とする. このとき $x, y \in \underline{\Gamma}_0$ とそれらに対応する射影的でない有限生成直既約 R -加群 X, Y に対して,

$$\dim_K \underline{\text{Hom}}_R(X, Y) = h_{\underline{\Gamma}}(x, y)$$

が成り立つ. 従って特に x を固定すると

$$y \in H_{\underline{\Gamma}}(x) \iff \underline{\text{Hom}}_R(X, Y) \neq 0$$

である.

以下この節では定理 4.10 を証明する.

補題 4.11. 射影安定圏 $\underline{\text{mod}}R$ は Krull-Schmidt 圏であり, 次の一対一対応が成り立つ.

$$\{\text{射影的でない有限生成直既約 } R\text{-加群}\} / \simeq \longleftrightarrow \{\underline{\text{mod}}R \text{ の直既約な対象}\} / \simeq.$$

[証明] まず最初に $\underline{\text{mod}}R$ には $\text{mod}R$ から自然に加法圏の構造が入ることを注意しておく.

X を射影的でない有限生成直既約 R -加群とする. このとき $\text{End}_R(X)$ は局所環であるから, $\underline{\text{End}}_R(X)$ は局所環である. 従って X は $\underline{\text{mod}}R$ で直既約である. さらに Y を射影的でない有限生成直既約 R -加群とし, $\text{mod}R$ で $X \simeq Y$ とすると, 明らかに $\underline{\text{mod}}R$ で $X \simeq Y$ である. 次に $\underline{\text{mod}}R$ で $X \simeq Y$ とする. すなわち $1_X - gf \in \mathcal{P}(X, X)$, $1_Y - fg \in \mathcal{P}(Y, Y)$ なる $f \in \text{Hom}_R(X, Y)$, $g \in \text{Hom}_R(Y, X)$ が存在する.

$$1_X - gf \in \mathcal{P}(X, X) \subset J(\text{End}_R(X))$$

であるから, $gf \notin J(\text{End}_R(X))$ でなければならない. 従って gf は同型であるから, $\text{mod}R$ で $X \simeq Y$ である.

X を $\underline{\text{mod}}R$ の直既約な対象とする. X の $\text{mod}R$ での直既約分解を

$$X \simeq \left(\bigoplus_{i=1}^q P_i \right) \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^m X_i \right)$$

とする. 但し P_i は有限生成直既約射影 R -加群とし, X_i は射影的でない有限生成直既約 R -加群とする. $\underline{\text{mod}}R$ において

$$\begin{aligned} X &\simeq \left(\bigoplus_{i=1}^q P_i \right) \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^m X_i \right) \\ &\simeq \bigoplus_{i=1}^m X_i \end{aligned}$$

である. X は $\underline{\text{mod}}R$ で直既約であるから $m = 1$ でなければならない. さらに

$$\begin{aligned} \underline{\text{End}}_R(X) &\simeq \left(\bigoplus_{i,j} \underline{\text{Hom}}_R(P_i, P_j) \right) \oplus \left(\bigoplus_i \underline{\text{Hom}}_R(P_i, X_1) \right) \oplus \underline{\text{End}}_R(X_1) \\ &\simeq \underline{\text{End}}_R(X_1) \end{aligned}$$

であるから, $\text{End}_R(X)$ は局所環である. 以上のことから補題の主張を得る. \square

補題 4.11 を考慮して, いくつか記号を定める.

定義 4.12. $\{[P_1], \dots, [P_p]\}$ を有限生成直既約射影 R -加群の同型類の完全系とし, $\{[M_1], \dots, [M_m]\}$ を射影的でない有限生成直既約 R -加群の同型類の完全系とする. $K_{\text{split}}(\underline{\text{mod}}R)$ を $\{[M_1], \dots, [M_m]\}$ を基底とする \mathbb{Z} -加群とする. 補題 4.11 より, $X \in \underline{\text{mod}}R$ は

$$X \simeq \bigoplus_{i=1}^m M_i^{n_i}$$

と $\underline{\text{mod}}R$ で直既約分解される. この X に対して

$$\sum_{i=1}^m n_i [M_i]$$

を対応させることによって, $\underline{\text{mod}}R$ の同型類から $K_{\text{split}}(\underline{\text{mod}}R)$ への単射が得られる. 従って以下では $\underline{\text{mod}}R$ を $K_{\text{split}}(\underline{\text{mod}}R)$ の中で考える.

$\underline{\text{mod}}R$ から $\underline{\text{mod}}R$ への自然な関手を

$$\Pi : \underline{\text{mod}}R \longrightarrow \underline{\text{mod}}R$$

とおく.

射影的でない有限生成直既約 R -加群 X に対して, 左極小概分裂写像

$$0 \longrightarrow X \longrightarrow \theta X$$

によって θX を定め,

$$\underline{\theta}X := \Pi(\theta X)$$

と定める. また

$$\underline{\tau}^{-1}X := \begin{cases} \Pi(\tau^{-1}X) & (\theta X \text{ は射影的でない}) \\ 0 & (\theta X \text{ は射影的である}) \end{cases}$$

と定める.

これら $\underline{\theta}, \underline{\tau}^{-1}$ を \mathbb{Z} -線型に拡張することにより,

$$\underline{\theta}, \underline{\tau}^{-1} : K_{\text{split}}(\underline{\text{mod}}R) \longrightarrow K_{\text{split}}(\underline{\text{mod}}R)$$

が得られる.

さて, $K_{\text{split}}(\underline{\text{mod}}R)$ の中で $X \in \underline{\text{mod}}R$ に対して $\underline{\theta}_n X \in \underline{\text{mod}}R$ を次のように定義する.

$$\begin{aligned} \underline{\theta}_0 X &= X, \\ \underline{\theta}_1 X &= \underline{\theta}X, \\ \underline{\theta}_n X &= (\underline{\theta}(\underline{\theta}_{n-1}X) - \underline{\tau}^{-1}(\underline{\theta}_{n-2}X))_+ \quad (n \geq 2). \end{aligned}$$

ここで $Y = \sum_{i=1}^m n_i [M_i] \in K_{\text{split}}(\underline{\text{mod}}R)$ に対して

$$Y_+ = \sum_{i=1}^m \max\{n_i, 0\} [M_i] \in K_{\text{split}}(\underline{\text{mod}}R)$$

とする. $Y_+ \in \underline{\text{mod}}R$ である.

以上によって定義された ϱ_n に関して、次の定理が [15] の中で示されている。

定理 4.13. [15] $X \in \underline{\text{mod}}R$ に対して、次の $\underline{\text{mod}}R$ から \mathbb{Z} -加群のなす圏への関手の同型が存在する。

$$J_{\underline{\text{mod}}R}^n(X, -) / J_{\underline{\text{mod}}R}^{n+1}(X, -) \simeq \underline{\text{Hom}}_R(\varrho_n X, -) / J_{\underline{\text{mod}}R}(\varrho_n X, -).$$

この定理と補題 1.37 より特に以下のことが言える。

系 4.14. 任意の直既約な対象 $X, Y \in \underline{\text{mod}}R$ に対して

$$\dim_K \underline{\text{Hom}}_R(X, Y) = \sum_{n \geq 0} (\varrho_n X \text{ の直既約分解に現れる } Y \text{ の重複度})$$

[証明] 任意の有限生成直既約 R -加群 X, Y に対して

$$\begin{aligned} \dim_K \underline{\text{Hom}}_R(X, Y) &= \sum_{n \geq 0} \dim_K (J_{\underline{\text{mod}}R}^n(X, Y) / J_{\underline{\text{mod}}R}^{n+1}(X, Y)) \\ &= \sum_{n \geq 0} \dim_K (\underline{\text{Hom}}_R(\varrho_n X, Y) / J_{\underline{\text{mod}}R}(\varrho_n X, Y)) \\ &= \sum_{n \geq 0} (\varrho_n X \text{ の直既約分解に現れる } Y \text{ の重複度}) \end{aligned}$$

である。 □

この系により、定理 4.10 が従う。 □

4.3 自己移入多元環の AR-クイバー

この節では R を有限表現型の連結かつ基本的な自己移入多元環とする。 Γ を R の AR-クイバーとし、 ${}_s\Gamma$ をその安定 AR-クイバーとする。 R が自己移入多元環より、 ${}_s\Gamma$ は Γ から有限生成直既約射影 R -加群に対応する頂点を除いたクイバーになっている。

以下では、 R の安定 AR-クイバー ${}_s\Gamma$ がわかっているときに、 R の AR-クイバー Γ を回復することを考える。この節の最初に述べたとおり、 ${}_s\Gamma$ には有限生成直既約射影 R -加群に対応する頂点がどの位置についているかという情報が欠けている。ここで有限生成直既約射影 R -加群 P のジャコブソン根基 $J(P)$ に着目する。明らかに $J(P)$ は射影的でない有限生成直既約 R -加群なので、 ${}_s\Gamma$ の頂点に対応する。各 P に対し、 $J(P)$ の ${}_s\Gamma$ における位置がわかれば、

$$[J(P)] \longrightarrow [P] \longrightarrow [\tau^{-1}P]$$

という頂点 $[P]$ と二本の矢を ${}_s\Gamma$ に加えることによって Γ が得られる。そこで有限生成直既約射影 R -加群のジャコブソン根基に対応し得る ${}_s\Gamma$ の頂点集合である、配置を定義する。

定義 4.15. \mathcal{C} を並進クイバー Γ の頂点集合の部分集合とする。 $x \in \mathcal{C}$ に対して、 $h(x, -), H(x)$ を 2 節で定めた記号とする。 \mathcal{C} が次をみたすとき、 ${}_s\Gamma$ の配置 (configuration) という。

(C1) $\bigcup_{x \in \mathcal{C}} H_\Gamma(x) = \Gamma_0.$

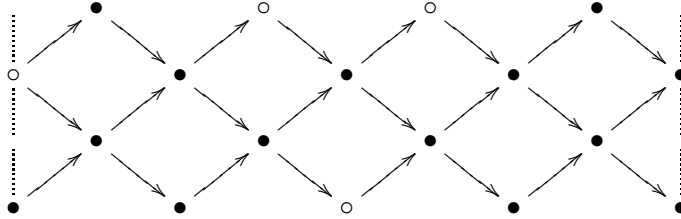
(C2) 任意の $x, y \in \mathcal{C}$ に対して,

$$h_\Gamma(x, y) = \begin{cases} 1 & (x = y), \\ 0 & (x \neq y). \end{cases}$$

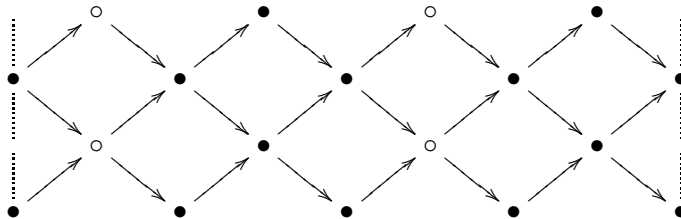
配置の例を見てみよう.

例 4.16. 次の二つの \mathcal{C} は $\mathbb{Z}A_4/(\tau^4)$ の配置である. クイバーの左端の点線は同一視である. τ を示す矢は省略する. \mathcal{C} に属す頂点を \circ で表わし, $x \in \mathcal{C}$ に対して, $H(x)$ を斜線の範囲で表わす.

(1)



(2)



実際に有限生成直既約射影 R -加群のジャコブソン根基に対応する ${}_s\Gamma$ の頂点の集合が配置になっていることを確かめる.

命題 4.17.

(1) 任意の射影的でない有限生成 R -加群 X に対して,

$$\underline{\text{Hom}}_R(J(P), X) \neq 0$$

なる有限生成直既約射影 R -加群 P が存在する.

(2) 有限生成直既約射影 R -加群 P, Q に対して,

$$\dim_K \underline{\text{Hom}}_R(J(P), J(Q)) = \begin{cases} 1 & (P \simeq Q), \\ 0 & (P \not\simeq Q). \end{cases}$$

[証明] (1) 今任意の有限生成直既約射影 R -加群 P に対して $\underline{\text{Hom}}_R(J(P), X) = 0$ であるとする. P に対して次の完全列がある.

$$0 \longrightarrow J(P) \xrightarrow{f} P \longrightarrow P/J(P) \longrightarrow 0$$

この完全列に $\text{Hom}_R(-, X)$ を施して, 完全列

$$\text{Hom}_R(P, X) \xrightarrow{\text{Hom}(f, X)} \text{Hom}_R(J(P), X) \longrightarrow \text{Ext}_R^1(P/J(P), X) \longrightarrow \text{Ext}_R^1(P, X) = 0$$

を得る. R が自己移入多元環より $\text{Im Hom}(f, X) = \mathcal{P}(J(P), X)$ であるから,

$$\text{Ext}_R^1(P/J(P), X) \simeq \underline{\text{Hom}}_R(J(P), X)$$

である. 従って任意の単純 R -加群 S に対して $\text{Ext}_R^1(S, X) = 0$ である.

X が移入的であることを示す. 任意に $M \in \text{mod}R$ をとり, M の組成列

$$0 = M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_{l-1} \subset M_l = M$$

を考える. 完全列

$$0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_2 \longrightarrow M_2/M_1 \longrightarrow 0$$

に $\text{Hom}_R(-, X)$ を施して, 完全列

$$\text{Ext}_R^1(M_2/M_1, X) \longrightarrow \text{Ext}_R^1(M_2, X) \longrightarrow \text{Ext}_R^1(M_1, X)$$

を得る. $M_1, M_2/M_1$ は単純なので, $\text{Ext}_R^1(M_2/M_1, X) = \text{Ext}_R^1(M_1, X) = 0$ である. 従って $\text{Ext}_R^1(M_2, X) = 0$ である. この操作を帰納的に各完全列

$$0 \longrightarrow M_i \longrightarrow M_{i+1} \longrightarrow M_{i+1}/M_i \longrightarrow 0$$

に施すことによって, $\text{Ext}_R^1(M_{i+1}, X) = 0$ ($0 \leq i \leq n-1$) を得る. よって $\text{Ext}_R^1(M, X) = 0$ である. 以上より X は移入的であり, これは仮定に矛盾する.

(2) Q が移入的より, 任意の $f \in \text{Hom}_R(J(P), J(Q))$ に対して次の可換図式が得られる.

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & J(P) & \longrightarrow & P & \longrightarrow & P/J(P) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow f & & \downarrow g & & \downarrow h & & \\ 0 & \longrightarrow & J(Q) & \xrightarrow{u} & Q & \xrightarrow{v} & Q/J(Q) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

$P \simeq Q$ とする. f が同型ならば射影 R -加群を通過しないことは明らか. f が同型でないとする. このとき g は同型でない. 従って $\text{Im } g \subset \text{Ker } v = J(Q)$ であるから, f は P を通過する. 以上より

$$\underline{\text{End}}_R(J(P)) \simeq \text{End}_R(J(P))/J(\text{End}_R(J(P))) \simeq K$$

である.

$P \not\simeq Q$ とする. $P/J(P) \not\simeq Q/J(Q)$ であるから, h は零写像である. よって $\text{Im } g \subset \text{Ker } v = J(Q)$ である. 従って f は P を通過する. \square

従って次の定理が示された.

定理 4.18. 有限生成直既約射影 R -加群のジャコブソン根基に対応する ${}_s\Gamma$ の頂点の集合は, ${}_s\Gamma$ の配置になる.

補題 4.21 は配置のもつ重要な性質である. それを示すために補題を用意する.

補題 4.19. Δ を Dynkin 図形, $\Gamma = \mathbb{Z}\Delta$ とし, (Γ, τ) を定義 1.45 で定めた並進クイバーとする. このとき次をみたす $m \in \mathbb{N}$ が存在する.

$$h_{\Gamma,n}(x, -) = \begin{cases} \tilde{h}_{\Gamma,n}(x, -) & (n < m) \\ 0 & (n \geq m) \end{cases}$$

[証明] 実際に各 Dynkin 図形 $\Gamma = A_k, D_k, E_6, E_7, E_8$ の各頂点 x において, $h_{\Gamma,n}(x, -)$ を計算することで得られる (4章4節の図を参照). \square

補題 4.20. Δ を Dynkin 図形, $\Gamma = \mathbb{Z}\Delta$ とし, (Γ, τ) を定義 1.45 で定めた並進クイバーとする. G を $\text{Aut}(\Gamma)$ の許容部分群とする.

$$\Pi : \Gamma \longrightarrow \Gamma/G$$

を自然な並進クイバーの写像とする. このとき定義 4.8 の写像 h に関して, 次の等式が成り立つ. 任意の $x, y \in \Gamma_0$ に対して

$$h_{\Gamma/G}(\Pi x, \Pi y) = \sum_{\Pi y = \Pi y'} h_{\Gamma}(x, y').$$

[証明] h の定義より, 任意の $x, y \in \Gamma_0$ に対して

$$h_{\Gamma/G,n}(\Pi x, \Pi y) = \sum_{\Pi y = \Pi y'} h_{\Gamma,n}(x, y')$$

を示せばよい. n に関する帰納法で示す. $n = 0$ のときは定義より明らか. $n = 1$ のときは定義と補題 1.49 より明らか.

$n \geq 2$ として, $n - 1$ 以下では等式が成り立っているとす. 任意に $x, y \in \Gamma_0$ をとる. このとき次の二つの等式が帰納法の仮定より成り立つ.

$$\begin{aligned} \sum_{a \in (\Pi y)^-} h_{\Gamma/G,n-1}(\Pi x, a) &= \sum_{a \in (\Pi y)^-} \left(\sum_{a = \Pi a'} h_{\Gamma,n-1}(x, a') \right) \\ &= \sum_{\Pi y = \Pi a} \left(\sum_{a' \in a^-} h_{\Gamma,n-1}(x, a') \right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h_{\Gamma/G,n-2}(x, \tau y) &= \sum_{\Pi(\tau y) = \Pi a} h_{\Gamma,n-2}(x, a) \\ &= \sum_{\Pi y = \Pi a} h_{\Gamma,n-2}(x, \tau a). \end{aligned}$$

従って $y \in \Gamma_0^*$ に対して

$$\begin{aligned}\tilde{h}_{\Gamma/G,n}(\Pi x, \Pi y) &= \sum_{a \in (\Pi y)^-} h_{\Gamma/G,n-1}(\Pi x, a) - h_{\Gamma/G,n-2}(x, \tau y) \\ &= \sum_{\Pi y = \Pi a} \left(\sum_{a' \in a^-} h_{\Gamma,n-1}(x, a') - h_{\Gamma,n-2}(x, \tau a) \right) \\ &= \sum_{\Pi y = \Pi a} \tilde{h}_{\Gamma,n}(x, a)\end{aligned}$$

を得る. このことと補題 4.19 より

$$h_{\Gamma/G,n}(\Pi x, \Pi y) = \sum_{\Pi y = \Pi y'} h_{\Gamma,n}(x, y')$$

である. $y \notin \Gamma_0^*$ に対してはもう示してある. \square

補題 4.21. Δ を Dynkin 図形, $\Gamma = \mathbb{Z}\Delta$ とし, (Γ, τ) を定義 1.45 で定めた並進クイバーとする. G を $\text{Aut}(\Gamma)$ の許容部分群とし,

$$\Pi : \Gamma \longrightarrow \Gamma/G$$

を自然な並進クイバーの写像とする. このとき Γ/G の頂点集合 \mathcal{C} に対して次は同値である.

- (1) \mathcal{C} は Γ/G の配置である.
- (2) $\Pi^{-1}(\mathcal{C})$ は Γ の配置である.

[証明] (1) を仮定する. $y' \in \Gamma$ とする. (1) の仮定より $h_{\Gamma/G}(x, \Pi y') > 0$ なる $x \in \mathcal{C}$ が存在する. $x' \in \Pi^{-1}(x)$ をとって固定する. 補題 4.20 より

$$\sum_{\Pi y'' = \Pi y'} h_{\Gamma}(x', y'') = h_{\Gamma/G}(\Pi x', \Pi y') > 0$$

である. 任意の $g \in G$ に対して $h_{\Gamma}(gx', gy') = h_{\Gamma}(x', y')$ だから, $h_{\Gamma}(x'', y') > 0$ なる $x'' \in \Pi^{-1}(\mathcal{C})$ が存在する. 従って $\Pi^{-1}(\mathcal{C})$ は (C1) をみたす.

次に $x', y' \in \Pi^{-1}(\mathcal{C})$ とする. (1) の仮定と, 補題 4.20 より

$$\sum_{\Pi y'' = \Pi y'} h_{\Gamma}(x', y'') = h_{\Gamma/G}(\Pi x', \Pi y') = \begin{cases} 1 & (\Pi y' = \Pi x') \\ 0 & (\Pi y' \neq \Pi x') \end{cases}$$

である. $h_{\Gamma}(x', x') \geq 1$ なので,

$$h_{\Gamma}(x', y') = \begin{cases} 1 & (y' = x') \\ 0 & (y' \neq x') \end{cases}$$

を得る. 従って $\Pi^{-1}(\mathcal{C})$ は (C2) をみたす.

(2) を仮定する. $y \in \Gamma/G$ とする. $\Pi y' = y$ なる $y' \in \Gamma$ が存在する. (2) の仮定より, $h_\Gamma(x', y') > 0$ なる $x' \in \Pi^{-1}(C)$ が存在する. よって補題 4.20 から, $h_{\Gamma/G}(\Pi x', \Pi y') > 0$ を得る. 従って C は (C1) をみたす.

次に $x, y \in C$ とする. $x' \in \Pi^{-1}(x)$ をとって固定する. (2) の仮定より

$$h_\Gamma(x', y') = \begin{cases} 1 & (y' = x') \\ 0 & (y' \in \Pi^{-1}(C) \setminus \{x'\}) \end{cases}$$

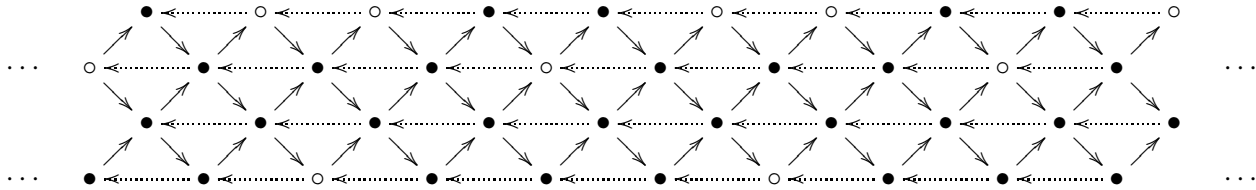
である. よって補題 4.20 から

$$h_{\Gamma/G}(x, y) = \sum_{\Pi y' = y} h_\Gamma(x', y') = \begin{cases} 1 & (y = x) \\ 0 & (y \neq x) \end{cases}$$

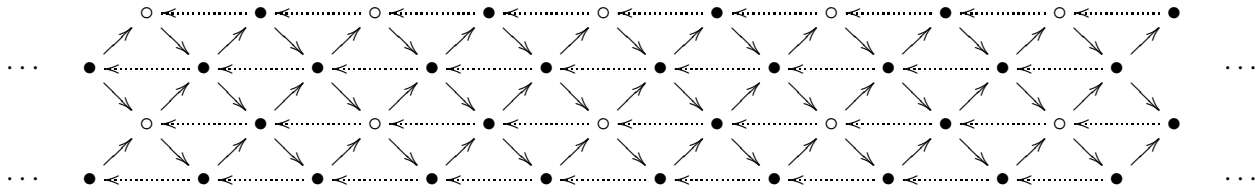
を得る. 従って C は (C2) をみたす. □

例 4.22. 例 4.16 (1),(2) の配置をそれぞれ $\mathbb{Z}A_4$ で表示してみる.

(1)



(2)



$\mathbb{Z}\Delta$ の配置に関しては [29] で詳しく調べられている.

4.4 定理 4.2 の証明

R を有限表現型の連結な基本的な自己移入多元環とし, $\text{Pi}(R) = \{e_1, \dots, e_m\}$ とする. また σ を R の中山置換とする.

R が中山多元環ならばそのブロック拡大も中山多元環である. 従って定理 2.3 より, R の任意のブロック拡大は有限表現型である.

この節の残りで逆, すなわち R の任意のブロック拡大が有限表現型ならば R が中山多元環になることを示す.

(i) $R \simeq K$ とする. このとき R のブロック拡大は中山多元環である. 従って定理 2.3 より, R の任意のブロック拡大は有限表現型である.

(ii) $R \not\simeq K$ とする. まず定理 4.2 を特別な自己移入多元環の問題に帰着する.

補題 4.23. e を R の冪等元とする. 関手

$$- \otimes_{eRe} eR : \text{mod}(eRe) \longrightarrow \text{mod}R,$$

は忠実かつ充満である. 従って $\text{mod}(eRe)$ は $\text{mod}R$ の充満部分圏と見れる.

[証明] 任意の $X, Y \in \text{mod}(eRe)$ に対して, 写像

$$\Phi_{X,Y} : \text{Hom}_{eRe}(X, Y) \ni f \longmapsto f \otimes eR \in \text{Hom}_R(X \otimes_{eRe} eR, Y \otimes_{eRe} eR)$$

は全単射であることを示す. $X = eRe$ のとき, 同型の合成

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{eRe}(eRe, Y) &\simeq Y \simeq Y \otimes_{eRe} eR \simeq \text{Hom}_R(eR, Y \otimes_{eRe} eR) \\ &\simeq \text{Hom}_R(eRe \otimes_{eRe} eR, Y \otimes_{eRe} eR) \end{aligned}$$

で $\Phi_{eRe, Y}$ になるものが存在する. 従って $\Phi_{eRe, Y}$ は同型である. これよりまた有限生成射影 eRe -加群 P に対して, $\Phi_{P, Y}$ は同型である.

次に一般の $X \in \text{mod}(eRe)$ に対して次の射影分解をとる.

$$P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow X \longrightarrow 0. \quad (2)$$

これに $- \otimes_{eRe} eR$ を施して, 完全列

$$P_1 \otimes_{eRe} eR \longrightarrow P_0 \otimes_{eRe} eR \longrightarrow X \otimes_{eRe} eR \longrightarrow 0.$$

を得る. さらに $\text{Hom}_R(-, Y \otimes_{eRe} eR)$ を施して, 完全列

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_R(X \otimes_{eRe} eR, Y \otimes_{eRe} eR) \longrightarrow \text{Hom}_R(P_0 \otimes_{eRe} eR, Y \otimes_{eRe} eR) \longrightarrow \text{Hom}_R(P_1 \otimes_{eRe} eR, Y \otimes_{eRe} eR)$$

を得る. 一方, 射影分解 (2) に $\text{Hom}_R(-, Y)$ を施して, 完全列

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_R(X, Y) \longrightarrow \text{Hom}_R(P_0, Y) \longrightarrow \text{Hom}_R(P_1, Y)$$

を得る. 以上で得られた完全列について, 次は可換図式である.

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & \text{Hom}_R(X, Y) & \longrightarrow & \text{Hom}_R(P_0, Y) \\ & & \Phi_{X,Y} \downarrow & & \Phi_{P_0,Y} \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \text{Hom}_R(X \otimes_{eRe} eR, Y \otimes_{eRe} eR) & \longrightarrow & \text{Hom}_R(P_0 \otimes_{eRe} eR, Y \otimes_{eRe} eR) \\ & & & & \\ & & & \longrightarrow & \text{Hom}_R(P_1, Y) \\ & & & & \Phi_{P_1,Y} \downarrow \\ & & & \longrightarrow & \text{Hom}_R(P_1 \otimes_{eRe} eR, Y \otimes_{eRe} eR) \end{array}$$

$\Phi_{P_0, Y}, \Phi_{P_1, Y}$ は同型であるから, $\Phi_{X, Y}$ は同型である. 以上より $- \otimes_{eRe} eR$ は忠実かつ充満である. \square

補題 4.24. 次は同値である.

- (1) 任意の $n_1, \dots, n_m \in \mathbb{N}$ に対して $R(n_1, \dots, n_m)$ は有限表現型である.
- (2) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $R(n, \dots, n)$ は有限表現型である.

[証明] (2) は (1) の特別な場合である. (2) を仮定する. $n = \max\{n_i\}$ とする. このとき $eR(n, \dots, n)e = R(n_1, \dots, n_m)$ となる $R(n, \dots, n)$ の幂等元 e がとれる. 補題??と (2) の仮定より, $R(n_1, \dots, n_m)$ は有限表現型である. \square

$n \in \mathbb{N}$ とし, $R(n, \dots, n)$ を考える. これから $R(n, \dots, n)$ の特別な上階段型剰余環を構成する. 定義 2.12 の記号を用いる. 定義 2.12 の自然数の列 $\{c_{ij}\}$ を次のようにとる.

$$c_{ij} = j \quad (1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n_i).$$

このとき各 i に対して $S(i, \sigma(i))$ は次の形になる.

$$S(i, \sigma(i)) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & S(Q_i) & S(Q_i) & \cdots & S(Q_i) \\ 0 & 0 & S(Q_i) & \cdots & S(Q_i) \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & S(Q_i) \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}, & (i = \sigma(i)) \\ \begin{pmatrix} 0 & S(A_{i\sigma i}) & S(A_{i\sigma i}) & \cdots & S(A_{i\sigma i}) \\ 0 & 0 & S(A_{i\sigma i}) & \cdots & S(A_{i\sigma i}) \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & S(A_{i\sigma i}) \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}. & (i \neq \sigma(i)) \end{cases}$$

これを用いて

$$P(i, s) \supset X(i, s) = \begin{cases} S(i, \sigma(i)) & (s = \sigma(i)), \\ 0 & (s \neq \sigma(i)), \end{cases}$$

として,

$$X = \begin{pmatrix} X(1,1) & X(1,2) & \cdots & X(1,m) \\ X(2,1) & X(2,2) & \cdots & X(2,m) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X(m,1) & X(m,2) & \cdots & X(m,m) \end{pmatrix}.$$

とする. こうして作った上階段型剰余環 $R(n, \dots, n)/X$ を $\bar{P}(n)$ で表すことにする. これについて次の補題が成り立つ.

補題 4.25. $\bar{P}(n)$ は連結かつ基本的な自己移入多元環である.

[証明] 命題 2.16 と命題 2.13 の証明の概略より従う. □

$R(n, \dots, n)$ の有限生成加群圏と $\overline{P}(n)$ の有限生成加群圏を比較すると次の補題が得られる.

補題 4.26. $n \in \mathbb{N}$ とする. 次は同値である.

- (1) $R(n, \dots, n)$ は有限表現型である.
- (2) $\overline{P}(n)$ は有限表現型である.

[証明] 補題 4.5 と $\overline{P}(n)$ の構成の仕方より, 直既約 $R(n, \dots, n)$ -加群の個数と直既約 $\overline{P}(n)$ -加群の個数は有限個しか変わらない. □

以上より次の命題を得る.

命題 4.27. 次は同値である.

- (1) 任意の $n_1, \dots, n_m \in \mathbb{N}$ に対して $R(n_1, \dots, n_m)$ は有限表現型である.
- (2) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $\overline{P}(n)$ は有限表現型である.

命題 4.27 によって, 定理 4.2 は特別な自己移入多元環 $\overline{P}(n)$ の問題に帰着された. これから調べるのは $\overline{P}(n)$ の AR-クイバーのもつ性質である.

補題 4.28. $n \geq 2$ とする. $\overline{P}(n)$ の AR-クイバーを Γ とする. ${}_s\Gamma$ は連結である. 従って特に

$${}_s\Gamma = \mathbb{Z}\Delta/G$$

となる唯一つの Dynkin 図形と $\text{Aut}(\mathbb{Z}\Delta)$ の許容部分群 G が存在する.

[証明] 補題 4.25 と定理 1.38 より, Γ は連結である. ${}_s\Gamma$ は Γ から射影的かつ移入的な有限生成直既約 $\overline{P}(n)$ -加群に対応する頂点を除くことで得られる. 単純な射影 $\overline{P}(n)$ -加群に対応する頂点を除いても連結性は変わらない. 単純でない有限生成直既約射影 $\overline{P}(n)$ -加群 P が現れる概分裂完全列は

$$0 \longrightarrow J(P) \longrightarrow (J(P)/S(P)) \oplus P \longrightarrow P/S(P) \longrightarrow 0$$

のみであるから, $J(P)/S(P) \neq 0$ であれば ${}_s\Gamma$ を作る時に連結性が保たれる.

$\overline{P}(n)$ の自然な直交原始冪等元の完全系

$$\{p_{ij} = \langle 1 \rangle_{ij,ij} \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$$

をとる. $\text{length}(p_{ij}\overline{P}(n)) \geq 3$ ($1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$) を示せばよい. 今 $R \not\cong K$ であり, R は連結としてあるから, $\text{length}(e_i R) \geq 2$ ($1 \leq i \leq m$) である. ブロック拡大と上階段型剰余環の作り方から $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$ に対して

$$\begin{aligned} \text{length}(p_{ij}\overline{P}(n)) = \text{length}(p_{i1}\overline{P}(n)) &= \text{length}(p_{i1}R(n, \dots, n)) - (n-1) \\ &\geq 2n - (n-1) \\ &= n+1 \geq 3 \end{aligned}$$

である. □

次は有限生成直既約射影 $\overline{P}(n)$ -加群のジャコブソン根基に関する重要な命題である.

命題 4.29. $n \in \mathbb{N}$ とする. $\overline{P}(n)$ の自然な直交原始冪等元の完全系

$$\{p_{ij} = \langle 1 \rangle_{ij,ij} \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$$

をとる. このとき

$$J(p_{ij}\overline{P}(n)) \simeq \tau^{j-1}(J(p_{i1}\overline{P}(n))) \quad (1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n)$$

である.

[証明] 全ての射影的かつ移入的な直既約 $\overline{P}(n)$ -加群のリストは以下で与えられる.

$$\bigcup_{i=1}^m \{p_{ij}\overline{P}(n) \mid 1 \leq j \leq n\}.$$

命題 1.35 より, 各 i, j に対して次は概分裂完全列である.

$$0 \longrightarrow J(p_{ij}\overline{P}(n)) \longrightarrow p_{ij}\overline{P}(n) \oplus J(p_{ij}\overline{P}(n))/S(p_{ij}\overline{P}(n)) \longrightarrow p_{ij}\overline{P}(n)/S(p_{ij}\overline{P}(n)) \longrightarrow 0.$$

ここで $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n-1$ に対して

$$J(p_{ij}\overline{P}(n)) = p_{ij+1}\overline{P}(n)/S(p_{ij+1}\overline{P}(n))$$

であることに注意すると,

$$\begin{aligned} \tau(J(p_{ij}\overline{P}(n))) &= \tau(p_{ij+1}\overline{P}(n)/S(p_{ij+1}\overline{P}(n))) \\ &= J(p_{ij+1}\overline{P}(n)) \end{aligned}$$

を得る. これより命題の主張が従う. □

配置に関する特別な性質を定義する. なぜ以下の性質を定義するのは, 命題 4.31 からわかるだろう.

定義 4.30. n を 2 以上の自然数とする. 安定並進クイバー Γ の配置 \mathcal{C} に対して, 次の条件 (T_n) を定義する.

(T_n) $\mathcal{C} = \coprod_{x \in \mathcal{D}} \{\tau^k(x) \mid 0 \leq k \leq n-1\}$ となる \mathcal{C} の部分集合 \mathcal{D} が存在する.

すなわち (T_n) は, \mathcal{C} が τ でちょうど n 個続く部分の和集合で出来ているということである.

次は命題 4.29 から導かれる, $\overline{P}(n)$ の AR-クイバーのもつ重要な特徴である.

命題 4.31. $\overline{P}(n)$ の AR-クイバーを Γ とし, \mathcal{C} を直既約射影 $\overline{P}(n)$ -加群のジャコブソン根基に対応する Γ の頂点からなる集合とする. このとき ${}_s\Gamma$ において \mathcal{C} は (T_n) をみたす.

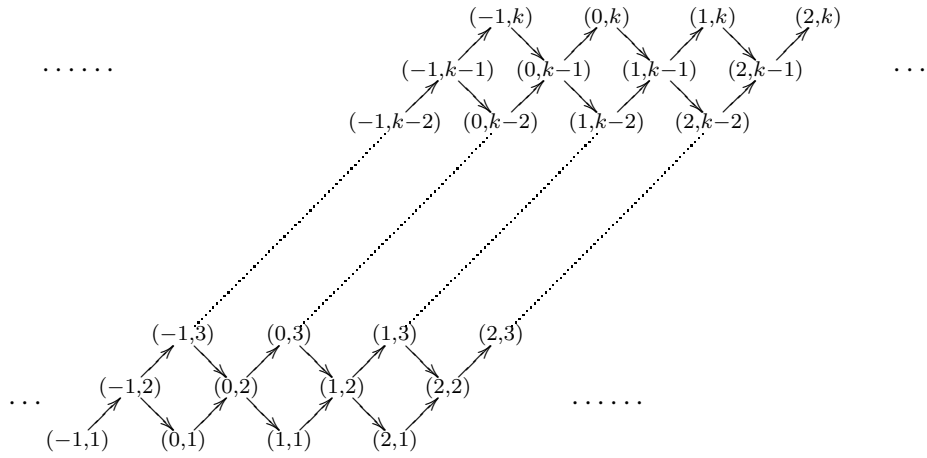
[証明] 命題 4.29 の記号を用いる. x_i として $J(p_{i1}\overline{P}(n))$ に対応する \mathcal{C} の頂点をとる. 命題 4.29 より

$$\mathcal{C} = \prod_{i=1}^m \{\tau^k(x_i) \mid 0 \leq k \leq n-1\}$$

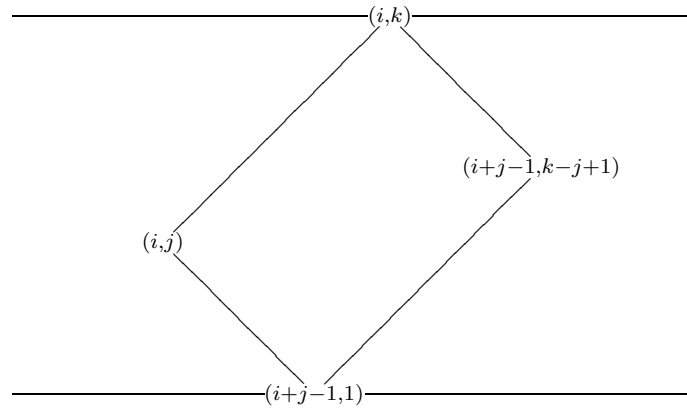
が従う. □

補題 4.21, 補題 4.28, 命題 4.31 から, $\mathbb{Z}A_k, \mathbb{Z}D_k, \mathbb{Z}E_i$ ($k \in \mathbb{N}, i = 6, 7, 8$) の配置で (T_n) をみたすものがどれだけあるかを計算してみる. すなわち有限表現型の $\overline{P}(n)$ の AR-クイバーになり得るものがどれだけあるかを調べる.

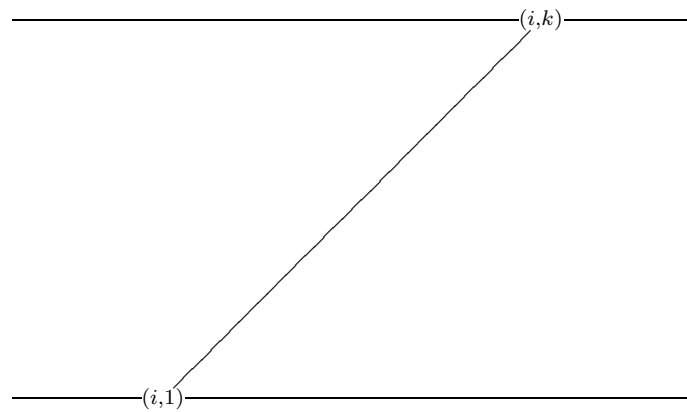
$n \geq 2, k \geq 1$ とする. (T_n) をみたす \mathbb{Z}_k の配置を決定する. $\mathbb{Z}A_k$ ($k \geq 1$) に次のように座標をいれる.



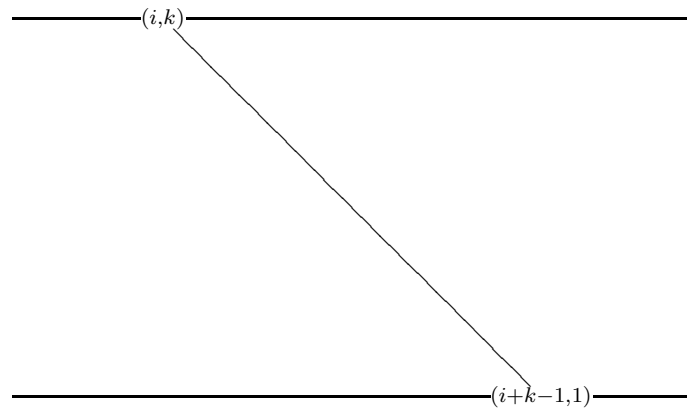
$\mathbb{Z}A_k$ の頂点 (i, j) に対して, $H_{\mathbb{Z}A_k}((i, j))$ は以下の四角形で囲った範囲の頂点, もしくは直線上にある頂点からなる.



例えば $j = 1$ のときは以下である.



$j = k$ のときは以下である.

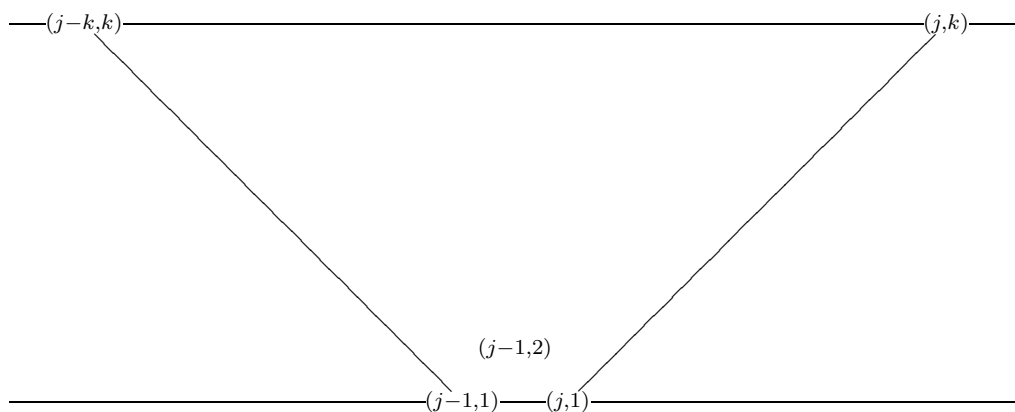


$n \geq 2$ に対して (T_n) をみたす $\mathbb{Z}A_k$ の配置を分類する.

補題 4.32. $n \geq 2$ とする. \mathcal{C} を (T_n) をみたす $\mathbb{Z}A_k$ の配置とする.

- (1) $(i, j) \in \mathcal{C}$ ならば, $j = 1$ もしくは $j = k$ である.
- (2) \mathcal{C} は次のどちらかになる.
 - (a) $\mathcal{C} = \{(i, 1) \mid i \in \mathbb{Z}\}$.
 - (b) $\mathcal{C} = \{(i, k) \mid i \in \mathbb{Z}\}$.

[証明] (1) は上で示した $H_{\mathbb{Z}A_k}((i, j))$ の範囲から明らか. (2) を示す. $(j, 1) \in \mathcal{C}$ かつ $(j-1, 1) \notin \mathcal{C}$ なる $j \in \mathbb{Z}$ が存在するとする. このとき $(j-1, 1) \in H_{\mathbb{Z}A_k}(x)$ なる $x \in \mathcal{C}$ が存在するが, そのような x は (1) より $(j-k, k)$ でなければならない.



ここで (C1) より, $(j-1, 2) \in H_{\mathbb{Z}A_k}(x)$ なる $x \in \mathcal{C}$ が存在する. そのような x は (1) より $(j-1, 1)$ か $(j-k+1, k)$ であるが, (C2) より $(j-1, 1) \notin \mathcal{C}$ であり, もし $(j-k+1, k) \in \mathcal{C}$ ならば $(j, 1) \in H_{\mathbb{Z}A_k}((j-k+1, k))$ なので (C2) に矛盾する.

同様の議論によって $(j, 1) \in \mathcal{C}$ かつ $(j+1, 1) \notin \mathcal{C}$ なる $j \in \mathbb{Z}$ が存在するときも, 矛盾が導かれる. 従って $(i, 1) \in \mathcal{C}$ なる $i \in \mathbb{Z}$ が存在すれば, $\mathcal{C} = \{(i, 1) \mid i \in \mathbb{Z}\}$ である.

同様に $(i, k) \in C$ なる $i \in \mathbb{Z}$ が存在すれば, $C = \{(i, k) \mid i \in \mathbb{Z}\}$ であることが示せる. \square

補題 4.32 により, (T_n) をみたく $\mathbb{Z}A_k$ の配置は二種類であることがわかった. 実は R の有限生成直既約射影加群のジャコブソン根基に対応する ${}_s\Gamma$ の頂点集合が補題 4.32 の配置であるとき, R は中山多元環であることがわかる.

補題 4.33. R を基本的かつ連結な自己移入多元環とし, Γ をその AR-クイバーとする. 有限生成直既約射影 R -加群のジャコブソン根基に対応する ${}_s\Gamma$ の頂点集合を C とする. 今 ${}_s\Gamma = \mathbb{Z}A_k/G$ であるとし,

$$\Pi : \mathbb{Z}A_k \longrightarrow \mathbb{Z}A_k/G$$

を自然な並進クイバーの写像とする. このとき $\Pi^{-1}(C)$ が

(a) $\{(i, 1) \mid i \in \mathbb{Z}\}$

(b) $\{(i, k) \mid i \in \mathbb{Z}\}$

のどちらかであるならば, R は中山多元環である.

[証明] (a) のときを示せばよい. $\{(i, 1) \mid i \in \mathbb{Z}\}$ には G が作用するので, $G = (\tau^l)$ となる l が存在する. k に関する帰納法で示す. ${}_s\Gamma = \emptyset$ のとき, R は半単純環である. $k > 0$ とする. R の直既約分解

$$R = P_1 \oplus \cdots \oplus P_n$$

をとる. 仮定より番号を適当に換えることで

$$\tau(P_1) = P_n, \quad \tau(P_i) = P_{i-1} \quad (2 \leq i \leq n)$$

とできる. ここで $I := S(P_1) \oplus \cdots \oplus S(P_n) \subset R$ を考える. 補題 4.5 より I は R のイデアルであり, 補題 4.6 より R/I は

$$J(P_1), J(P_2), \dots, J(P_n)$$

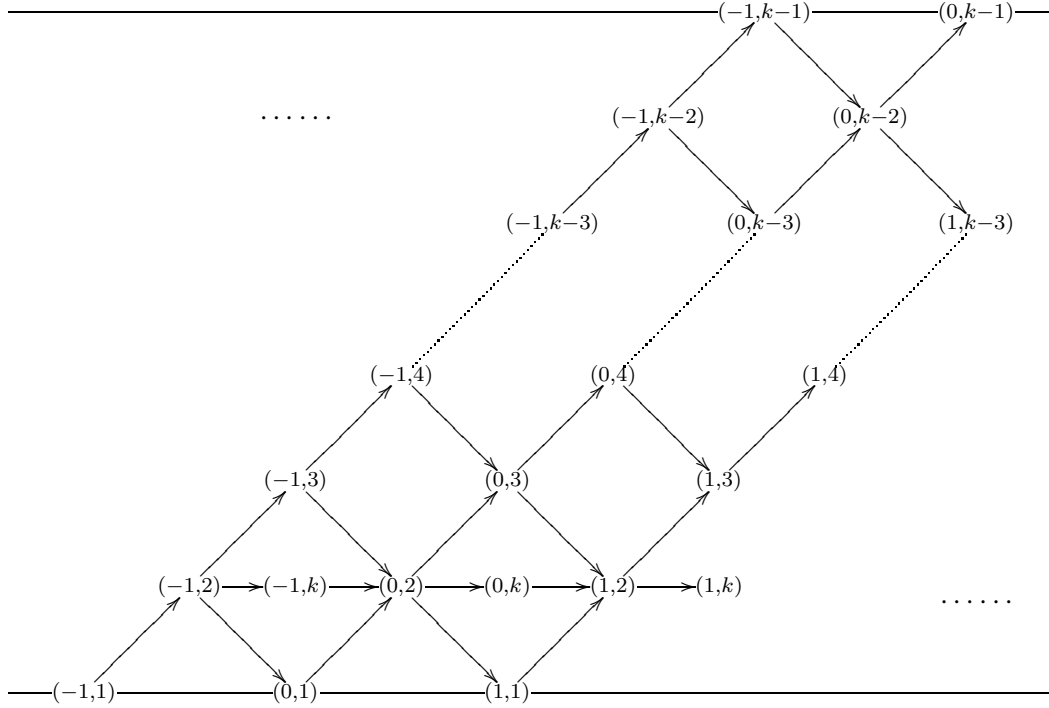
を射影的かつ移入的な有限生成直既約 R -加群とする自己移入多元環である.

R/I の AR-クイバーを Γ' とすると, 概分裂完全列の保存 (補題 4.6) より, Γ' は ${}_s\Gamma$ において C を射影頂点かつ移入頂点としたものである. よって ${}_s\Gamma' = \mathbb{Z}A_{k-1}/(\tau^l)$ であることが従う. 帰納法の仮定より R/I は中山多元環である. 従って R も中山多元環である. \square

以上より, 以下の条件をみたく基本的な自己移入多元環 R は, 中山多元環のみであることがわかった.

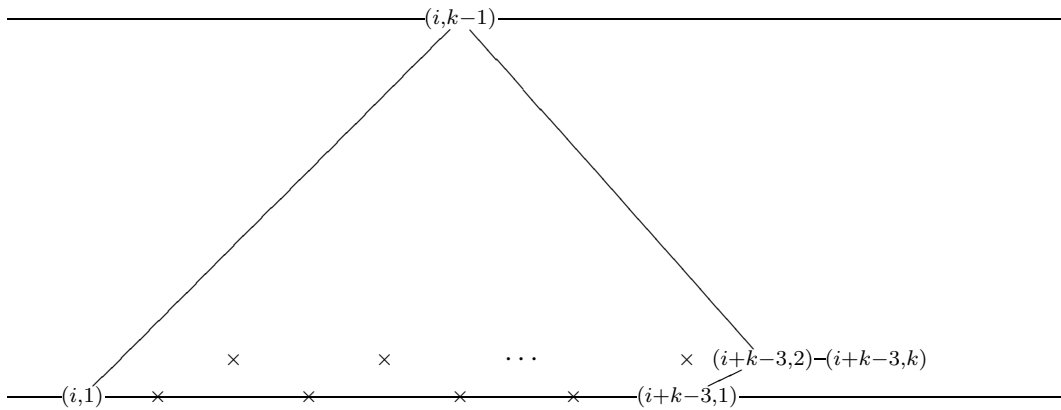
- (1) R の AR-クイバーを Γ とするとき, ${}_s\Gamma = \mathbb{Z}A_k/G$ である.
- (2) 有限生成直既約射影 R -加群のジャコブソン根基に対応する ${}_s\Gamma$ の頂点は (T_n) ($n \geq 2$) をみたく.

$n \geq 2, k \geq 4$ とする. (T_n) をみたす $\mathbb{Z}D_k$ の配置を決定する. $\mathbb{Z}D_k$ に次のように座標をいれる.



$\mathbb{Z}D_k$ の頂点 (i, j) に対して, $H_{\mathbb{Z}D_k}((i, j))$ は以下の直線で囲った範囲の頂点, 及び直線上にある頂点からなる. 但し, 直線で囲った範囲の中にある \times は, その頂点が $H_{\mathbb{Z}D_k}((i, j))$ に属さないことを示す.

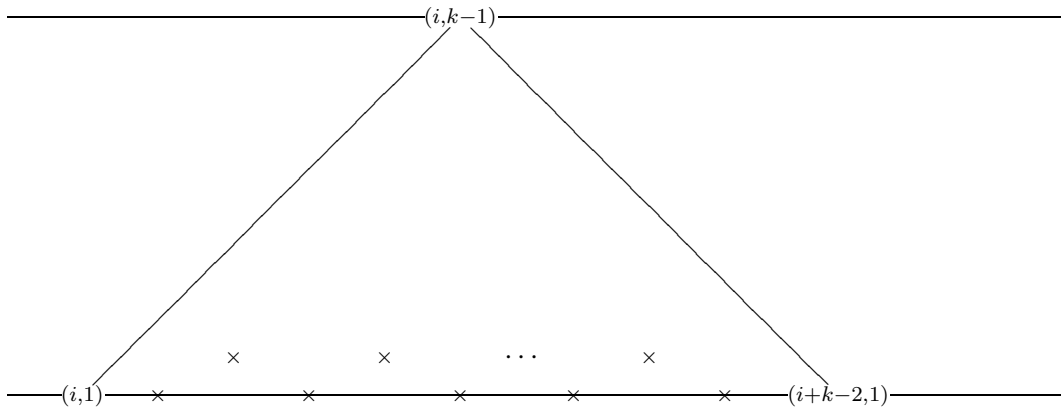
$j = 1$ のとき, k が奇数ならば $H_{\mathbb{Z}D_k}((i, j))$ は以下である.



但し \times は以下の頂点である.

$$\{(i+1+2l, 1), (i+1+2l, k) \mid 0 \leq l \leq (k-3)/2\}.$$

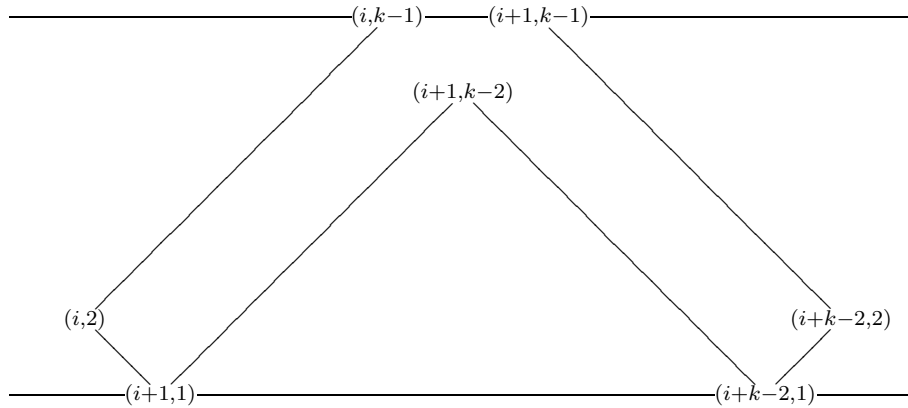
k が偶数ならば $H_{\mathbb{Z}D_k}((i, j))$ は以下である.



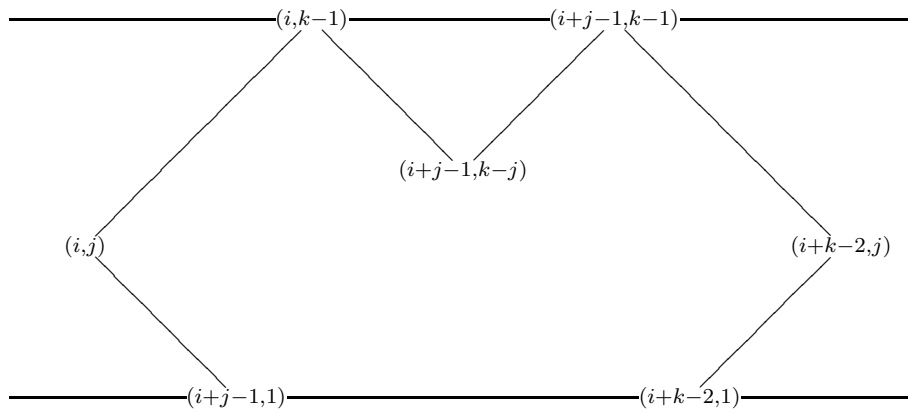
但し \times は以下の頂点である.

$$\{(i+1+2l, 1), (i+1+2l, k) \mid 0 \leq l \leq (k-4)/2\}.$$

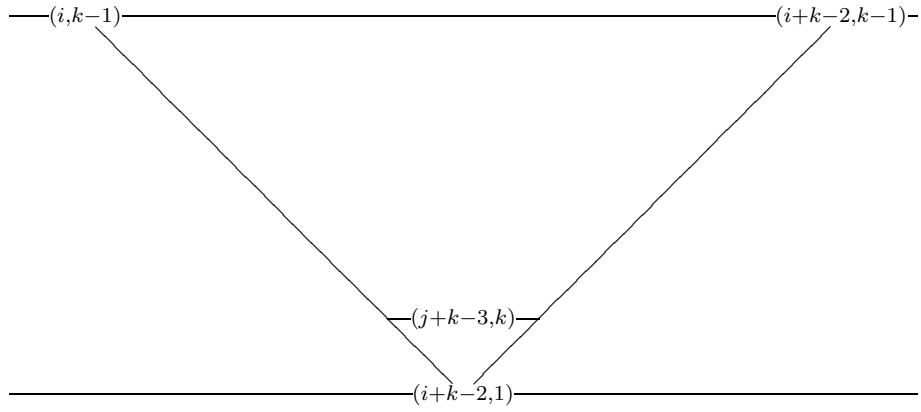
$j = 2$ のとき, $H_{\mathbb{Z}D_k}((i, j))$ は以下である.



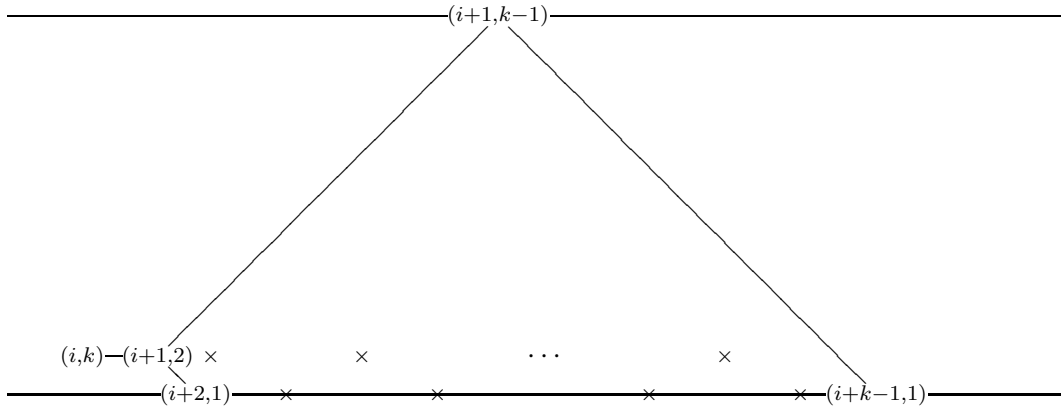
$3 \leq j \leq k-2$ のとき, $H_{\mathbb{Z}D_k}((i, j))$ は以下である.



$j = k - 1$ のとき, $H_{\mathbb{Z}D_k}((i, j))$ は以下である.



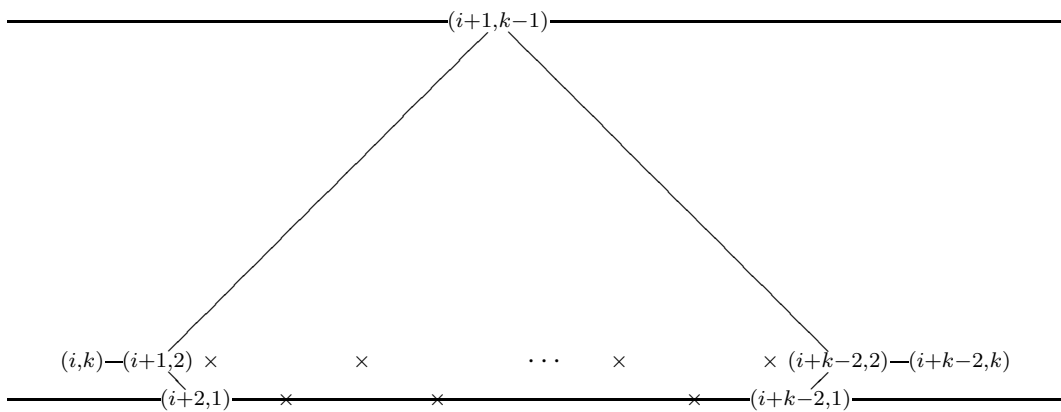
$j = k$ のとき, k が奇数ならば $H_{\mathbb{Z}D_k}((i, j))$ は以下である.



但し \times は以下の頂点である.

$$\{(i + 3 + 2l, 1), (i + 1 + 2l, k) \mid 0 \leq l \leq (k - 3)/2\}.$$

k が偶数ならば $H_{\mathbb{Z}D_k}((i, j))$ は以下である.



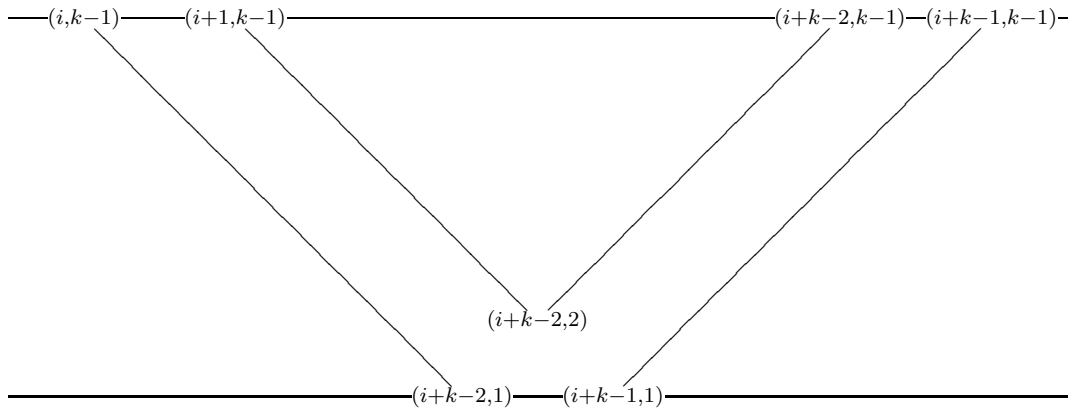
但し \times は以下の頂点である.

$$\{(i + 3 + 2l, 1), (i + 1 + 2l, k) \mid 0 \leq l \leq (k - 4)/2\}.$$

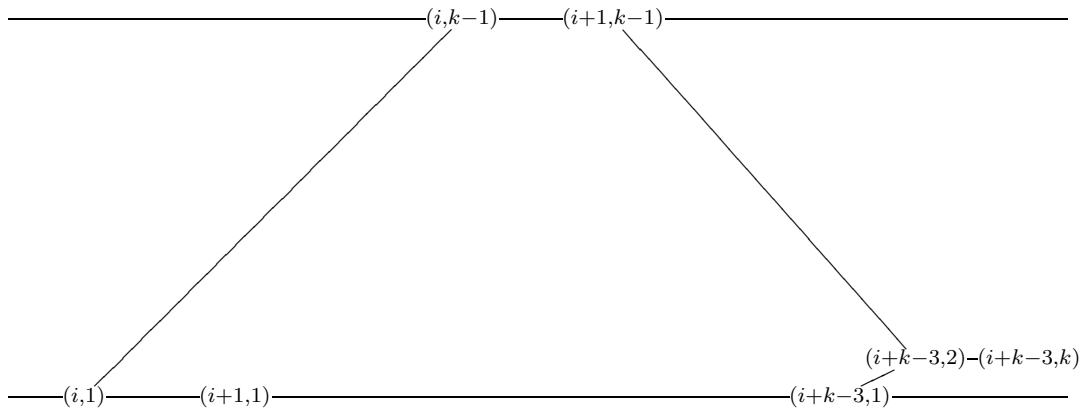
以下 k が奇数であるとして, (T_n) をみたく $\mathbb{Z}D_k$ の配置が存在しないことを示す (k が偶数のときも同様に示せる).

最初に $n = 2$ のときを調べる. 上の図より, (C2) をみたく $\{(i, j), (i + 1, j)\}$ に対する, $H_{\mathbb{Z}D_k}((i, j)) \cup H_{\mathbb{Z}D_k}((i + 1, j))$ は, 以下で与えられる. 証明のために番号を付けておく.

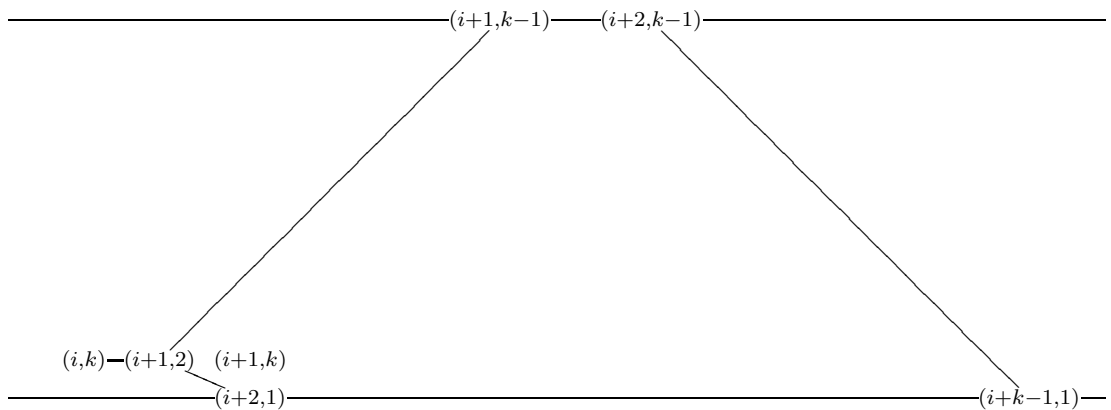
- (i) $\{(i, k - 1), (i + 1, k - 1)\}$ は (C2) をみたく, $H_{\mathbb{Z}D_k}((i, k - 1)) \cup H_{\mathbb{Z}D_k}((i + 1, k - 1))$ は以下となる.



- (ii) $\{(i, 1), (i + 1, 1)\}$ は (C2) をみたく, $H_{\mathbb{Z}D_k}((i, 1)) \cup H_{\mathbb{Z}D_k}((i + 1, 1))$ は以下となる.

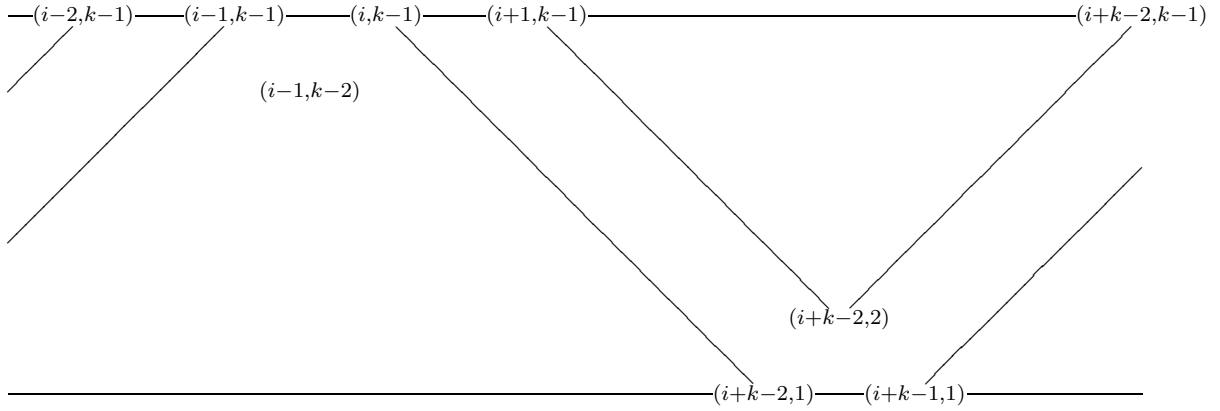


- (iii) $\{(i, k), (i + 1, k)\}$ は (C2) をみたく, $H_{\mathbb{Z}D_k}((i, k)) \cup H_{\mathbb{Z}D_k}((i + 1, k))$ は以下となる.



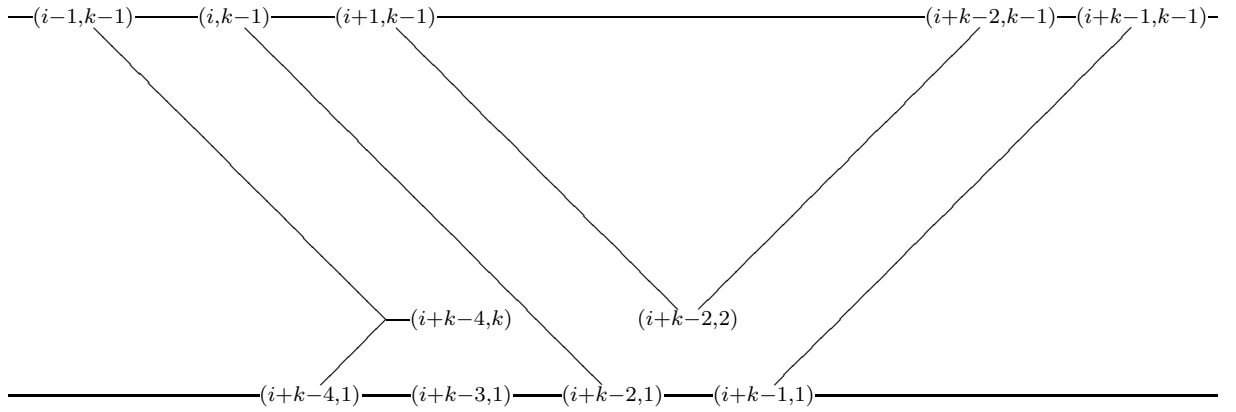
補題 4.34. (T_2) をみたす $\mathbb{Z}D_k$ の配置は存在しない.

[証明] \mathcal{C} を (T_2) をみたす $\mathbb{Z}D_k$ の配置とする. まず $(i, k-1), (i+1, k-1) \in \mathcal{C}$ であると仮定する. (C2) より, $\{(i-l, k-1) \mid l \in \mathbb{Z}\} \subset \mathcal{C}$ となることはない. そこで $(i-1, k-1) \notin \mathcal{C}$ とする. (C1) より $(i-1, k-1) \in H_{\mathbb{Z}D_k}(x)$ なる $x \in \mathcal{C}$ が存在する. (i) の形によって $(i-1, k-1)$ が覆われているとする.



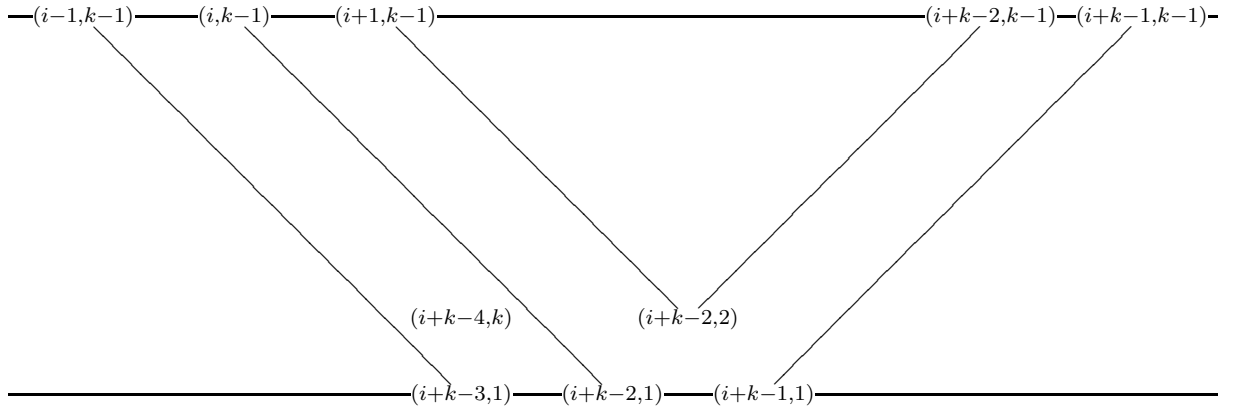
このとき (i), (ii), (iii) のどれを用いても, (C2) をみたすように $(i-1, k-2)$ を覆うことはできない. なぜならば (i) を用いると, $(i-2, i-k)$ もしくは $(i-1, i-k)$ が \mathcal{C} に属さなければならず (C2) に矛盾である. (ii) または (iii) を用いると, $(i, k-1)$ が (ii) または (iii) の範囲に入ってしまうので, やはり (C2) に矛盾である.

次に (ii) の形で $(i-1, k-1)$ が覆われているとする.



このとき (i), (ii), (iii) のどれを用いても, (C2) をみたすように $(i+k-3, 1)$ を覆うことはできないことが, 上と同様の議論によってわかる.

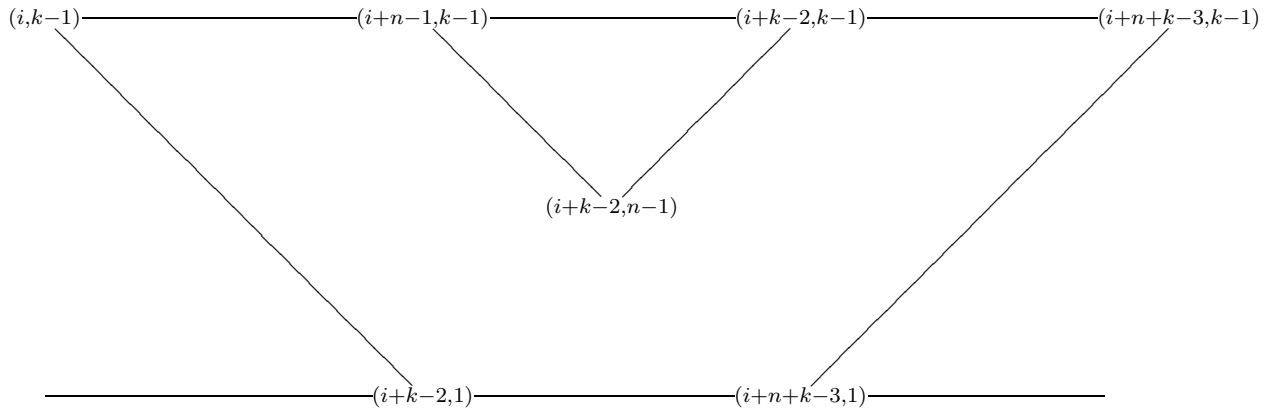
最後に (iii) の形で $(i-1, k-1)$ が覆われているとする.



このとき (i), (ii), (iii) のどれを用いても, (C2) をみたくように $(i+k-4, k)$ を覆うことはできないことが, 上と同様の議論によってわかる.

以上より $(i, k-1), (i+1, k-1) \in \mathcal{C}$ であると仮定したことから, 矛盾が導かれた. 従って任意の $i \in \mathbb{Z}$ に対して $(i, k-1) \notin \mathcal{C}$ である. (ii), (iii) の形のみで (C1) をみたくすることは明らかに不可能である. 従って補題の主張を得る. \square

次に $3 \leq n \leq k-2$ のときを考える. (C2) をみたく $\{(i, j), \dots, (i+n-1, j)\}$ は $j = k-1$ のときのみであり, $\bigcup_{l=0}^{n-1} H_{\mathbb{Z}D_k}((i+l, j))$ は以下である.



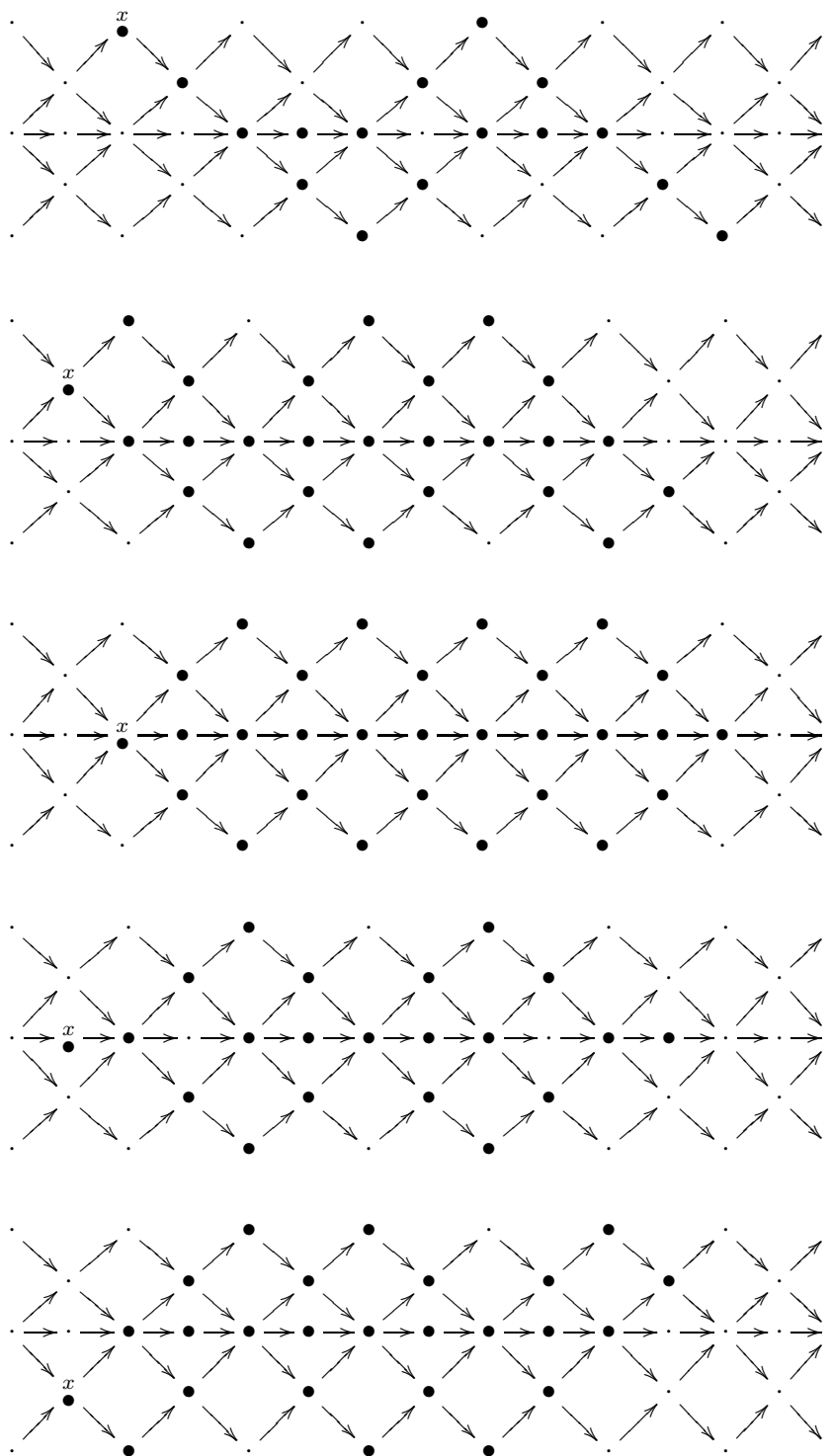
この $\bigcup_{l=0}^{n-1} H_{\mathbb{Z}D_k}((i+l, j))$ だけで (C1) をみたくすることは明らかに不可能である.

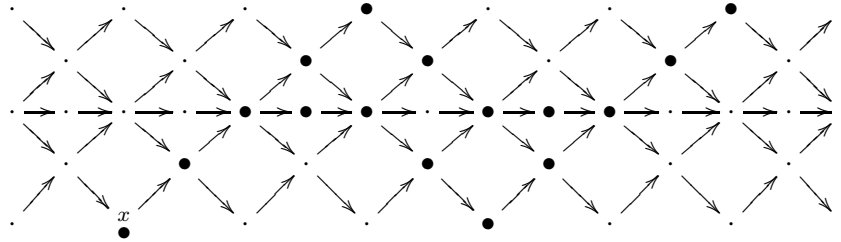
また, $k-2 < n$ のとき, (C2) をみたく $\{(i, j), \dots, (i+n-1, j)\}$ は存在しない. 以上より次の補題を得る.

補題 4.35. $n \geq 2$ とする. (T_n) をみたく $\mathbb{Z}D_k$ の配置は存在しない.

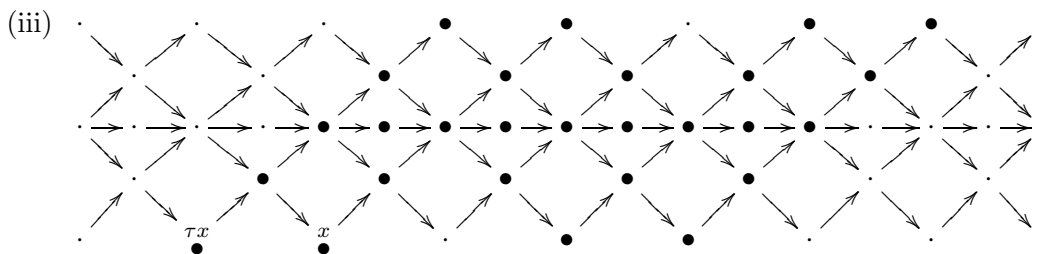
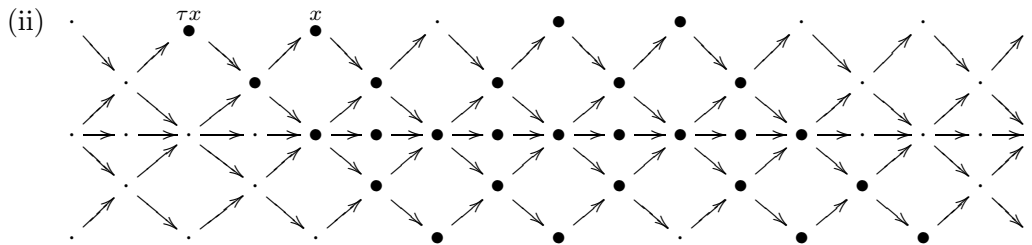
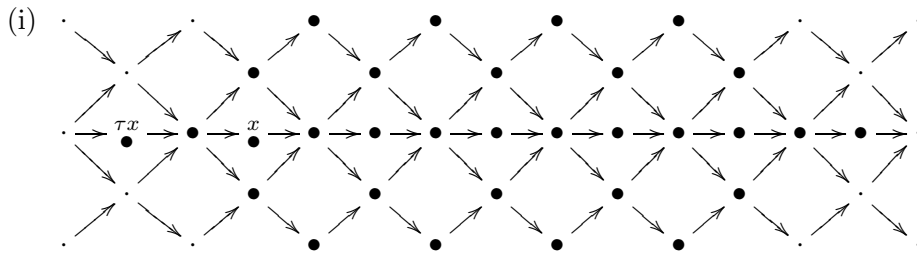
(T_n) をみたく $\mathbb{Z}E_6, \mathbb{Z}E_7, \mathbb{Z}E_8$ の配置を決定する. ここでは並進クイバー Γ に対して, その頂点を \cdot で表わし, $x \in \Gamma_0$ に対して, $H_\Gamma(x)$ に属す Γ の頂点を \bullet, \circ, \star で表わすことにする.

$n \geq 2$ とする. (T_n) をみたく $\mathbb{Z}E_6$ の配置を決定する. $\mathbb{Z}E_6$ の各頂点 x における $H_{\mathbb{Z}E_6}(x)$ は以下で与えられる.



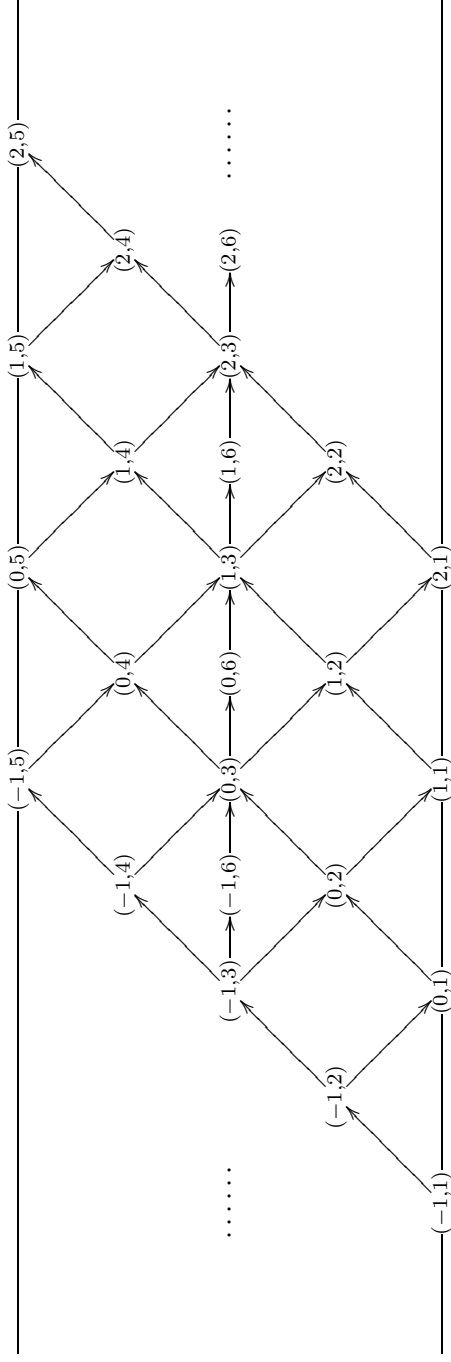


最初に $n = 2$ のときを考える. 上で示した図より, (C2) をみたす $\{\tau x, x\}$ に対する $H_{ZE_6}(\tau x) \cup H_{ZE_6}(x)$ は以下で与えられる. 証明のためにそれぞれに番号を付けておく.



これらの図を用いて次の補題を示す

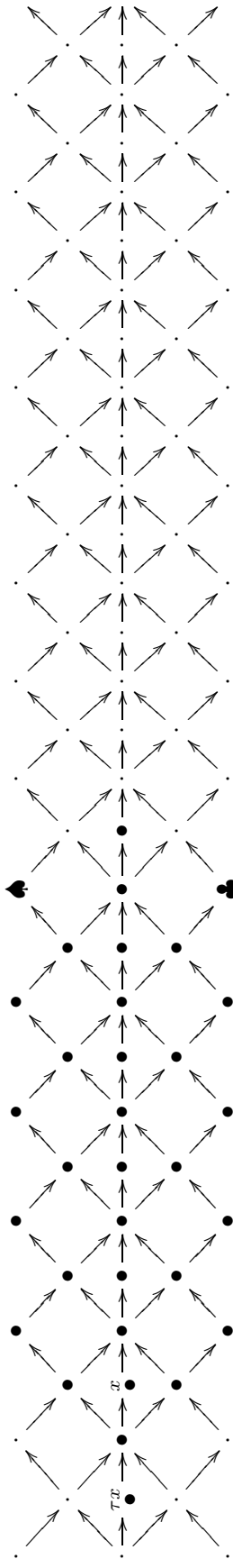
補題 4.36. $\mathbb{Z}E_6$ に次のように座標をいれる.



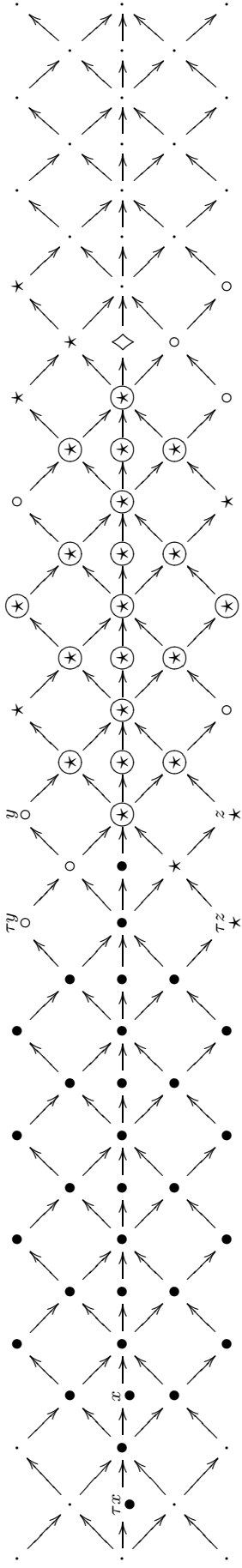
∞ (T₂) をみたく $\mathbb{Z}E_6$ の配置は次に示す配置のみである. 任意の $i \in \mathbb{Z}$ に対して

$$\{(i+l, 6), (i+1+l, 6), (i+5+l, 5), (i+6+l, 5), (i+7+l, 1), (i+8+l, 1) \mid l \in \mathbb{Z}\}.$$

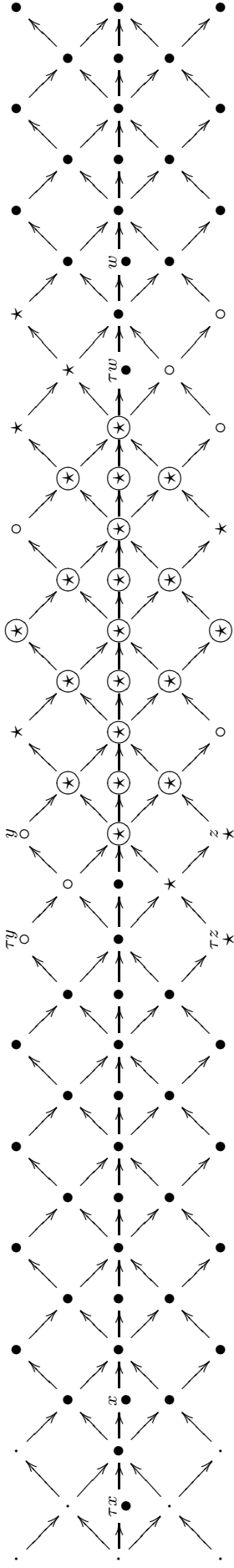
[証明] (i),(ii),(iii) のうちで一種類のみで (C1) をみたくことは明らかに不可能である. また (C2) より (ii),(iii) の二つだけで (C1) をみたくことは不可能である. (i) の形があるとする.



(C2) より上図の ♠ と ♣ を覆うには, それぞれ (ii) と (iii) を以下のように配置するしかない.



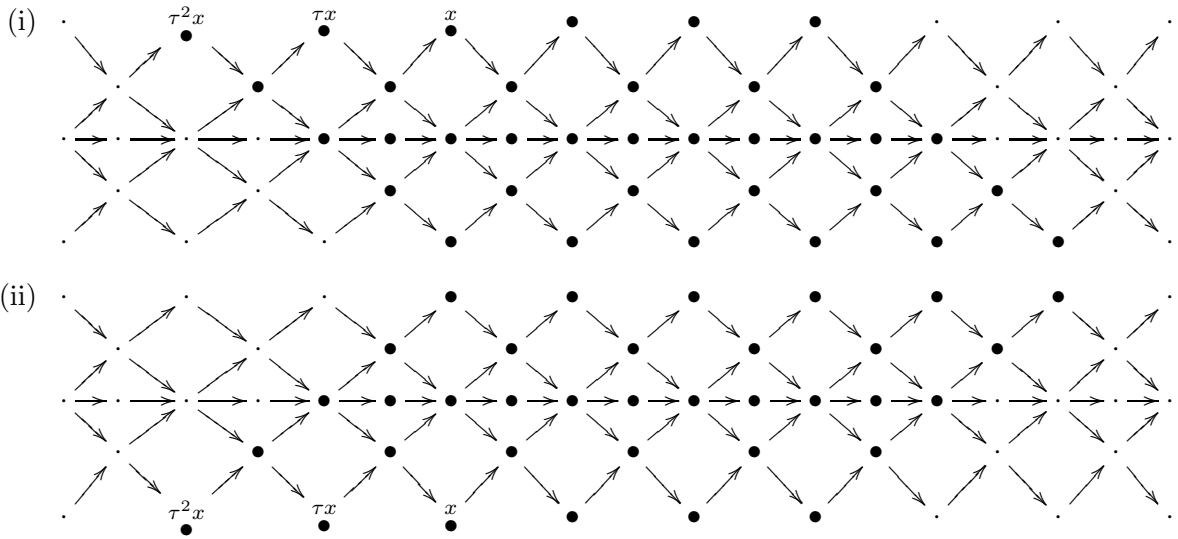
次に (C2) より上図の ◇ を覆うには, (i) を以下のように配置するしかない.



以上より (T_2) をみたま $\mathbb{Z}E_6$ の配置は, 主張の配置しかないことがわかる.

□

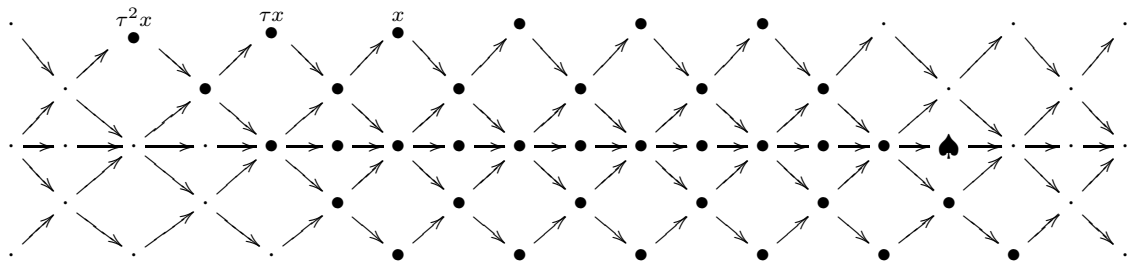
次に $n = 3$ のときを考える. (C2) をみたす $\{\tau^2 x, \tau x, x\}$ に対する $H_{\mathbb{Z}E_6}(\tau^2 x) \cup H_{\mathbb{Z}E_6}(\tau x) \cup H_{\mathbb{Z}E_6}(x)$ は以下で与えられる. 証明のために番号を付けておく.



これらの図を用いて次の補題を示す.

補題 4.37. (T_3) をみたす $\mathbb{Z}E_6$ の配置は存在しない.

[証明] \mathcal{C} を (T_3) をみたす $\mathbb{Z}E_6$ の配置とする. (i) の形の $\tau^2 x, \tau x, x$ が \mathcal{C} に含まれているとする. このとき (C1) より, (i) か (ii) によって下図の \spadesuit が覆われなければならない.



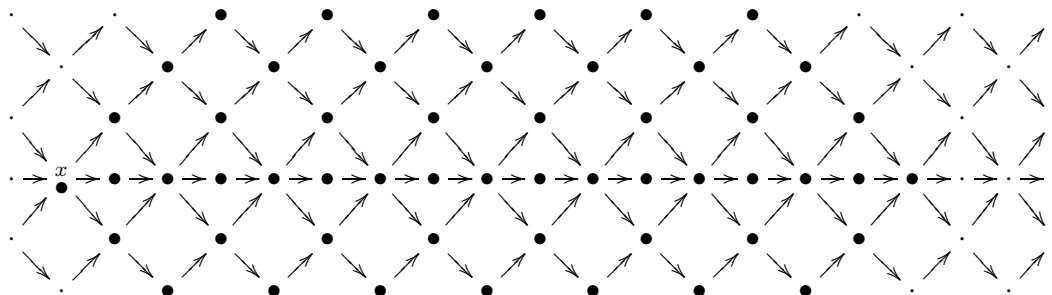
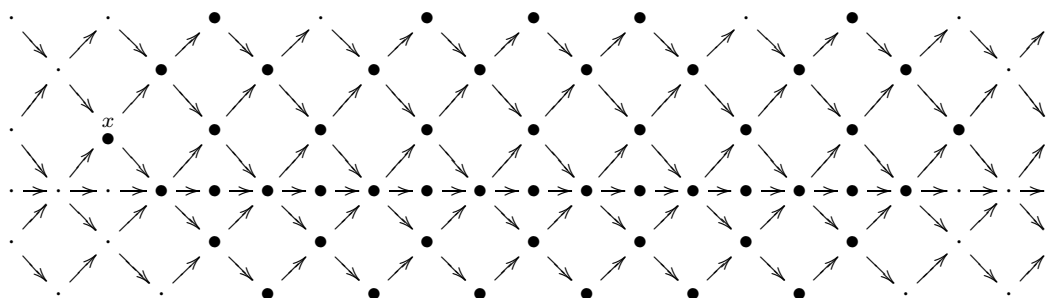
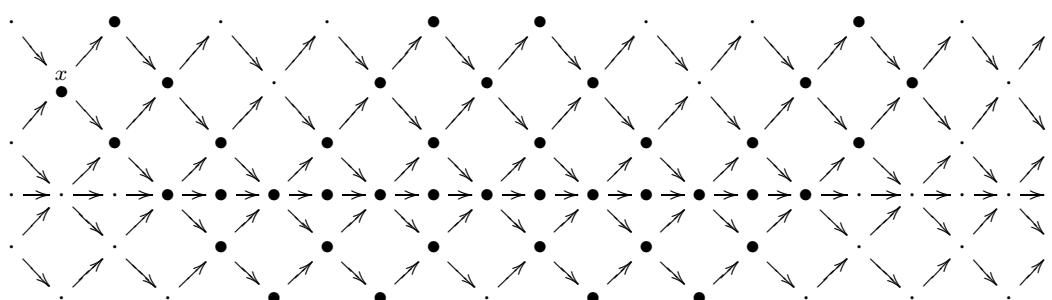
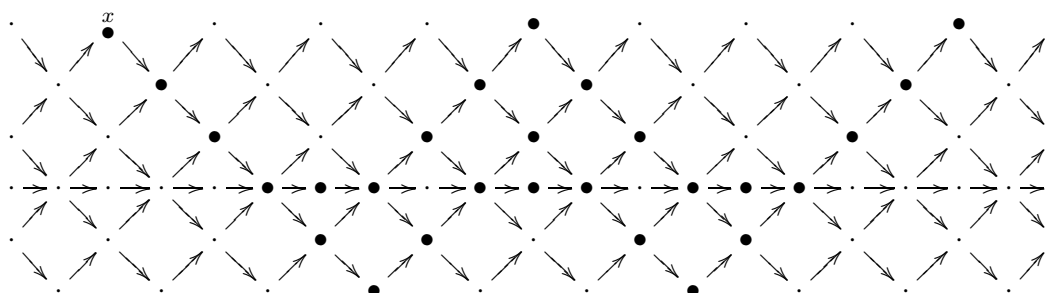
しかし (i), (ii) を用いて (C2) をみたすように \spadesuit を覆うことは, 明らかに不可能である. 従って (i) の形の $\tau^2 x, \tau x, x$ は \mathcal{C} に含まれない.

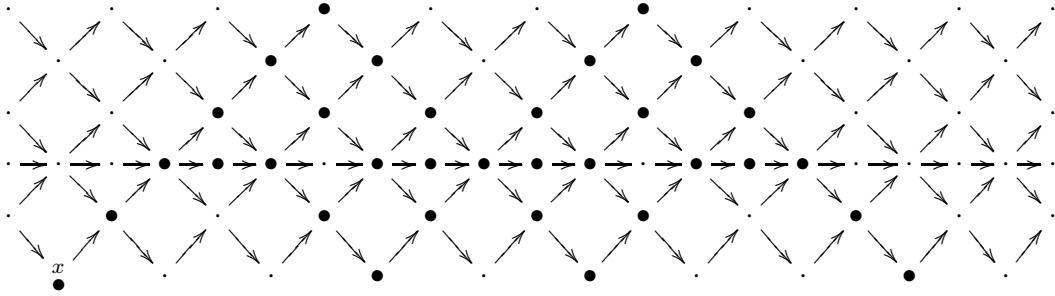
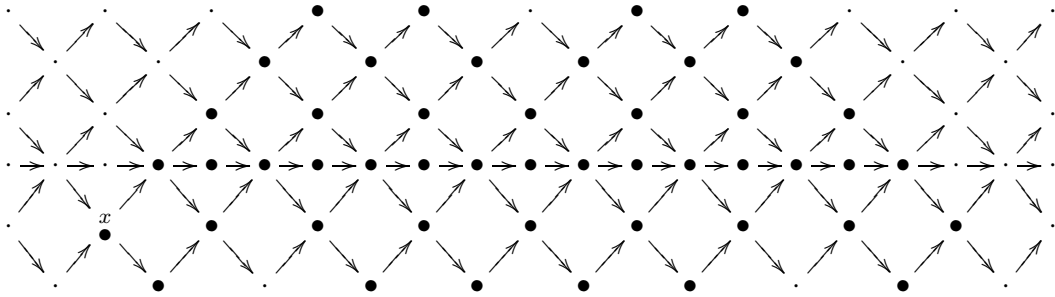
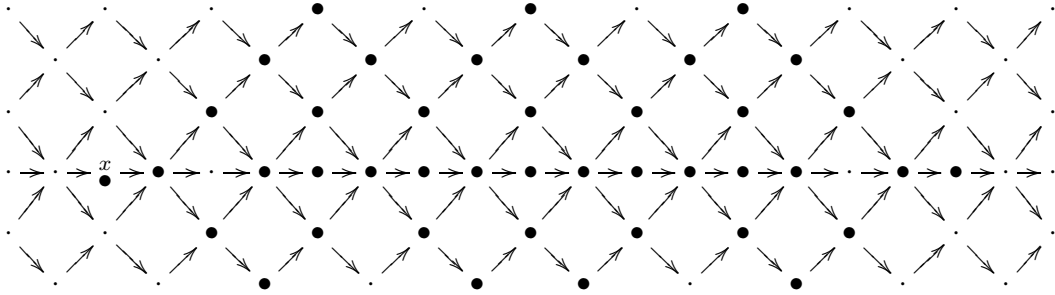
(ii) の形の $\tau^2 x, \tau x, x$ が \mathcal{C} に含まれているときも同様に矛盾が示せる. よって (T_3) をみたす $\mathbb{Z}E_6$ の配置は存在しない. \square

最後に $n \geq 4$ に対して, (C2) をみたす $\{\tau^{n-1}, \dots, \tau x, x\}$ は存在しない. 以上より各 $n \geq 2$ について, (T_n) をみたす $\mathbb{Z}E_6$ の配置が決定された.

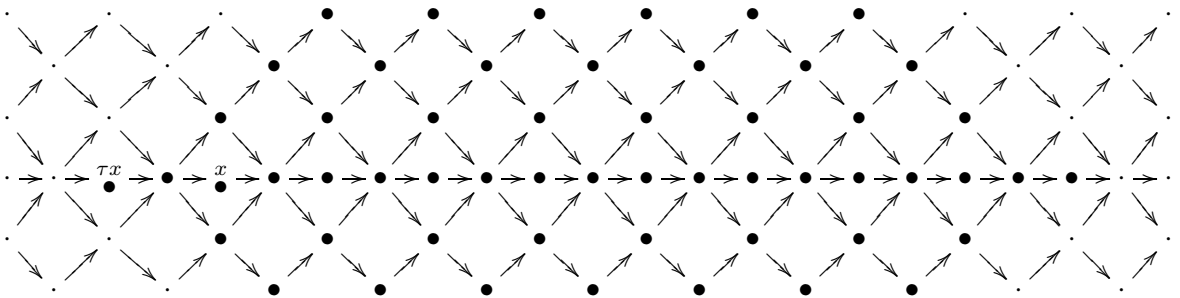
補題 4.38. (T_2) をみたす $\mathbb{Z}E_6$ の配置は, 補題 4.36 の一通りである. $n \geq 3$ については, (T_n) をみたす $\mathbb{Z}E_6$ の配置は存在しない.

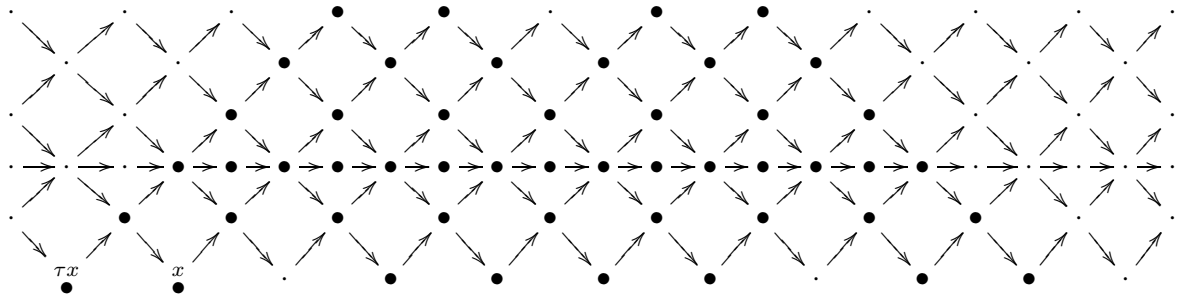
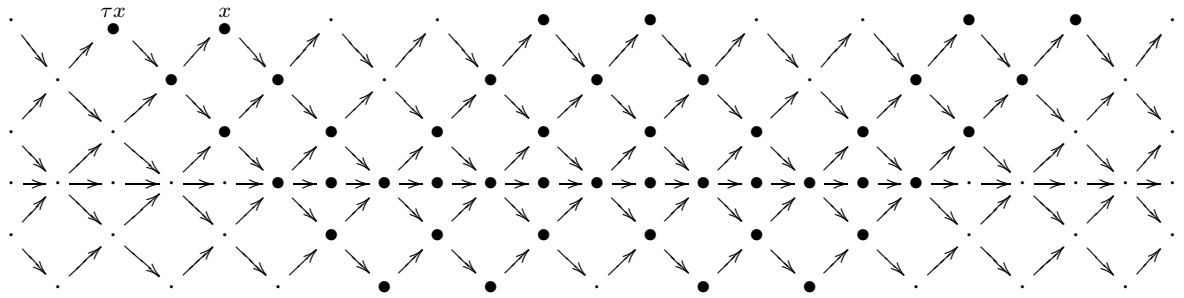
$n \geq 2$ とする. (T_n) をみたす $\mathbb{Z}E_7$ の配置を決定する. $\mathbb{Z}E_7$ の各頂点 x における $H_{\mathbb{Z}E_7}(x)$ は以下の通りである.



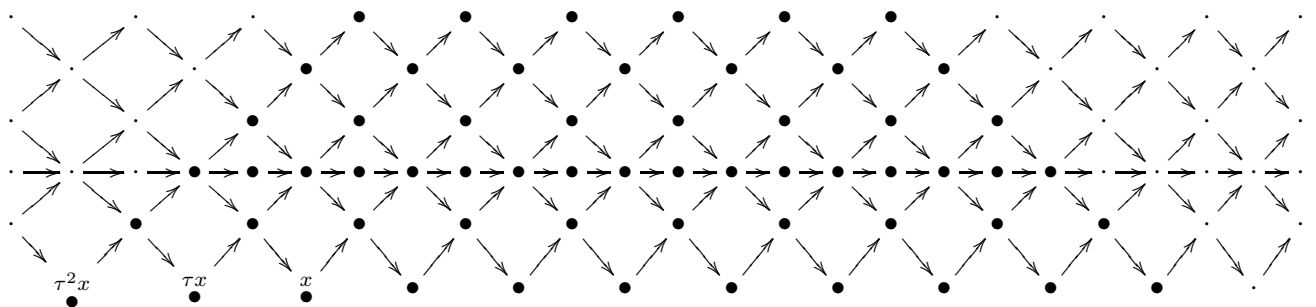
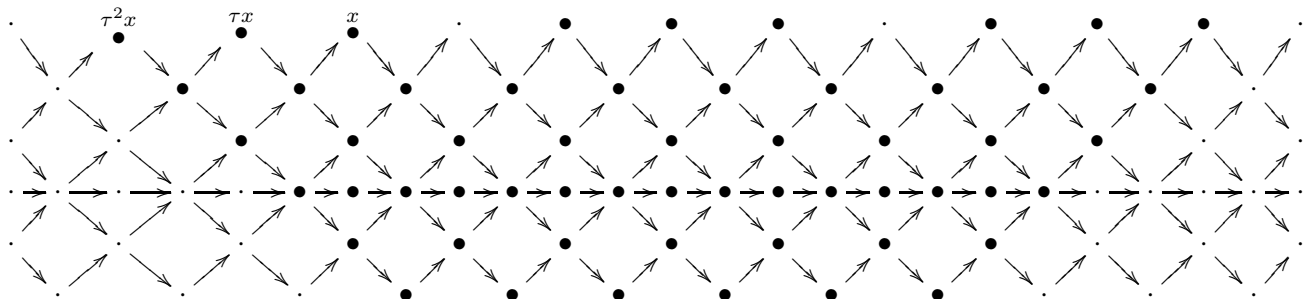


最初に $n = 2$ のときを考える. 上で示した図より, (C2) をみたす $\{\tau x, x\}$ に対する $H_{ZE_7}(\tau x) \cup H_{ZE_7}(x)$ は, 以下で与えられる.



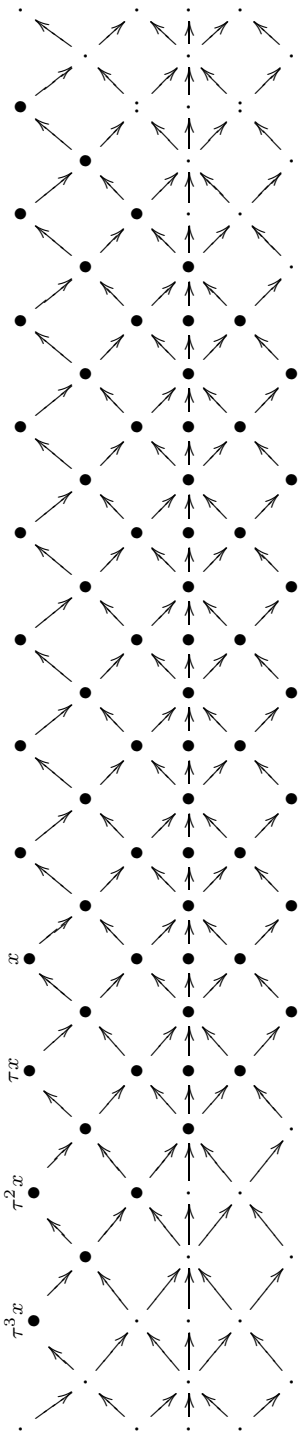


$\mathbb{Z}E_6$ の場合と同様の議論によって, (T_2) をみたす $\mathbb{Z}E_7$ の配置は存在しないことがわかる.
 次に $n = 3$ のときを考える. $(C2)$ をみたす $\{\tau^2 x, \tau x, x\}$ に対する $H_{\mathbb{Z}E_7}(\tau^2 x) \cup H_{\mathbb{Z}E_7}(\tau x) \cup H_{\mathbb{Z}E_7}(x)$ は, 以下で与えられる.



$\mathbb{Z}E_6$ の場合と同様の議論によって, (T_3) をみたす $\mathbb{Z}E_7$ の配置は存在しないことがわかる.

次に $n = 4$ のときを考える.(C2) をみたす $\{\tau^3 x, \tau^2 x, \tau x, x\}$ に対する $H_{\mathbb{Z}E_7}(\tau^3 x) \cup H_{\mathbb{Z}E_7}(\tau^2 x) \cup H_{\mathbb{Z}E_7}(\tau x) \cup H_{\mathbb{Z}E_7}(x)$ は, 以下で与えられる.

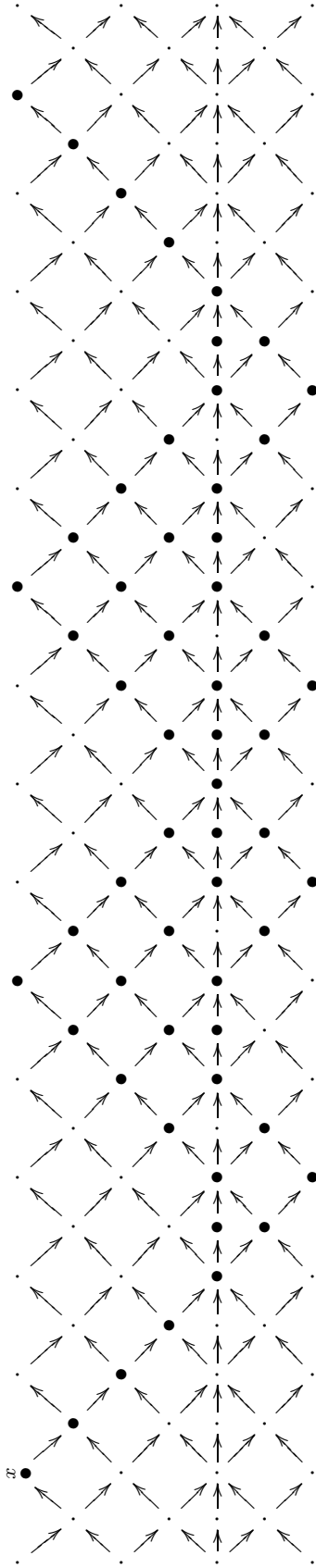


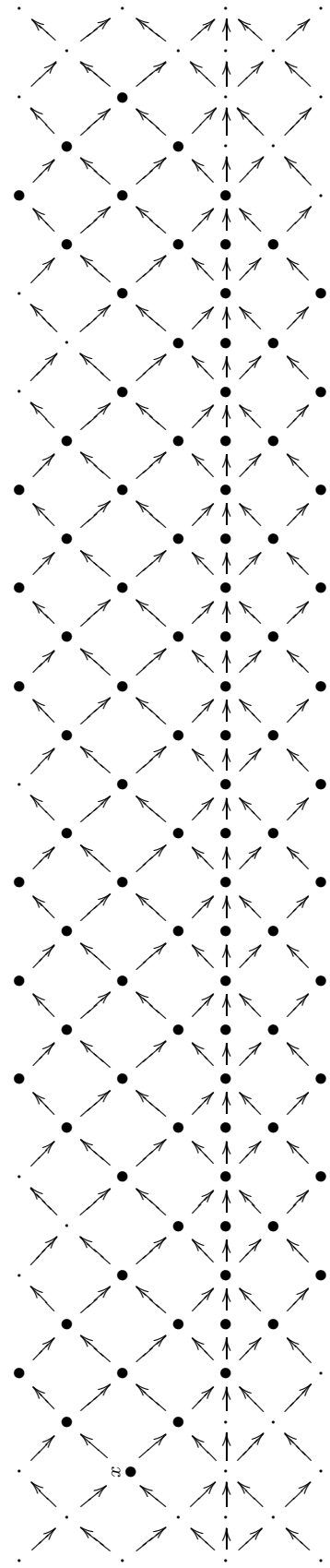
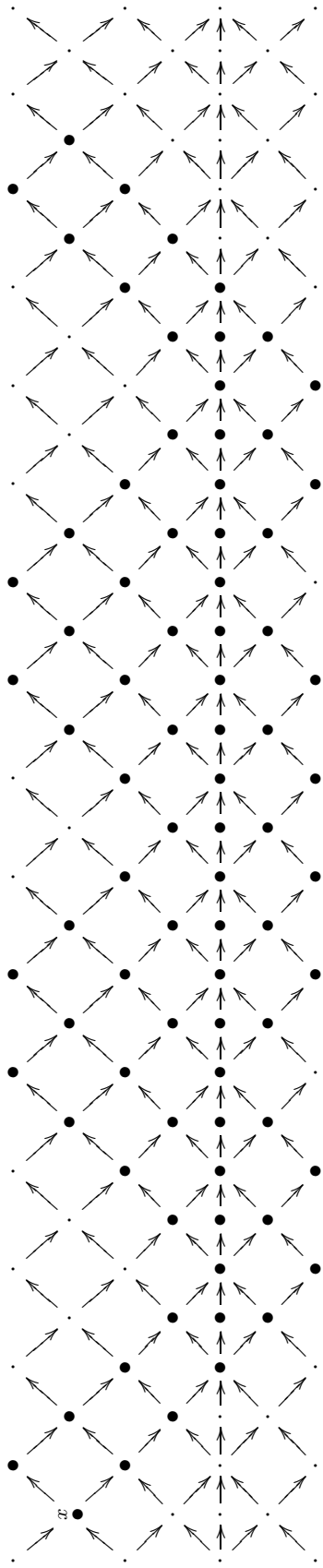
この $H_{\mathbb{Z}E_7}(\tau^3 x) \cup H_{\mathbb{Z}E_7}(\tau^2 x) \cup H_{\mathbb{Z}E_7}(\tau x) \cup H_{\mathbb{Z}E_7}(x)$ の形だけを用いて $\mathbb{Z}E_7$ を覆うことは明らかに不可能である. よって (T_4) をみたす $\mathbb{Z}E_7$ の配置は存在しない.

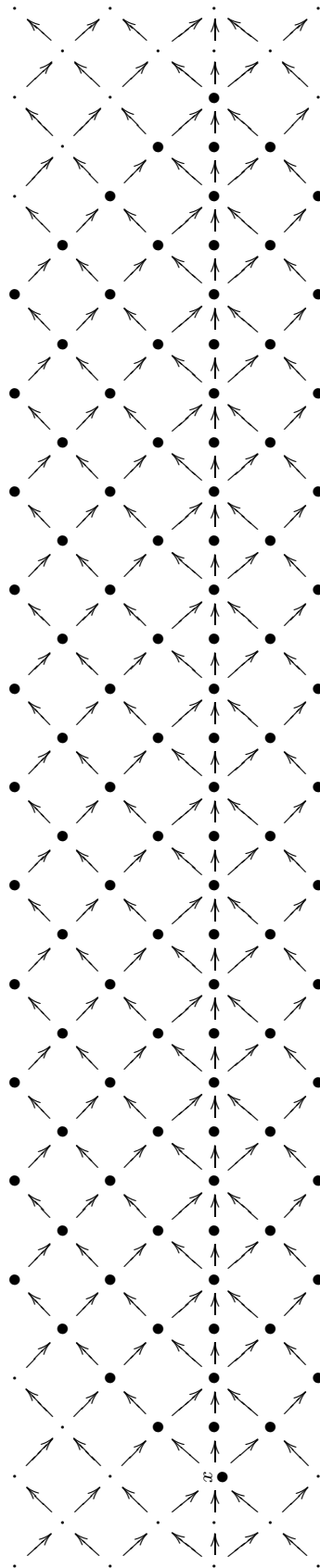
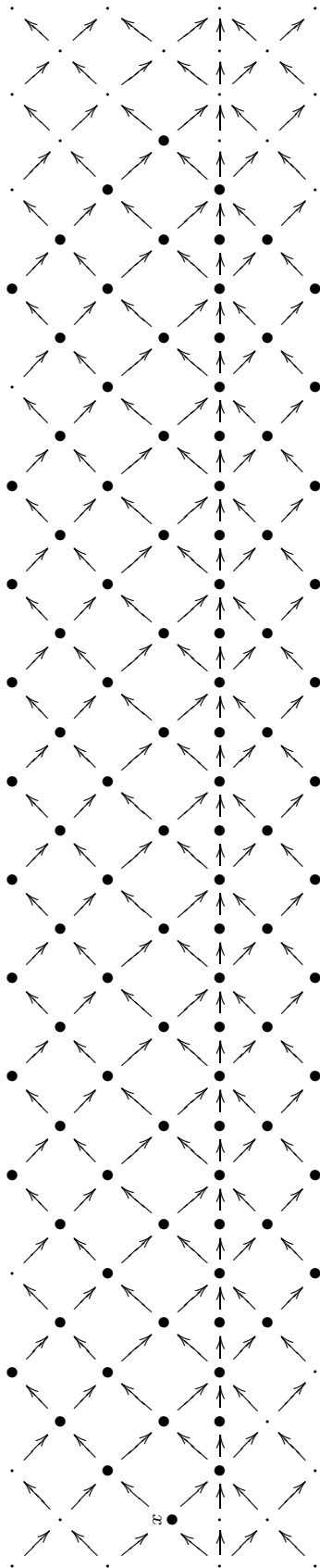
最後に $n \geq 5$ のとき, (C2) をみたす $\{\tau^n x, \dots, \tau x, x\}$ は存在しない. 以上より次を得る.

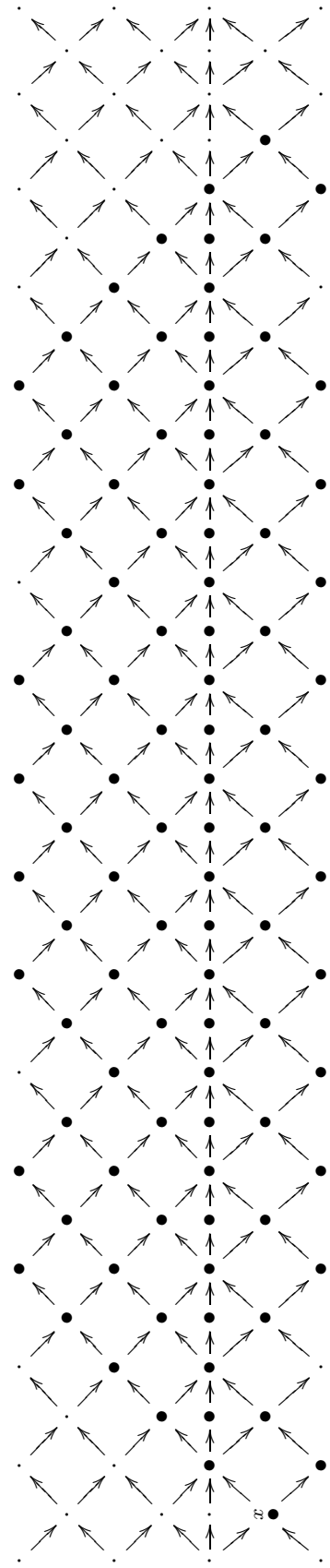
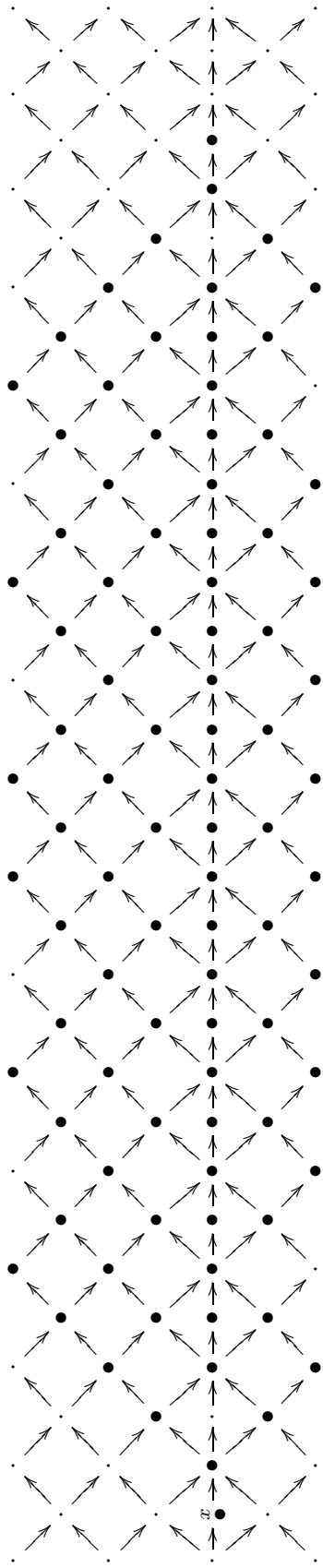
補題 4.39. 任意の $n \geq 2$ について, (T_n) をみたす $\mathbb{Z}E_7$ の配置は存在しない.

$n \geq 2$ とする. 最後に (T_n) をみたす $\mathbb{Z}E_7$ の配置を決定する. $\mathbb{Z}E_8$ の各頂点 x における $H_{\mathbb{Z}E_8}(x)$ は以下の通りである.

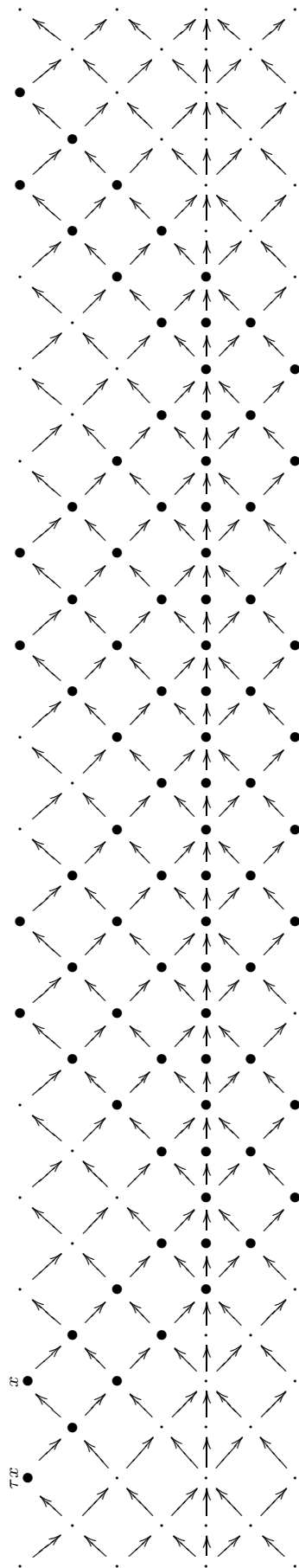
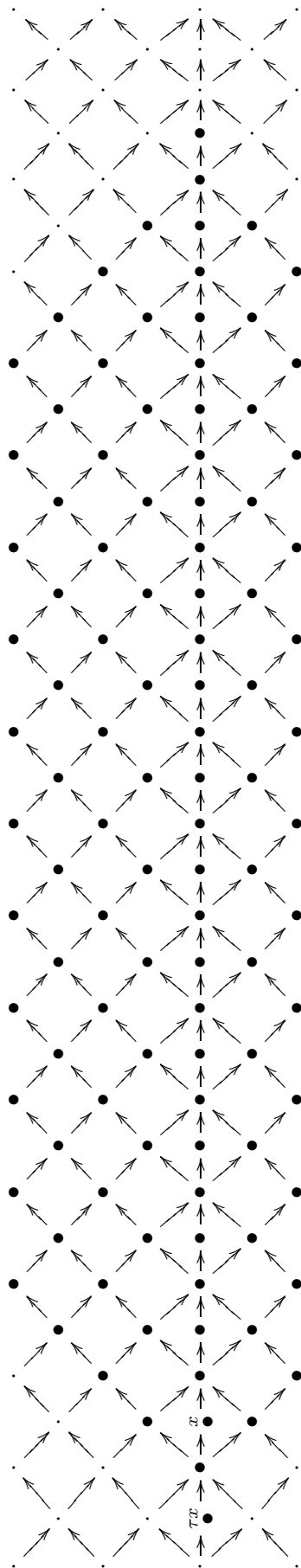


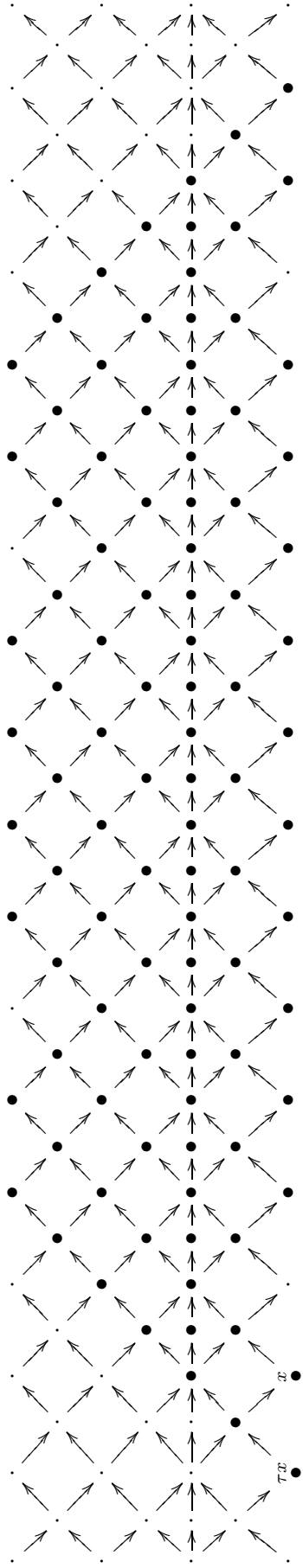






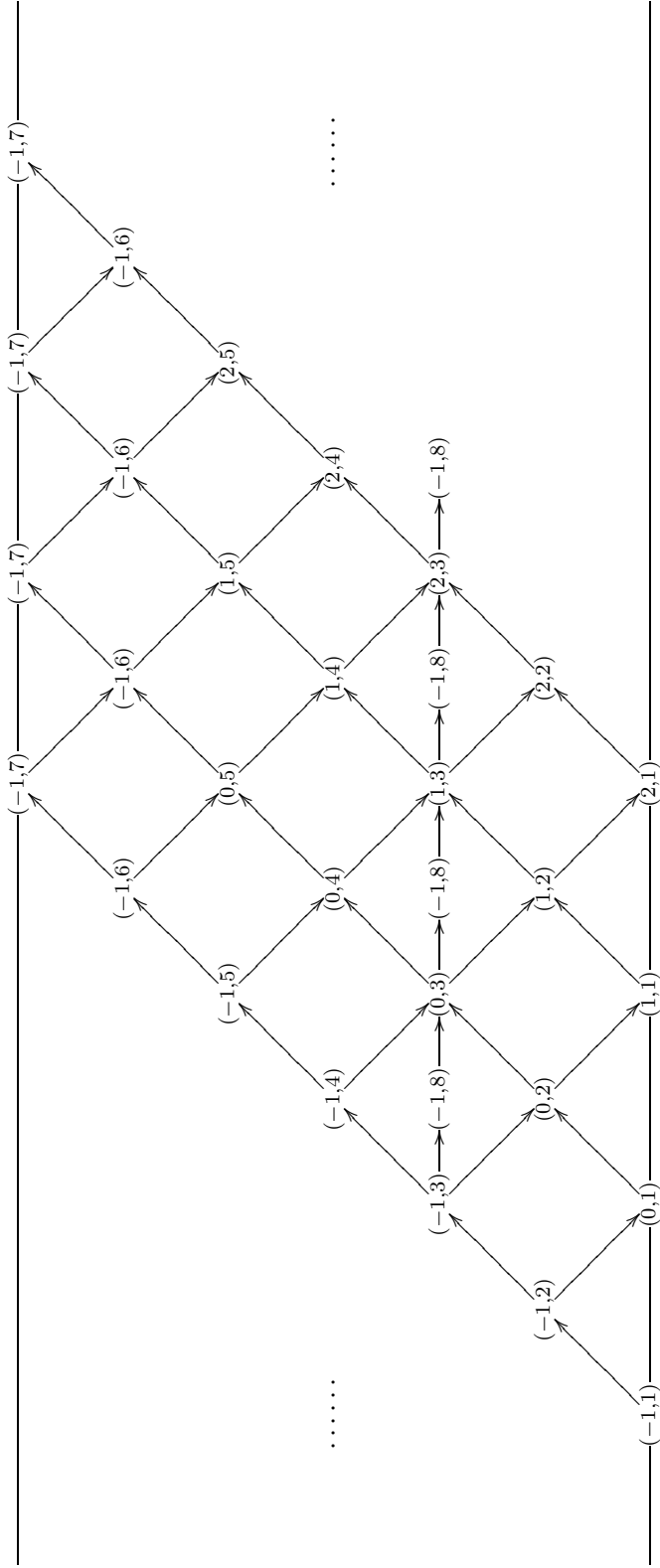
最初に $n = 2$ のときを考える. 上で示した図より, (C2) をみたく $\{\tau x, x\}$ に対する $\text{Hz}_{E_8}(\tau x) \cup \text{Hz}_{E_8}(x)$ は, 以下で与えられる.





補題 4.36 と同様の議論によって, 次の補題を示すことができる.

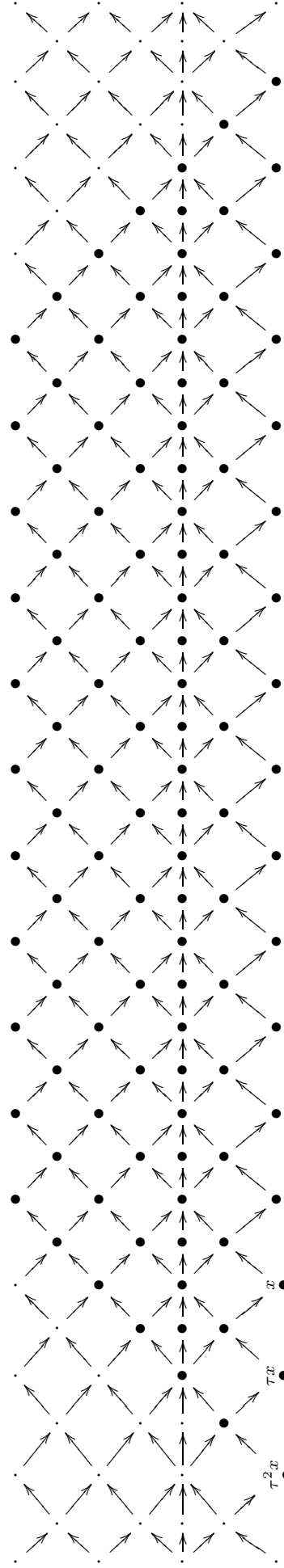
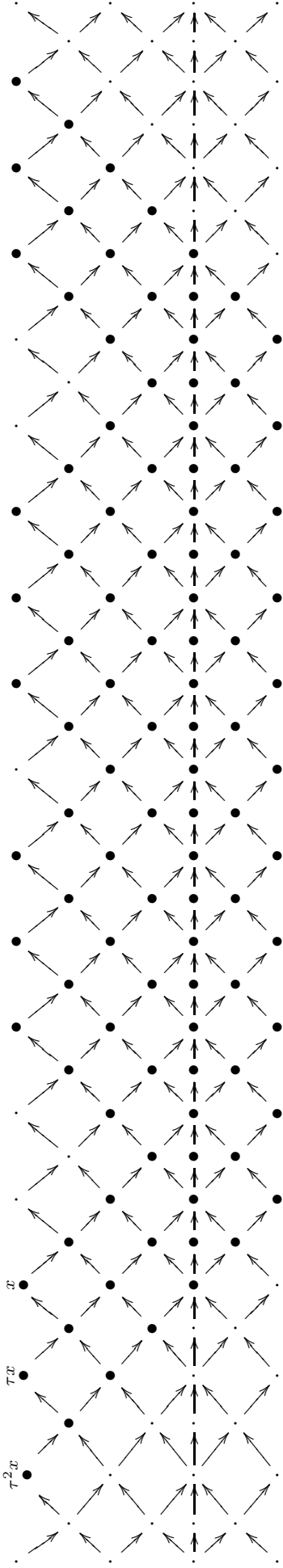
補題 4.40. $\mathbb{Z}E_8$ に次のように座標をいれる.



(T_2) をみたく $\mathbb{Z}E_8$ の配置は次に示す配置のみである. 任意の $i \in \mathbb{Z}$ に対して

$$\{(i+l, 8), (i+1+l, 8), (i+12+l, 7), (i+13+l, 7), (i+14+l, 7), (i+15+l, 7), (i+16+l, 1), (i+17+l, 1) \mid l \in 29\mathbb{Z}\}.$$

次に $n = 3$ のときを考える. (C2) をみたす $\{\tau^2 x, \tau x, x\}$ に対する $\mathbb{H}_{\mathbb{Z}E_8}(\tau^2 x) \cup \mathbb{H}_{\mathbb{Z}E_8}(\tau x) \cup \mathbb{H}_{\mathbb{Z}E_8}(x)$ は, 以下で与えられる.



$\mathbb{Z}E_6$ の場合と同様の議論によって, (T_3) をみたす $\mathbb{Z}E_8$ の配置は存在しない.

次に $n = 4, 5$ のとき, (C2) をみたす $\{\tau^{n-1} x, \dots, \tau x, x\}$ は一通りしかなく, $\mathbb{Z}E_7$ の $n = 4$ のときと同様に, $(T_4), (T_5)$ をみたす $\mathbb{Z}E_8$ の配置は存在しないことがわかる.

最後に, $n \geq 6$ のとき, (C2) をみたす $\{\tau^{n-1} x, \dots, \tau x, x\}$ は存在しない. 以上より各 $n \geq 2$ について, (T_n) をみたす $\mathbb{Z}E_6$ の配置が決定された.

補題 4.41. (T_2) をみたす $\mathbb{Z}E_8$ の配置は, 補題 4.40 の一通りである. $n \geq 3$ については, (T_n) をみたす $\mathbb{Z}E_8$ の配置は存在しない.

以上の計算結果をまとめて, 次の表を得る.

	2	3	4	5
A_k	2種 (どちらの場合も $\overline{P}(n)$ は中山多元環)				
D_k	無し				
E_6	1種	無し			
E_7	無し				
E_8	1種	無し			

従って次の定理を得る.

定理 4.42. $\overline{P}(3)$ が有限表現型であるならば, $\overline{P}(3)$ は中山多元環である. 従って R は中山多元環である.

[証明] $\overline{P}(3)$ が有限表現型であるならば, 上の表より $\overline{P}(3)$ は中山多元環でなければならない. これよりまた, $R(3, \dots, 3)$ も中山多元環である. $eR(3, \dots, 3)e = R$ なる $R(3, \dots, 3)$ の幂等元 e がある. 従って R も中山多元環である. \square

定理 4.42 より, R の任意のブロック拡大が有限表現型ならば R は中山多元環である. 以上より定理 4.2 が示された. \square

5 原田多元環上の傾加群の分類

この章では原田多元環上の基本的傾加群を全て求めることを目的とする。始めにこの章の主定理であり、新しい結果である定理 5.1 を述べる。

以下では R を $\text{Pi}(R)$ が次のように並べられる基本的な原田多元環とする。

$$\text{Pi}(R) = \{e_{ij}\}_{i=1, j=1}^{m, n_i}$$

(a) $e_{i1}R$ は右移入 R -加群である。 ($1 \leq i \leq m$)

(b) $e_{i,j+1}R \simeq J(e_{ij}R)$ である。 ($1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n_i - 1$)

(b) の条件より $e_{i,k+l}R \simeq J^l(e_{ik}R)$ ($1 \leq i \leq m, 1 \leq k \leq n_i, 0 \leq l \leq n_i - k$) であることを注意しておく。

この章の主定理を述べる。特別な有限生成 R -加群を次のように記号で表すことにする。

$$\begin{aligned} P_{ij} &:= e_{ij}R \quad (1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n_i) \\ X_{ik}^l &:= P_{ik}/J^{l-k}(P_{ik}) \simeq J^{k-1}(P_{i1})/J^{l-1}(P_{i1}) \quad (1 \leq i \leq m, 1 \leq k < l \leq n_i) \end{aligned}$$

各 X_{ik}^l は互いに非同型な組成因子をもつ長さ $l - k + 1$ の単列加群であることを注意しておく。これらは R 上射影次元 1 の加群全体であることが示される (系 5.10)。

各 $1 \leq i \leq m$ について、 $\text{mod}R$ の加法的充満部分圏 \mathcal{P}_i を

$$\mathcal{P}_i = \text{add}\{P_{ij}, X_{ik}^l \mid 1 \leq j \leq n_i, 1 \leq k < l \leq n_i\}$$

と定める。

次に

$$T_{ij} := P_{ij}/J^{n_i-j+1}(P_{ij}) \simeq J^{j-1}(P_{i1})/J^{n_i}(P_{i1}) \quad (1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n_i)$$

とし、

$$T_i := T_{i1} \oplus \cdots \oplus T_{in_i} \quad (1 \leq i \leq m)$$

とする。そして $S_i := \text{End}_R(T_i)$ とする。各 T_{ij} は互いに非同型な組成因子をもつ単列加群である。また $S_i \simeq T_{n_i}(K)$ である。

$\text{mod}R$ の加法充満部分圏 \mathcal{C}_i を

$$\mathcal{C}_i = \text{add}\{T_{ij}, X_{ik}^l \mid 1 \leq j \leq n_i, 1 \leq k < l \leq n_i\}.$$

と定める。つまり T_{i1} の subfactor 全体を直既約加群とする $\text{mod}R$ の加法充満部分圏を考えるのである。

以上で定めた記号をもって主定理を述べる。命題 5.17 で関手

$$\text{Hom}_R(T_i, -) : \mathcal{C}_i \longrightarrow \text{mod}S_i$$

が圏同値を与えることが示される。従って有限生成直既約 S_i -加群は $\text{Hom}_R(T_i, T_{ij})$ もしくは $\text{Hom}_R(T_i, X_{ik}^l)$ と同型である。そこで加群の対応

$$F_i : \text{mod}S_i \longrightarrow \mathcal{P}_i$$

を直既約加群の対応

$$F_i(\text{Hom}_R(T_i, T_{ij})) := P_{ij} \quad (1 \leq j \leq n_i)$$

$$F_i(\text{Hom}_R(T_i, X_{ik}^l)) := X_{ik}^l \quad (1 \leq k < l \leq n_i)$$

を加法的に拡張して得られる対応とする. 同型を除けば F_i は全単射であることを注意しておく. そして対応

$$F : \text{mod}S_1 \times \cdots \times \text{mod}S_m \longrightarrow \text{mod}R$$

を

$$F(M_1, \dots, M_m) := \bigoplus_{i=1}^m F_i(M_i)$$

によって定義する. このとき次の定理が成り立つ.

定理 5.1. F により次の対応が得られる.

$$\Pi : \text{tilt}(S_1) \times \cdots \times \text{tilt}(S_m) \xrightarrow{1-1} \text{tilt}(R).$$

これが主定理である. 以下ではこの主定理を証明して, R の基本的傾加群を記述する.

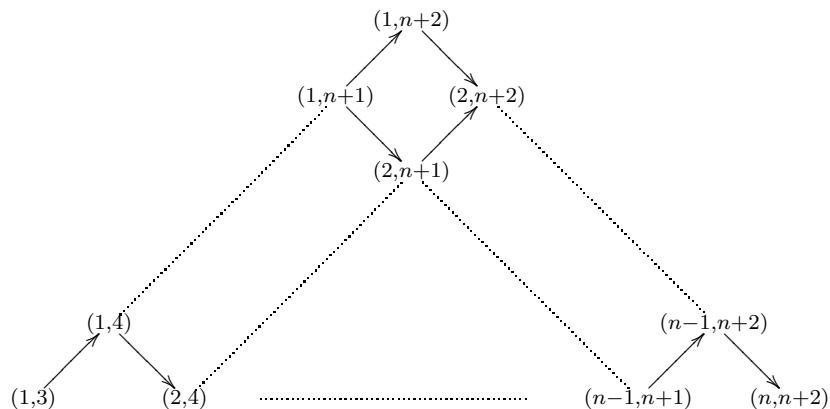
まず 1 節で体上の上半三角行列環の基本的傾加群の分類を述べる. 2 節で原田多元環上の直既約射影加群の間の準同型の性質を調べる. この性質は原田多元環の定義より直ちに導き出される, 非常に重要な性質である. 3 節で 2 節で述べる性質を用いて, 傾加群よりも一般に, 原田多元環上の射影次元 1 以下の加群を分類する. そしてそのような加群の中で (T2), (T3') をみたす組合せを, 体上の上半三角行列環を用いて記述することによって原田多元環上の基本的傾加群を全て求める.

5.1 体上の上半三角行列環上の傾加群の分類

特別な原田多元環である, 体上の n 次上半三角行列環 $T_n(K)$ 上の基本的な傾加群はすでに分類されている. この節では $T_n(K)$ 上の基本的傾加群の分類とその例を述べる.

最初に $T_n(K)$ の AR-クイバーの形を述べる.

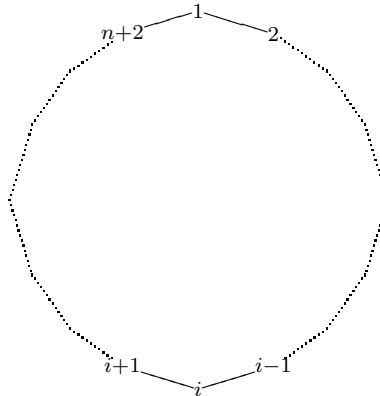
命題 5.2. $T_n(K)$ の AR-クイバーは次で与えられる.



ここで頂点 (i, j) には次の有限生成直既約 $T_n(K)$ -加群の同型類が対応する.

$$M_{ij} = (0 \dots 0 \overset{j-2}{K} \dots \overset{i}{K} \dots \overset{j-2}{K} \dots \overset{i}{K} \dots 0) / (0 \dots 0 \overset{j-2}{K} \dots \overset{i}{K} \dots \overset{j-2}{K} \dots \overset{i}{K} \dots 0).$$

さて, 命題 5.2 の記号を用いて, $T_n(K)$ 上の基本的傾加群の分類を与える. $n+2$ 角形を考え, その頂点に以下のように番号を付ける.



$i < j$ に対して, i と j を結ぶ線分を (i, j) で表わす. 対応

$$\{n+2 \text{ 角形の三角形分割}\} \longleftrightarrow \text{tilt}(T_n(K))$$

を次のように作る. $n+2$ 角形を三角形に分割することは, $n+2$ 角形に互いに交わらない $n-1$ 本の対角線を引くことである. そこで $n+2$ 角形の三角形分割を与える対角線

$$(i_1, j_1), (i_2, j_2), \dots, (i_{n-1}, j_{n-1})$$

に対して, 有限生成 $T_n(K)$ -加群

$$M_{1, n+2} \oplus \left(\bigoplus_{k=1}^{n-1} M_{i_k, j_k} \right)$$

を対応させる. これは基本的傾加群になることが示せる.

逆に基本的傾加群 T に対して T の直既約分解が

$$T \simeq M_{1, n+2} \oplus \left(\bigoplus_{k=1}^{n-1} M_{i_k, j_k} \right)$$

であるとき, $n+2$ 角形の対角線

$$(i_1, j_1), (i_2, j_2), \dots, (i_{n-1}, j_{n-1})$$

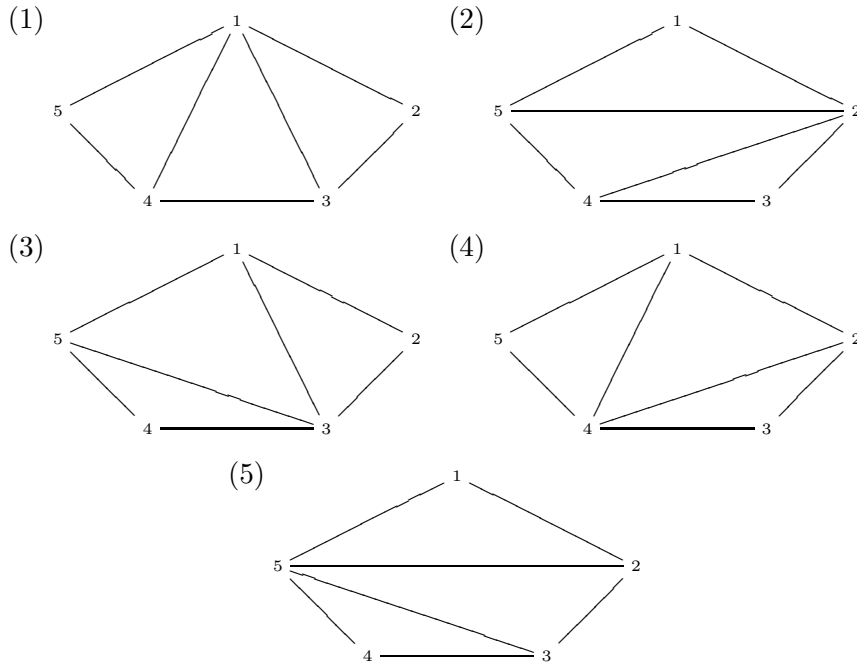
から作られる $n+2$ 角形の三角形分割を対応させる. こうして構成した対応について次の定理が成り立つ.

定理 5.3. 上で構成した対応

$$\{n+2 \text{ 角形の三角形分割}\} \longleftrightarrow \text{tilt}(T_n(K))$$

は一対一対応である.

例 5.4. $T_3(K)$ 上の傾加群を全て求める. 5 角形の三角形分割は以下に示すものが全てである.



従って $T_3(K)$ 上の基本的傾加群は 5 種類で, (1) から (5) には以下の基本的傾加群の同型類が対応する.

- (1) $(K K K) \oplus (0 K K) \oplus (0 0 K),$
- (2) $(K K K) \oplus (K K 0) \oplus (0 K 0),$
- (3) $(K K K) \oplus (K 0 0) \oplus (0 0 K),$
- (4) $(K K K) \oplus (0 K K) \oplus (0 K 0),$
- (5) $(K K K) \oplus (K K 0) \oplus (K 0 0).$

5.2 原田多元環上の直既約射影加群の間の準同型

ここでは原田多元環の構造を用いて, 傾加群を計算する際に鍵となる直既約射影加群の間の準同型について調べる. 最初に述べたとおり以下で調べることは, R の基本的傾加群を計算する際に重要になる性質である.

補題 5.5. 有限生成直既約射影 R -加群から有限生成直既約射影 R -加群への準同型に関して以下が成り立つ.

- (1) 準同型 $f : P_{ij} \rightarrow P_{il}$ ($j \geq l$) について, f が単射である必要十分条件は $\text{Im } f = J^{j-l}(P_{il})$ である.
- (2) 準同型 $f : P_{ij} \rightarrow P_{kl}$ について, f が単射でない必要十分条件は $\text{Im } f \subset J^{n_k-l+1}(P_{kl})$ である.
- (3) 任意の準同型 $f : P_{ij} \rightarrow P_{il}$ ($j < l$) について, $\text{Im } f \subset J^{n_i-l+1}(P_{il})$ である.
- (4) 任意の準同型 $f : P_{ij} \rightarrow P_{kl}$ ($i \neq k$) について, $\text{Im } f \subset J^{n_k-l+1}(P_{kl})$ である.

[証明] (1) P_{ij} と長さ等しい P_{il} の部分加群は $J^{j-l}(P_{il})$ のみであることからわかる.

(2) $\text{Im } f \not\subset J^{n_k-l+1}(P_{kl})$ とする. このとき次をみたす r が存在する.

$$\text{Im } f = J^r(P_{kl}) \simeq P_{k,r+l} \quad (0 \leq r \leq n_k - l).$$

従って f は射影加群への全射と見れるから, 単射である. 逆に f が単射であるとする. P_{ij} と P_{kl} の単純底が同型でなければならないから $i = k$ である. また加群の長さから $j \leq l$ でなければならない, よって (1) より $\text{Im } f \not\subset J^{n_k-l+1}(P_{kl})$ である.

(3) 加群の長さから P_{ij} から P_{il} への単射準同型は存在しない. (2) より従う.

(4) $i \neq k$ より P_{ij} と P_{kl} の単純底は同型でない. よって P_{ij} から P_{kl} への単射準同型は存在しない. (2) より従う. □

補題 5.6. $f : P_{ij} \rightarrow P_{il}$ ($j \geq l$) を単射準同型とする. このとき以下が成り立つ.

- (1) 任意の単射準同型 $g : P_{ij} \rightarrow P_{il'}$ ($l \geq l'$) に対して, $g = hf$ をみたす準同型 $h : P_{il} \rightarrow P_{il'}$ が存在する.
- (2) 任意の単射でない準同型 $g : P_{ij} \rightarrow P_{st}$ に対して, $g = hf$ をみたす準同型 $h : P_{il} \rightarrow P_{st}$ が存在する.
- (3) 任意の単射準同型 $g : P_{il'} \rightarrow P_{il}$ ($l' \geq j$) に対して, $g = fh$ をみたす準同型 $h : P_{il'} \rightarrow P_{ij}$ が存在する.
- (4) 任意の単射でない準同型 $g : P_{st} \rightarrow P_{il}$ に対して, $g = fh$ をみたす準同型 $h : P_{st} \rightarrow P_{ij}$ が存在する.

[証明] (1) $P_{il'} \subset P_{i1}$ とみて $u : P_{il'} \rightarrow P_{i1}$ を包含写像とする. P_{i1} が移入加群より, $ug = hf$ となる $h : P_{il} \rightarrow P_{i1}$ が存在する.

$$\begin{array}{ccccc}
 0 & \longrightarrow & P_{ij} & \xrightarrow{f} & P_{il} \\
 & & \downarrow g & & \nearrow h \\
 & & P_{il'} & & \\
 & & \downarrow u & & \\
 & & P_{i1} & &
 \end{array}$$

補題 5.5 (1) より

$$\text{Im } h \supset \text{Im } ug = J^{j-1}(P_{i1})$$

である。従って $l \geq l'$ より $\text{Im } h = J^{l-1}(P_{il}) \subset J^{l'-1}(P_{il}) = P_{il'}$ であるから、改めて $h : P_{il} \rightarrow P_{il'}$ とすればよい。

(2) $P_{st} \subset P_{s1}$ とみて $u : P_{st} \rightarrow P_{s1}$ を包含写像とする。 P_{s1} が移入加群より、 $ug = hf$ となる $h : P_{il} \rightarrow P_{s1}$ が存在する。

$$\begin{array}{ccccc}
 0 & \longrightarrow & P_{ij} & \xrightarrow{f} & P_{il} \\
 & & \downarrow g & & \swarrow h \\
 & & P_{st} & & \\
 & & \downarrow u & & \\
 & & P_{s1} & &
 \end{array}$$

もし h が単射ならば $ug = hf$ は単射であり、 g が単射となる。これは矛盾である。従って h は単射でないから、補題 5.5 (2) より

$$\text{Im } h \subset J^{n_s}(P_{s1}) \subset J^{t-1}(P_{s1}) = P_{st}$$

である。改めて $h : P_{il} \rightarrow P_{st}$ とすればよい。

(3) 補題 5.5 (1) より $\text{Im } f = J^{j-l}(P_{il})$, $\text{Im } g = J^{l'-l}(P_{il})$ である。 $l' - l \geq j - l$ であるから、 $\text{Im } f \supset \text{Im } g$ である。 $P_{il'}$ が射影加群であるから $g = fh$ をみたす準同型 $h : P_{il'} \rightarrow P_{ij}$ が存在する。

$$\begin{array}{ccccc}
 & & P_{il'} & & \\
 & & \downarrow g & & \\
 & & J^{j-l}(P_{il}) & \longrightarrow & 0 \\
 & \nearrow h & \uparrow f & & \\
 P_{ij} & \longrightarrow & & &
 \end{array}$$

(4) 補題 5.5 (1)(2) より $\text{Im } g \subset J^{n_i-l+1}(P_{il}) \subset J^{j-l}(P_{il}) = \text{Im } f$ である。後は (3) と同様に示せる。 \square

補題 5.7. $1 \leq j \leq n_i, 1 \leq k < l \leq n_i$ とする。次が成り立つ。

- (1) $l \leq j$ または $j < k$ のとき、 $\text{Hom}_R(P_{ij}, X_{ik}^l) = 0$ である。
- (2) $k \leq j < l$ のとき、 $\text{Hom}_R(P_{ij}, X_{ik}^l) \neq 0$ である。さらにこのとき任意の準同型 $f : P_{ij} \rightarrow X_{ik}^l$ について、 $\text{Ker } f \supset J^{n_i-j+1}(P_{ij})$ である。

[証明] (1) $l \leq j$ または $j < k$ のとき、 X_{ik}^l は $P_{ij}/J(P_{ij})$ を組成因子にもたない。従って $\text{Hom}_R(P_{ij}, X_{ik}^l) = 0$ である。

(2) $k \leq j < l$ のとき、同型 $P_{ij} \xrightarrow{\sim} J^{j-k}(P_{ik})$ と全射 $P_{ik} \rightarrow X_{ik}^l$ の合成は零ではない。従って $\text{Hom}_R(P_{ij}, X_{ik}^l) \neq 0$ である。零でない準同型 $f : P_{ij} \rightarrow X_{ik}^l$ をとる。 $P_{ij}/J(P_{ij})$ を top にもつ X_{ik}^l の部分加群は X_{ij}^l と同型なものしかない。このことから $\text{Ker } f = J^{l-j}(P_{ij}) \supset J^{n_i-j+1}(P_{ij})$ である。 \square

この節の最後に T_{ij} の間の写像を調べ、 S_i が体上の上半三角行列環に同型であることを示す。

補題 5.8. 各 i に対して以下が成り立つ.

- (1) $j < k$ ならば $\text{Hom}_R(T_{ij}, T_{ik}) = 0$ である.
- (2) $j \geq k$ ならば $\text{Hom}_R(T_{ij}, T_{ik}) \simeq K$ であり, T_{ij} から T_{ik} への零でない準同型は単射である.
- (3) $S_i \simeq T_{n_i}(K)$.

[証明] (1) $j < k$ ならば T_{ik} の組成因子には単純 R -加群 $T_{ij}/J(T_{ij})$ が現れない. 従って $\text{Hom}_R(T_{ij}, T_{ik}) = 0$ である.

(2) $j \geq k$ とする. このとき T_{ij}, T_{ik} の構成より $T_{ij} \simeq J^{j-k}(T_{ik})$ である. よって単射 $T_{ij} \rightarrow T_{ik}$ が存在する. $f : T_{ij} \rightarrow T_{ik}$ を零でない準同型とする. T_{ik} は互いに非同型な組成因子をもつ単列加群であるから, $\text{Im } f = J^{j-k}(T_{ik})$ でなくてはならない. さらに $\text{length}(T_{ij}) = \text{length}(J^{j-k}(T_{ik}))$ であるから, f は単射でなくてはならない. 以上より (2) が従う.

(3) (2) よりベクトル空間として

$$S_i \simeq \begin{pmatrix} \text{Hom}_R(T_{i1}, T_{i1}) & \text{Hom}_R(T_{i2}, T_{i1}) & \cdots & \text{Hom}_R(T_{in_i}, T_{i1}) \\ \text{Hom}_R(T_{i1}, T_{i2}) & \text{Hom}_R(T_{i2}, T_{i2}) & \cdots & \text{Hom}_R(T_{in_i}, T_{i2}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{Hom}_R(T_{i1}, T_{in_i}) & \text{Hom}_R(T_{i2}, T_{in_i}) & \cdots & \text{Hom}_R(T_{in_i}, T_{in_i}) \end{pmatrix} \\ \simeq \begin{pmatrix} K & K & \cdots & K \\ & K & \cdots & K \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & K \end{pmatrix} = T_{n_i}(K)$$

であり, さらに行列の積も対応していることが容易にわかるので環同型 $S_i \simeq T_{n_i}(K)$ を得る. □

5.3 原田多元環上の傾加群

この節では $\text{tilt}(R)$ の記述を与え, R 上の基本的傾加群を全て求める. まず R 上射影次元 1 以下の有限生成直既約 R -加群を分類し, 次にそれらの間の Ext_R^1 を計算する. 最後に R 上射影次元 1 以下の有限生成直既約 R -加群の中で, (T2), (T3') をみたま組合わせを記述する.

まず最初に (T1) について調べる. 前節で調べた直既約射影 R -加群の間の準同型の性質を用いて, R 上射影次元 1 の加群を全て求めるのである.

命題 5.9. Q, Q' を射影 R -加群とし, $f: Q \rightarrow Q'$ を単射準同型とする. このとき

$$\psi f \varphi^{-1} = \begin{pmatrix} f_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & f_k \\ & 0 & \\ & \vdots & \\ & 0 & \end{pmatrix} : Q = Q_1 \oplus \cdots \oplus Q_k \rightarrow Q'_1 \oplus \cdots \oplus Q'_l = Q'$$

となる Q, Q' の直既約分解 $Q = Q_1 \oplus \cdots \oplus Q_k, Q' = Q'_1 \oplus \cdots \oplus Q'_l$ 及び $\varphi \in \text{Aut}_R(Q), \psi \in \text{Aut}_R(Q')$ が存在する.

[証明] k に関する帰納法で示す. まず $k = 1$ のとき, すなわち Q が直既約射影 R -加群のときを考える.

$$f: Q \xrightarrow{\begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_l \end{pmatrix}} Q', \quad f_i: Q \rightarrow Q_i \quad (1 \leq i \leq l)$$

とする. $S(Q)$ は単純であるから, f_1, \dots, f_l の中に必ず一つは単射が含まれる. f_1, \dots, f_l の番号を次のように付け換える.

f_1, \dots, f_r は単射, f_{r+1}, \dots, f_l は単射でない.

今 f_1, \dots, f_r の中で $\text{length}(Q'_i)$ が最も小さい f_i が f_1 であるとしてよい. すると補題 5.6 (1) より $2 \leq j \leq r$ に対して, $f_j = h_j f_1$ となる $h_j: Q'_1 \rightarrow Q'_j$ が存在する. また補題 5.6 (2) より $r+1 \leq j \leq l$ に対して, $f_j = h_j f_1$ となる $h_j: Q'_1 \rightarrow Q'_j$ が存在する. 従って $\varphi = 1$,

$$\psi = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -h_2 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ -h_l & 0 & & 1 \end{array} \right)$$

とおくと,

$$\psi f \varphi^{-1} = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -h_2 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ -h_l & 0 & & 1 \end{array} \right) \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

となり, 主張が成立する.

次に $k \geq 2$ とし, $k-1$ で主張が成立しているとする. Q_1, \dots, Q_k の番号を付け換えて

$$\text{length}(Q_k) \leq \text{length}(Q_i) \quad (1 \leq i \leq k-1)$$

であるようにしておく. 帰納法の仮定を $f|_{Q_1 \oplus \cdots \oplus Q_{k-1}}$ に適用すると

$$f|_{Q_1 \oplus \cdots \oplus Q_{k-1}} : Q_1 \oplus \cdots \oplus Q_{k-1} \xrightarrow{\begin{pmatrix} f_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & f_{k-1} \\ \hline & & 0 \\ & & \vdots \\ & & 0 \end{pmatrix}} Q',$$

$$f_i : Q_i \longrightarrow Q'_i \quad (1 \leq i \leq k-1)$$

と表せる. 従って f は次のように表せる.

$$f : Q \xrightarrow{\begin{pmatrix} f_1 & & 0 & | & g_1 \\ & \ddots & & | & \vdots \\ 0 & & f_{k-1} & | & g_{k-1} \\ \hline 0 & \cdots & 0 & | & g_k \\ \vdots & & \vdots & | & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & | & g_l \end{pmatrix}} Q',$$

$$g_i : Q_k \longrightarrow Q'_i \quad (1 \leq i \leq l).$$

ここで補題 5.6 (3)(4) と Q_k のとり方より, 各 $1 \leq i \leq k-1$ に対して $g_i = f_i h_i$ なる $h_i : Q_k \longrightarrow Q_i$ が存在する. 従って $\psi = 1$,

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & & 0 & | & h_1 \\ & \ddots & & | & \vdots \\ 0 & & 1 & | & h_{k-1} \\ \hline 0 & & & | & 1 \end{pmatrix}$$

とおくと,

$$\begin{pmatrix} f_1 & & 0 & | & 0 \\ & \ddots & & | & \\ 0 & & f_{k-1} & | & \\ \hline 0 & \cdots & 0 & | & g_k \\ \vdots & & \vdots & | & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & | & g_l \end{pmatrix} \varphi = \begin{pmatrix} f_1 & & 0 & | & g_1 \\ & \ddots & & | & \vdots \\ 0 & & f_{k-1} & | & g_{k-1} \\ \hline 0 & \cdots & 0 & | & g_k \\ \vdots & & \vdots & | & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & | & g_l \end{pmatrix} = \psi f$$

となる.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} f_1 & & 0 & \\ & \ddots & & 0 \\ & & f_{k-1} & \\ \hline 0 & \cdots & 0 & g_k \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & g_l \end{array} \right)$$

の g_k, \dots, g_l を $k = 1$ のときと同じようにして掃き出せば目的の行列表示を得る. \square

定理 5.10. R 上射影次元 1 の直既約加群の同型類は以下で与えられる.

$$\{X_{ik}^l \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq k < l \leq n_i\}.$$

[証明] X を射影次元 1 の直既約 R -加群とする. よってある射影 R -加群 Q, Q' が存在して

$$0 \longrightarrow Q \longrightarrow Q' \longrightarrow X \longrightarrow 0$$

なる完全列が存在する. 命題 5.9 と X が直既約より, Q, Q' も直既約でなければならない. 従って X は上に挙げた加群のどれかと同型である. またリストの直既約 R -加群が射影次元 1 であることは, X_{ik}^l の定義より明らか. \square

この結果により (T1) をみたく直既約 R -加群, すなわち R 上射影次元 1 以下の直既約加群の同型類は

$$\{P_{ij}, X_{ik}^l \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n_i, 1 \leq k < l \leq n_i\}$$

で与えられる. 従って R 上の傾加群はこれらの加群の中で (T2), (T3') をみたく組合わせの直和で出来ている.

最初に各 $1 \leq i \leq m$ について, $\text{mod} R$ の加法的充満部分圏 \mathcal{P}_i を

$$\mathcal{P}_i = \text{add}\{P_{ij}, X_{ik}^l \mid 1 \leq j \leq n_i, 1 \leq k < l \leq n_i\}$$

と定めた. 次に調べるのはこれらの間の Ext_R^1 である.

まず $i \neq s$ のときの $\text{Ext}_R^1(\mathcal{P}_i, \mathcal{P}_s)$ を計算する.

命題 5.11. $\text{Ext}_R^1(\mathcal{P}_i, \mathcal{P}_s) = 0$ ($i \neq s$).

[証明] (1) $\text{Ext}_R^1(P_{ij}, \mathcal{P}_s) = 0$ ($1 \leq j \leq n_i$) は自明である.

(2) $\text{Ext}_R^1(X_{ik}^l, P_{st}) = 0$ ($1 \leq k < l \leq n_i, 1 \leq t \leq n_s$) であることを示す. X_{ik}^l の射影分解

$$0 \longrightarrow P_{il} \xrightarrow{f} P_{ik} \longrightarrow X_{ik}^l \longrightarrow 0$$

に $\text{Hom}_R(-, P_{st})$ を施して次の完全列を得る.

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_R(X_{ik}^l, P_{st}) \longrightarrow \text{Hom}_R(P_{ik}, P_{st}) \xrightarrow{\text{Hom}(f, P_{st})} \text{Hom}_R(P_{il}, P_{st}) \longrightarrow \text{Ext}_R^1(X_{ik}^l, P_{st}) \longrightarrow 0$$

今 $i \neq s$ の仮定より P_{il} から P_{st} への単射は存在しない. このことと補題 5.6 (2) より $\text{Hom}(f, P_{st})$ は全射である. 従って $\text{Ext}_R^1(X_{ik}^l, P_{st}) = 0$ である.

(3) $\text{Ext}_R^1(X_{ik}^l, X_{su}^v) = 0$ ($1 \leq k < l \leq n_i, 1 \leq u < v \leq n_s$) であることを示す. X_{ik}^l の射影分解

$$0 \longrightarrow P_{il} \longrightarrow P_{ik} \longrightarrow X_{ik}^l \longrightarrow 0$$

に $\text{Hom}_R(-, X_{su}^v)$ を施して次の完全列を得る.

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_R(X_{ik}^l, X_{su}^v) \longrightarrow \text{Hom}_R(P_{ik}, X_{su}^v) \longrightarrow \text{Hom}_R(P_{il}, X_{su}^v) \longrightarrow \text{Ext}_R^1(X_{ik}^l, X_{su}^v) \longrightarrow 0$$

今 $i \neq s$ の仮定より X_{su}^v は $P_{il}/J(P_{il})$ を組成因子にもたない. このことから $\text{Hom}_R(P_{il}, X_{su}^v) = 0$ である. 従って $\text{Ext}_R^1(X_{ik}^l, X_{su}^v) = 0$ である. \square

次に $1 \leq i \leq m$ を固定して P_i の中の Ext_R^1 を計算する. まず次の補題を示した後, それを使って補題 5.13 を証明する.

補題 5.12. $\text{Hom}_R(P_{ij}, X_{ik}^l) \simeq \text{Hom}_R(T_{ij}, X_{ik}^l)$ ($1 \leq j \leq n_i, 1 \leq k < l \leq n_i$).

[証明] K -線形写像

$$\Phi : \text{Hom}_R(P_{ij}, X_{ik}^l) \longrightarrow \text{Hom}_R(T_{ij}, X_{ik}^l)$$

を定める. $\varphi : P_{ij} \longrightarrow T_{ij}$ を全射とする. 任意の $f \in \text{Hom}_R(P_{ij}, X_{ik}^l)$ に対して補題 5.7 より $\text{Ker } \varphi = J^{n_i-j+1}(P_{ij}) \subset \text{Ker } f$ である. これより $f = g\varphi$ なる $g \in \text{Hom}_R(T_{ij}, X_{ik}^l)$ が存在する. これをもって

$$\Phi(f) = g$$

とする.

φ が全射より Φ は well-defined である.

また K -線形写像 Ψ を

$$\Psi : \text{Hom}_R(T_{ij}, X_{ik}^l) \ni f \longmapsto f\varphi \in \text{Hom}_R(P_{ij}, X_{ik}^l)$$

と定める. $\Psi\Phi = 1, \Phi\Psi = 1$ であるから, Φ と Ψ は互いを逆とする同型写像である.

最後に $\Psi = \text{Hom}_R(\varphi, X_{ik}^l)$ であることを注意しておく. \square

補題 5.13. 完全列

$$0 \longrightarrow T_{il} \xrightarrow{\varphi} T_{ik} \longrightarrow X_{ik}^l \longrightarrow 0 \quad (1 \leq k < l \leq n_i)$$

に $\text{Hom}_R(-, X_{is}^t)$ ($1 \leq s < t \leq n_i$) を施して得られる完全列

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_R(X_{ik}^l, X_{is}^t) \longrightarrow \text{Hom}_R(T_{ik}, X_{is}^t) \xrightarrow{\text{Hom}(\varphi, X_{is}^t)} \text{Hom}_R(T_{il}, X_{is}^t) \longrightarrow \text{Coker Hom}(\varphi, X_{is}^t) \longrightarrow 0$$

を考える. このとき

$$\text{Coker Hom}(\varphi, X_{is}^t) \simeq \text{Ext}_R^1(X_{ik}^l, X_{is}^t)$$

である.

[証明] P_{ik} が射影加群であることから次の可換図式を得る.

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & P_{il} & \longrightarrow & P_{ik} & \longrightarrow & X_{ik}^l \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow g & & \downarrow f & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & T_{il} & \longrightarrow & T_{ik} & \longrightarrow & X_{ik}^l \longrightarrow 0 \end{array}$$

この図式に $\text{Hom}_R(-, X_{is}^t)$ を施して次の可換図式を得る.

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Hom}_R(T_{ik}, X_{is}^t) & \longrightarrow & \text{Hom}_R(T_{il}, X_{is}^t) & \longrightarrow & \text{Coker Hom}(\varphi, X_{is}^t) & \longrightarrow & 0 \\ \text{Hom}(f, X_{is}^t) \downarrow & & \text{Hom}(g, X_{is}^t) \downarrow & & \downarrow & & \\ \text{Hom}_R(P_{ik}, X_{is}^t) & \longrightarrow & \text{Hom}_R(P_{il}, X_{is}^t) & \longrightarrow & \text{Ext}_R^1(X_{ik}^l, X_{is}^t) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

補題 5.12 より $\text{Hom}(f, X_{is}^t)$ と $\text{Hom}(g, X_{is}^t)$ は同型であるから, 右端の写像も同型である.

□

補題 5.14. 完全列

$$0 \longrightarrow T_{il} \xrightarrow{\varphi} T_{ik} \longrightarrow X_{ik}^l \longrightarrow 0 \quad (1 \leq k < l \leq n_i)$$

に $\text{Hom}_R(-, T_{ij})$ ($1 \leq j \leq n_i$) を施して得られる完全列

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_R(X_{ik}^l, T_{ij}) \longrightarrow \text{Hom}_R(T_{ik}, T_{ij}) \xrightarrow{\text{Hom}_R(\varphi, T_{ij})} \text{Hom}_R(T_{il}, T_{ij}) \longrightarrow \text{Coker Hom}_R(\varphi, T_{ij}) \longrightarrow 0$$

を考える. このとき

$$\text{Coker Hom}_R(\varphi, T_{ij}) = 0 \iff j \leq k \text{ または } l < j \iff \text{Ext}_R^1(X_{ik}^l, P_{ij}) = 0$$

である.

[証明] 最初に $\text{Ext}_R^1(X_{ik}^l, P_{ij})$ が 0 であるときを調べる. 完全列

$$0 \longrightarrow P_{il} \xrightarrow{f} P_{ik} \longrightarrow X_{ik}^l \longrightarrow 0$$

に $\text{Hom}_R(-, P_{ij})$ を施して次の完全列を得る.

$$\text{Hom}_R(P_{ik}, P_{ij}) \xrightarrow{\text{Hom}(f, P_{ij})} \text{Hom}_R(P_{il}, P_{ij}) \longrightarrow \text{Ext}_R^1(X_{ik}^l, P_{ij}) \longrightarrow 0$$

ここで補題 5.5 と補題 5.6 によって次が言える.

$$\begin{aligned} \text{Ext}_R^1(X_{ik}^l, P_{ij}) = 0 & \iff \text{Hom}(f, P_{ij}) \text{ が全射} \\ & \iff j \leq k \text{ または } l < j. \end{aligned}$$

一方, 完全列

$$0 \longrightarrow T_{il} \xrightarrow{\varphi} T_{ik} \longrightarrow X_{ik}^l \longrightarrow 0$$

に $\text{Hom}_R(-, T_{ij})$ を施して次の完全列を得る.

$$\text{Hom}_R(T_{ik}, T_{ij}) \xrightarrow{\text{Hom}(\varphi, T_{ij})} \text{Hom}_R(T_{il}, T_{ij}) \longrightarrow \text{Coker Hom}_R(\varphi, T_{ij}) \longrightarrow 0$$

ここで組成因子を考えると容易に次が言える.

$$\begin{aligned} \text{Coker Hom}_R(\varphi, T_{ij}) = 0 &\iff \text{Hom}(\varphi, T_{ij}) \text{ が全射} \\ &\iff j \leq k \text{ または } l < j. \end{aligned}$$

従って $\text{Coker Hom}_R(\varphi, T_{ij}) = 0 \iff \text{Ext}_R^1(X_{ik}^l, P_{ij}) = 0$ を得る. \square

補題 5.13, 補題 5.14 は \mathcal{P}_i の直既約加群の間の Ext_R^1 がいつ 0 になるのかを, T_{i1}, \dots, T_{in_i} を用いて判定できるということである. これは最初に定めた $\text{mod}R$ の加法充満部分圏 \mathcal{C}_i の中で, \mathcal{P}_i の直既約加群の間の Ext_R^1 がいつ 0 になるのかが判定できるということである.

次に命題 5.17 で $\mathcal{C}_i \simeq \text{mod}S_i$ であることを示し, 補題 5.13, 補題 5.14 と合わせることで, \mathcal{P}_i と $\text{mod}S_i$ の間の Ext^1 の対応を作る. その前に二つの補題を用意する (補題 5.15 はよく知られた補題である).

補題 5.15. [4, VI Lemma3.1] $T \in \text{mod}R$ とし, $S = \text{End}_R(T)$ とおく. このとき次が成り立つ.

- (1) 任意の $T' \in \text{add}T$ と任意の $X \in \text{mod}R$ に対して, 次の写像は同型である.

$$\text{Hom}_R(T', X) \ni f \longmapsto \text{Hom}(T, f) \in \text{Hom}_S(\text{Hom}_R(T, T'), \text{Hom}_R(T, X))$$

- (2) 次の関手は圏同値を導く.

$$\text{Hom}_R(T, -) : \text{add}T \longrightarrow \text{proj}S$$

但し, $\text{proj}S$ は有限生成射影 S -加群のなす $\text{mod}S$ の充満部分圏とする.

補題 5.16.

- (1) 完全列

$$0 \longrightarrow T_{il} \longrightarrow T_{ik} \longrightarrow X_{ik}^l \longrightarrow 0$$

に $\text{Hom}_R(T_{ij}, -)$ を施して, 完全列

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_R(T_{ij}, T_{il}) \longrightarrow \text{Hom}_R(T_{ij}, T_{ik}) \longrightarrow \text{Hom}_R(T_{ij}, X_{ik}^l) \longrightarrow 0$$

が得られる.

- (2) 任意の $X \in \mathcal{C}_i$ に対して完全列

$$0 \longrightarrow T'' \longrightarrow T' \longrightarrow X \longrightarrow 0$$

で以下をみたすものが存在する.

- (a) $T', T'' \in \text{add}T_i$
 (b) $\text{Hom}_R(T_i, -)$ を施すと完全列

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_R(T_i, T'') \longrightarrow \text{Hom}_R(T_i, T') \longrightarrow \text{Hom}_R(T_i, X) \longrightarrow 0$$

を得る.

[証明] (2) は (1) より従う. 完全列

$$0 \longrightarrow T_{il} \longrightarrow T_{ik} \xrightarrow{g} X_{ik}^l \longrightarrow 0$$

に $\text{Hom}_R(T_{ij}, -)$ を施して, 完全列

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_R(T_{ij}, T_{il}) \longrightarrow \text{Hom}_R(T_{ij}, T_{ik}) \xrightarrow{\text{Hom}(T_{ij}, g)} \text{Hom}_R(T_{ij}, X_{ik}^l) \longrightarrow 0$$

が得られることを示せば十分である. つまり $\text{Hom}(T_{ij}, g)$ が全射であればよい. $u : P_{ij} \longrightarrow T_{ij}$ を自然な全射とする.

任意に $0 \neq f \in \text{Hom}_R(T_{ij}, X_{ik}^l)$ をとる. このとき $k \leq j < l$ でなければならないことに注意する (そうでなければ $\text{Hom}_R(T_{ij}, X_{ik}^l) = 0$ となる). P_{ij} が射影加群より, $fu = gh$ なる準同型 $h : P_{ij} \longrightarrow T_{ik}$ が存在する.

$$\begin{array}{ccc} & P_{ij} & \\ & \downarrow u & \\ & T_{ij} & \\ & \downarrow f & \\ T_{ik} & \xrightarrow{g} & X_{ik}^l \longrightarrow 0 \\ & \nearrow h & \end{array}$$

$\text{Ker}u = J^{n_i-j+1}(P_{ij}) = \text{Ker}h$ より, h は u を通過する. すなわち $h = vu$ なる $v : T_{ij} \longrightarrow T_{ik}$ が存在する. $fu = gh = gvu$ と u が全射であることから $f = gv = \text{Hom}(T_{ij}, g)(v)$ である. よって $\text{Hom}(T_{ij}, g)$ は全射である. \square

命題 5.17. 関手

$$\text{Hom}_R(T_i, -) : \mathcal{C}_i \longrightarrow \text{mod}S_i$$

は圏同値を与える. 従って $\mathcal{C}_i \simeq \text{mod}S_i$ である.

[証明] $\text{Hom}_R(T_i, -)$ が忠実かつ充満であることを示す. $X, Y \in \mathcal{C}_i$ とする.

$$0 \longrightarrow T'' \longrightarrow T' \longrightarrow X \longrightarrow 0 \quad (3)$$

を補題 5.16 の完全列とする. この完全列に $\text{Hom}_R(-, Y)$ を施して, 完全列

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_R(X, Y) \longrightarrow \text{Hom}_R(T', Y) \longrightarrow \text{Hom}_R(T'', Y)$$

を得る. 一方 (3) に $\text{Hom}_R(T_i, -)$ を施して, 完全列

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_R(T_i, T'') \longrightarrow \text{Hom}_R(T_i, T') \longrightarrow \text{Hom}_R(T_i, X) \longrightarrow 0$$

を得る. さらにこの完全列に $\text{Hom}_S(-, \text{Hom}_R(T_i, Y))$ を施して, 完全列

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \text{Hom}_S(\text{Hom}_R(T_i, X), \text{Hom}_R(T_i, Y)) &\longrightarrow \text{Hom}_S(\text{Hom}_R(T_i, T'), \text{Hom}_R(T_i, Y)) \\ &\longrightarrow \text{Hom}_S(\text{Hom}_R(T_i, T''), \text{Hom}_R(T_i, Y)) \end{aligned}$$

を得る. 以上より次の可換図式を得る.

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & \text{Hom}_R(X, Y) & \longrightarrow & \text{Hom}_R(T', Y) \\ & & \downarrow \text{Hom}(T_i, -) & & \downarrow \text{Hom}(T_i, -) \\ 0 & \longrightarrow & \text{Hom}_S(\text{Hom}_R(T_i, X), \text{Hom}_R(T_i, Y)) & \longrightarrow & \text{Hom}_S(\text{Hom}_R(T_i, T'), \text{Hom}_R(T_i, Y)) \\ & & & & \downarrow \text{Hom}(T_i, -) \\ & & & & \text{Hom}_R(T'', Y) \\ & & & & \downarrow \text{Hom}(T_i, -) \\ & & & & \text{Hom}_S(\text{Hom}_R(T_i, T''), \text{Hom}_R(T_i, Y)) \end{array}$$

補題 5.15 (1) より右の二つの $\text{Hom}(T_i, -)$ は同型である. よって左端の $\text{Hom}(T_i, -)$ も同型である. 従って $\text{Hom}_R(T_i, -)$ は忠実かつ充満である.

次に $\text{Hom}_R(T_i, -)$ が稠密であることを示す. M を射影的でない有限生成直既約 S_i -加群とする. 補題 5.15 (2) より M の射影分解

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_R(T_i, T_{il}) \xrightarrow{\text{Hom}(T_i, \varphi)} \text{Hom}_R(T_i, T_{ik}) \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

がとれる. ここで φ は T_{il} から T_{ik} への単射である. 従って完全列

$$0 \longrightarrow T_{il} \xrightarrow{\varphi} T_{ik} \longrightarrow T_{ik}/T_{il} \longrightarrow 0$$

を得る. この完全列に $\text{Hom}_R(T_i, -)$ を施して, 補題 5.16 より完全列

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_R(T_i, T_{il}) \xrightarrow{\text{Hom}(T_i, \varphi)} \text{Hom}_R(T_i, T_{ik}) \longrightarrow \text{Hom}_R(T_i, T_{ik}/T_{il}) \longrightarrow 0$$

を得る. 以上より次の可換図式を得る.

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \text{Hom}_R(T_i, T_{il}) & \longrightarrow & \text{Hom}_R(T_i, T_{ik}) & \longrightarrow & M \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \parallel & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \text{Hom}_R(T_i, T_{il}) & \longrightarrow & \text{Hom}_R(T_i, T_{ik}) & \longrightarrow & \text{Hom}_R(T_i, T_{ik}/T_{il}) \longrightarrow 0 \end{array}$$

これより $M \simeq \text{Hom}_R(T_i, T_{ik}/T_{il})$ を得る. $\text{Hom}_R(T_i, -)$ が加法的であることから $\text{Hom}_R(T_i, -)$ は稠密である. \square

以上の結果を用いて \mathcal{C}_i を仲介することで \mathcal{P}_i と $\text{mod}S_i$ の間の Ext^1 の対応を得る.

命題 5.18. 次が成り立つ.

$$(1) \text{Ext}_R^1(P_{ij}, \mathcal{C}_i) = 0 = \text{Ext}_{S_i}^1(\text{Hom}_R(T_i, T_{ij}), \text{mod} S_i) \quad (1 \leq j \leq n_i).$$

(2) X_{ik}^l ($1 \leq k < l \leq n_i$) と X_{is}^t ($1 \leq s < t \leq n_i$) に対して, 次の自然な同型が存在する.

$$\text{Ext}_R^1(X_{ik}^l, X_{is}^t) \simeq \text{Ext}_{S_i}^1(\text{Hom}_R(T_i, X_{ik}^l), \text{Hom}_R(T_i, X_{is}^t)).$$

(3) X_{ik}^l ($1 \leq k < l \leq n_i$) と P_{ij} ($1 \leq j \leq n_i$) に対して

$$\text{Ext}_R^1(X_{ik}^l, P_{ij}) = 0 \iff \text{Ext}_{S_i}^1(\text{Hom}_R(T_i, X_{ik}^l), \text{Hom}_R(T_i, T_{ij})) = 0.$$

[証明] (1) は P_{ij} が射影 R -加群, $\text{Hom}_R(T_i, T_{ij})$ が射影 S_i -加群なので明らか.

$Y \in \mathcal{C}_i$ を直既約加群とする. 完全列

$$0 \longrightarrow T_{il} \xrightarrow{f} T_{ik} \xrightarrow{g} X_{ik}^l \longrightarrow 0 \quad (4)$$

に $\text{Hom}_R(-, Y)$ を施して次の完全列を得る.

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_R(X_{ik}^l, Y) \xrightarrow{\text{Hom}(g, Y)} \text{Hom}_R(T_{ik}, Y) \xrightarrow{\text{Hom}(f, Y)} \text{Hom}_R(T_{il}, Y) \longrightarrow \text{Coker Hom}(f, Y) \longrightarrow 0$$

一方 (4) に $\text{Hom}_R(T_i, -)$ を施して, 補題 5.16 より次の完全列を得る.

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_R(T_i, T_{il}) \longrightarrow \text{Hom}_R(T_i, T_{ik}) \longrightarrow \text{Hom}_R(T_i, X_{ik}^l) \longrightarrow 0$$

この完全列は $\text{Hom}_R(T_i, X_{ik}^l)$ の射影分解であるので, この完全列にさらに $\text{Hom}_{S_i}(-, \text{Hom}_R(T_i, Y))$ を施すことにより次の完全列を得る.

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{S_i}(\text{Hom}_R(T_i, T_{ik}), \text{Hom}_R(T_i, Y)) &\longrightarrow \text{Hom}_{S_i}(\text{Hom}_R(T_i, T_{il}), \text{Hom}_R(T_i, Y)) \\ &\longrightarrow \text{Ext}_{S_i}^1(\text{Hom}_R(T_i, X_{ik}^l), \text{Hom}_R(T_i, Y)) \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

ここで可換図式

$$\begin{array}{ccccc} \text{Hom}_R(T_{ik}, Y) & \xrightarrow{\text{Hom}(f, Y)} & \text{Hom}_R(T_{il}, Y) & & \\ \text{Hom}(T_i, -) \downarrow & & \text{Hom}(T_i, -) \downarrow & & \\ \text{Hom}_{S_i}(\text{Hom}_R(T_i, T_{ik}), \text{Hom}_R(T_i, Y)) & \longrightarrow & \text{Hom}_{S_i}(\text{Hom}_R(T_i, T_{il}), \text{Hom}_R(T_i, Y)) & & \\ & \longrightarrow & \text{Coker Hom}(f, Y) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \\ & \longrightarrow & \text{Ext}_{S_i}^1(\text{Hom}_R(T_i, X_{ik}^l), \text{Hom}_R(T_i, Y)) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

を考える. 命題 5.17 より $\text{Hom}(T_i, -)$ は同型である. 従って同型

$$\text{Coker Hom}(f, Y) \xrightarrow{\sim} \text{Ext}_{S_i}^1(\text{Hom}_R(T_i, X_{ik}^l), \text{Hom}_R(T_i, Y))$$

を得る. この同型を用いて (2)(3) を示す.

(2) $Y = X_{is}^t$ とすれば, 上の同型と補題 5.13 より

$$\text{Ext}_R^1(X_{ik}^l, Y) \simeq \text{Coker Hom}(f, Y) \simeq \text{Ext}_{S_i}^1(\text{Hom}_R(T_i, X_{ik}^l), \text{Hom}_R(T_i, Y))$$

を得る.

(3) $Y = T_{ij}$ とすれば, 命題 5.14 より

$$\begin{aligned} \text{Ext}_R^1(X_{ik}^l, P_{ij}) = 0 &\iff \text{Coker Hom}(f, Y) = 0 \\ &\iff \text{Ext}_{S_i}^1(\text{Hom}_R(T_i, X_{ik}^l), \text{Hom}_R(T_i, Y)) = 0 \end{aligned}$$

を得る. □

命題 5.18 の結果をうけて主定理である定理 5.1 の証明をする.

$L = (L_1, \dots, L_m) \in \text{tilt}(S_1) \times \dots \times \text{tilt}(S_m)$ とする. 命題 5.11 より $\text{Ext}_R^1(F_i(L_i), F_j(L_j)) = 0$ ($i \neq j$) である. また命題 5.18 より $\text{Ext}_R^1(F_i(L_i), F_i(L_i)) = 0$ である. 従って

$$\text{Ext}_R^1(F(L), F(L)) = 0$$

である. また $\text{pd } F(L) \leq 1$ であるし, $F(L)$ の直既約因子は互いに非同型でちょうど $n_1 + \dots + n_m$ 個ある. 従って $F(L)$ は R の基本的傾加群である. 従って Π は well-defined である.

F は同型を除けば単射であるから, F から引き起こされる Π も単射である.

最後に Π が全射であることを示す. $L \in \text{tilt}(R)$ とする. 系 5.10 より L は次のように直和分解できる.

$$L = L_1 \oplus \dots \oplus L_m, \quad L_i \in \mathcal{P}_i.$$

$F_i(L'_i) = L_i$ ($1 \leq i \leq m$) なる $L'_i \in \text{mod } S_i$ をとる. $L'_i \in \text{tilt}(S_i)$ であることをいえば証明は終わり. $\text{pd } L'_i \leq 1$ であることはよい. 命題 5.18 より

$$\text{Ext}_{S_i}^1(L'_i, L'_i) = 0$$

である. このことと

$$S_i \simeq \text{T}_{n_i}(K)$$

と命題 1.57 より

$$(L'_i \text{ の非同型な直既約因子の個数}) \leq n_i$$

である. しかし

$$\sum_{i=1}^m (L'_i \text{ の非同型な直既約因子の個数}) = \sum_{i=1}^m n_i$$

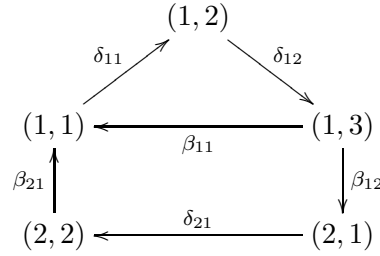
であるから,

$$(L'_i \text{ の非同型な直既約因子の個数}) = n_i$$

でなくてはならない. 従って $L'_i \in \text{tilt}(S_i)$ である. □

この定理により体上の上半三角行列環上の基本的傾加群を用いて R の基本的傾加群が記述できた. 定理 5.3 と定理 5.1 を合わせて, 与えられた原田多元環上の傾加群を分類することができる.

例 5.19. 例 3.4 の $R(3, 2)$ の傾加群を分類する.



$$\begin{cases}
 \beta_{11}\delta_{11}\delta_{12}\beta_{11}\delta_{11}\delta_{12}\beta_{11} = \beta_{12}\delta_{21}\beta_{21} \\
 \beta_{11}\delta_{11}\delta_{12}\beta_{12} = 0 \\
 \beta_{21}\delta_{11}\delta_{12}\beta_{11} = 0
 \end{cases}$$

有限生成直既約射影 $R(3, 2)$ -加群をレヴィー列で表わすと以下ようになる.

$$\begin{array}{ccccccc}
 \begin{array}{c} (1,1) \\ (1,2) \\ (1,3) \end{array} & & \begin{array}{c} (1,2) \\ (1,3) \end{array} & & \begin{array}{c} (1,3) \end{array} & & \\
 \begin{array}{c} (1,1) \\ (1,2) \\ (1,3) \\ (1,1) \\ (1,2) \\ (1,3) \end{array} & , & \begin{array}{c} (1,1) \\ (1,2) \\ (1,3) \\ (1,1) \\ (1,2) \\ (1,3) \end{array} & , & \begin{array}{c} (1,1) \\ (1,2) \\ (1,3) \end{array} & , & \begin{array}{c} (2,1) \\ (2,2) \\ (1,1) \\ (1,2) \\ (1,3) \\ (2,1) \\ (2,2) \end{array} \\
 \begin{array}{c} (1,1) \\ (1,2) \\ (1,3) \end{array} & & \begin{array}{c} (1,1) \\ (1,2) \\ (1,3) \end{array} & & \begin{array}{c} (1,1) \\ (1,2) \\ (1,3) \end{array} & & \begin{array}{c} (2,1) \\ (2,2) \\ (1,1) \\ (1,2) \\ (1,3) \\ (2,1) \\ (2,2) \end{array}
 \end{array}$$

定理 5.1 より次の一対一対応が得られる.

$$\text{tilt}(R(3, 2)) \longleftrightarrow \text{tilt}(T_3(K)) \times \text{tilt}(T_2(K)).$$

定理 5.1 の対応と定理 5.3 の対応より, 以下が全ての $R(3, 2)$ 上の傾加群である.

$$\begin{aligned}
 & \left(\begin{array}{c} (1,1) \\ (1,2) \\ (1,3) \\ (1,1) \\ (1,2) \\ (1,3) \\ (1,1) \\ (1,2) \\ (1,3) \end{array} \right) \oplus \left(\begin{array}{c} (1,2) \\ (1,3) \\ (1,1) \\ (1,2) \\ (1,3) \\ (1,1) \\ (1,2) \\ (1,3) \end{array} \right) \oplus \left(\begin{array}{c} (1,3) \\ (1,1) \\ (1,2) \\ (1,3) \\ (1,1) \\ (1,2) \\ (1,3) \end{array} \right) \oplus \left(\begin{array}{c} (2,1) \\ (2,2) \\ (1,1) \\ (1,2) \\ (1,3) \\ (2,1) \\ (2,2) \end{array} \right) \oplus \left(\begin{array}{c} (2,2) \\ (1,1) \\ (1,2) \\ (1,3) \\ (2,1) \\ (2,2) \end{array} \right), \\
 & \left(\begin{array}{c} (1,1) \\ (1,2) \\ (1,3) \\ (1,1) \\ (1,2) \\ (1,3) \\ (1,1) \\ (1,2) \\ (1,3) \end{array} \right) \oplus \left(\begin{array}{c} (1,2) \\ (1,3) \\ (1,1) \\ (1,2) \\ (1,3) \\ (1,1) \\ (1,2) \\ (1,3) \end{array} \right) \oplus (1,2) \oplus \left(\begin{array}{c} (2,1) \\ (2,2) \\ (1,1) \\ (1,2) \\ (1,3) \\ (2,1) \\ (2,2) \end{array} \right) \oplus \left(\begin{array}{c} (2,2) \\ (1,1) \\ (1,2) \\ (1,3) \\ (2,1) \\ (2,2) \end{array} \right),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(\begin{array}{c} (1,1) \\ (1,2) \\ (1,3) \\ (1,1) \\ (1,2) \\ (1,3) \\ (1,1) \\ (1,2) \\ (1,3) \end{array} \right) \oplus (1,1) \oplus \left(\begin{array}{c} (1,3) \\ (1,1) \\ (1,2) \\ (1,3) \\ (1,1) \\ (1,2) \\ (1,3) \end{array} \right) \oplus \left(\begin{array}{c} (2,1) \\ (2,2) \\ (1,1) \\ (1,2) \\ (1,3) \\ (2,1) \\ (2,2) \end{array} \right) \oplus (2,1), \\
& \left(\begin{array}{c} (1,1) \\ (1,2) \\ (1,3) \\ (1,1) \\ (1,2) \\ (1,3) \\ (1,1) \\ (1,2) \\ (1,3) \end{array} \right) \oplus \left(\begin{array}{c} (1,1) \\ (1,2) \end{array} \right) \oplus (1,2) \oplus \left(\begin{array}{c} (2,1) \\ (2,2) \\ (1,1) \\ (1,2) \\ (1,3) \\ (2,1) \\ (2,2) \end{array} \right) \oplus (2,1), \\
& \left(\begin{array}{c} (1,1) \\ (1,2) \\ (1,3) \\ (1,1) \\ (1,2) \\ (1,3) \\ (1,1) \\ (1,2) \\ (1,3) \end{array} \right) \oplus \left(\begin{array}{c} (1,1) \\ (1,2) \end{array} \right) \oplus (1,1) \oplus \left(\begin{array}{c} (2,1) \\ (2,2) \\ (1,1) \\ (1,2) \\ (1,3) \\ (2,1) \\ (2,2) \end{array} \right) \oplus (2,1),
\end{aligned}$$

最後に原田多元環の傾加群の準同型環はまた、原田多元環になるとは限らないことを注意しておく。

例 5.20. 3 次の上三角行列環

$$R = \begin{pmatrix} K & K & K \\ 0 & K & K \\ 0 & 0 & K \end{pmatrix}$$

を考える。\$R\$ 上の傾加群として

$$T = (K K K) \oplus (0 K K) \oplus (0 K 0)$$

がとれる。このとき \$T\$ の準同型環は次のようになる。

$$\text{End}_R(T) \simeq \begin{pmatrix} K & K & 0 \\ 0 & K & 0 \\ 0 & K & K \end{pmatrix}.$$

この \$\text{End}_R(T)\$ は射影的かつ移入的な加群をもたない。従って \$\text{End}_R(T)\$ は原田多元環ではない。

参考文献

- [1] 岩永恭雄・佐藤眞久: 環と加群のホモロジー代数的理論, 日本評論社 (2002)
- [2] 大城紀代市: Artin 環, 研究集会「環論とその周辺」報告集 (名古屋, 2006), 1-39
- [3] F. W. Anderson, K. R. Fuller: Rings and Categories of Modules (second edition), Graduate Texts in Math. 13, Springer-Verlag, Heidelberg/New York/Berlin (1991)
- [4] I. Assem, D. Simson, A. Skowronski: Elements of the Representation Theory of Associative Algebras, London Mathematical Society Student Texts 65 (2006)
- [5] M. Auslander, I. Reiten, S. Smalø: Representation Theory of Artin Algebras, Cambridge Studies in Advanced Mathematics 36, Cambridge university press (1995)
- [6] Y. Baba and K. Oshiro: Classical Artinian Rings and Related Topics, Lecture note, preprint
- [7] K. R. Fuller: On indecomposable injectives over artinian rings, Pacific J. Math 29 (1969), 115-135
- [8] D. Happel, U. Preiser, C. M. Ringel: Vinberg's characterization of Dynkin diagrams using subadditive functions with application to DTr-periodic modules, Lec Notes in Math. 832, Springer, Berlin (1980), 280-294
- [9] M. Harada: Non-small modules and non-cosmall modules, Ring Theory. Proceedings of 1978 Antwerp Conference, New York (1979), 669-690
- [10] M. Harada: On one-sided QF-2 rings I, Osaka J. Math. 17 (1980), 421-431
- [11] M. Harada: On one-sided QF-2 rings II, Osaka J. Math. 17 (1980), 433-438
- [12] M. Harada: Factor categories with applications to direct decomposition of modules, Lec. Notes Pure Appl. Math. 88, Dekker, New York (1983)
- [13] M. Ikeda: A characterization of quasi-Frobenius rings, Osaka J. Math. 4 (1952), 203-210
- [14] O. Iyama: The relationships between homological properties and representation theoretic realization of artin algebras, Trans. Amer. Math. Soc. 357 (2004), 709-734
- [15] O. Iyama: τ -Categories I: Ladders, Algebras and Representation Theory 8 (2005), 297-321
- [16] O. Iyama: τ -Categories II: Nakayama Pairs and Rejective Subcategories, Algebras and Representation Theory 8 (2005), 449-477
- [17] H. Kupisch: A characterization of Nakayama rings, Comm. Algebra 23 (1995), 739-741

- [18] T. Nakayama: On Frobeniusean algebras I, *Ann. Math.* 40 (1939), 611-633
- [19] T. Nakayama: On Frobeniusean algebras II, *Ann. Math.* 42 (1941), 1-21
- [20] T. Nakayama: Note on uniserial and generalized uniserial rings, *Proc. Imp. Acad. Tokyo* 16 (1940), 285-289
- [21] W. K. Nicholson and M. F. Yousif: *Quasi-Frobenius Rings*, Cambridge Tracts in Mathematics 158, Cambridge University Press, Cambridge (2003)
- [22] K. Oshiro: Lifting modules, extending modules and their applications to QF-rings, *Hokkaido Math. J.* 13 (1984), 310-338
- [23] K. Oshiro: Lifting modules, extending modules and their applications to generalized uniserial rings, *Hokkaido Math. J.* 13 (1984), 339-346
- [24] K. Oshiro: Structure of Nakayama rings, *Proc. 20th Symp. Ring Theory, Okayama* (1987), 109-133
- [25] K. Oshiro: On Harada rings I, *Math. J. Okayama Univ.* 31 (1989), 161-178
- [26] K. Oshiro: On Harada rings II, *Math. J. Okayama Univ.* 31 (1989), 169-188
- [27] K. Oshiro: On Harada rings III, *Math. J. Okayama Univ.* 32 (1990), 111-118
- [28] K. Oshiro: Theories of Harada in Artinian rings, *International Symposium on Ring Theory (Kyongju, 1999)*, Birkhauser Boston, Boston (2001), 279-328
- [29] C. Riedtmann: Representation-finite selfinjective algebras of class A_n , *Representation Theory II*, Springer Lecture Notes 832 (1980), 240-287
- [30] C. Riedtmann: Algebren, Darstellungsköcher, Ueberlagerungen und zurück, *Comment. Math. Helvetici* 55 (1980), 199-224
- [31] R. M. Thrall: Some generalization of quasi-Frobenius algebras, *Trans. Amer. Math. Soc.* 64 (1948), 173-183
- [32] K. Yamaura: Quivers with relation of Harada algebras, preprint