EXOTIC PROJECTIVE STRUCTURES AND BOUNDARIES OF QUASI-FUCHSIAN SPACES

糸 健太郎 （東工大 大学院）

この小論は [12] の概説である. 省略した証明などは, そちらを参照して頂きたい.

1. 導入

S を種数 $g > 1$ の向き付けられた閉曲面とし, $T(S)$ を S の Teichmüller 空間とする. $T(S)$ は $3g-3$ 次元の複素多様体である. S 上の射影構造とは $(\widehat{\mathbf{C}}, \mathrm{PSL}_2(\mathbf{C}))$-構造; すなわち, 局所的に $\widehat{\mathbf{C}}$ をモデルとし, その張り合わせ写像が Möbious 写像であるような極大局所座標系のことである. S 上の (marking 込みの) 射影構造全体 $P(S)$ は $T(S)$ の正則余接バンドルと同一視できる. ここで, 底空間への射影 $P(S) \to T(S)$ は射影構造の定める複素構造への対応であり, 各点 $t \in T(S)$ 上のファイバーは, リーマン面 S_t 上の正則 2 次微分のなす $3g-3$ 次元複素ベクトル空間とみなされる. S 上の射影構造に対して, 展開写像 $f : \widetilde{S} \to \widehat{\mathbf{C}}$ ($\widetilde{S}$ は S の普遍被覆) が定まり, この写像が誘導する準同型 $\rho : \pi_1(S) \to \mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$ をホロノミー表現と呼ぶ. ここで, 射影構造にそのホロノミー表現の共役類を対応させることで, ホロノミー写像

$$hol : P(S) \to V(S) = \mathrm{Hom}(\pi_1(S), \mathrm{PSL}_2(\mathbf{C}))/\mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$$

を定めると, これは局所同相な正則写像であることが知られている [11]. ここで $V(S)$ の部分集合

$$QF(S) = \{[\rho] \in V(S) : \rho\text{は忠実な表現},\ \rho(\pi_1(S))\text{ は擬フックス群}\}$$

を擬フックス群空間と呼ぶ.

この小論では, 主に $P(S)$ の部分集合 $Q(S) = hol^{-1}(QF(S))$ を考察する. $Q(S)$ の元で, その展開写像が単射であるものを standard, そうでないものを exotic と呼ぶ. S 上の複素構造を 1 つ指定したとき, その上にある standard な射影構造全体は, Teichmüller 空間の Bers 埋め込みの像として, 以前よりよく調べられているものである (cf. [4]). その一方で, exotic な射影構造の存在は Maskit によって最初に示された. これに続く exotic な射影構造の研究として [9], [10], [11], [22], [24], [26] などがある. さて, 後に命題 2.2 で見るように, $Q(S)$ の各連結成分は $QF(S)$ と双正則同値である. さらに Goldman [10] によるフックス群ホロノミーをもつ射影構造の (grafting を用いた) 特徴付けより, $Q(S)$ の連結成分全体は measured lamination の集合 $\mathcal{ML}(S)$ の整数点全体 $\mathcal{ML}_{\mathbf{Z}}(S)$ と 1 対 1 対応がつく. ここで

$$\mathcal{ML}_{\mathbf{Z}}(S) = \{\lambda \in \mathcal{ML}(S) : \lambda = \sum n_j C_j,\ n_j \in \mathbf{N},\ C_j\text{は単純閉曲線}\}.$$

いま $\lambda \in \mathcal{ML}_{\mathbf{Z}}(S)$ に対応する $Q(S)$ の連結成分を $\mathcal{Q}_\lambda$ と書くと, $\mathcal{Q}_0$ は standard な射影構造より成る唯一の連結成分である.

最近, McMullen [22, Appendix] によって次のような現象が発見された.

定理 1.1 (McMullen)**.** Exotic な射影構造の列で, $\partial\mathcal{Q}_0$ の点に収束するものが存在する.

この現象はクライン群における次の現象と深く関わっている: 代数的極限が幾何学的極限に真に含まれるようなクライン群の表現列が存在する. クライン群におけるこのような現象は, Jørgensen [13] に始まり多くの人々によって研究されている (例えば [2], [5], [7], [16], [23] など). 定理 1.1 の証明は, 具体的に exotic な点列を構成することで得られるのだが, その際に用いられる表現列は本質的には Anderson-Canary [2] によって構成されたものである.

さて, 定理 1.1 より次のような疑問が自然に生じる.

(1) $\partial\mathcal{Q}_0$ において, exotic な射影構造が集積するのはどのような点か？

(2) Exotic な射影構造の点列は, どのような $Q(S)$ の連結成分を経由すれば $\partial\mathcal{Q}_0$ に近づくことができるのか？

まず (1) に関して, 定理 1.1 で構成された exotic な点列の極限は, 幾何学的有限な b 群をホロノミー表現の像にもつことを注意しておく. 一方で, exotic な元の集積点となる $\partial\mathcal{Q}_0$ の点のホロノミー表現の像は, 必ず APT をもつことが松崎氏により示されている (系 3.4). さらには, ホロノミー表現の像が幾何学的有限な b 群であるような $\partial\mathcal{Q}_0$ の点で, exotic な元が集積しないものが存在することもわかる (系 3.6).

この小論では, 主に (2) について考察する. 筆者は始め, 無限個の成分を経由しないと $\partial\mathcal{Q}_0$ には近づけないのではないだろうか, と考えていたが, 実際には任意の exotic な成分 $\mathcal{Q}_\lambda$ の中に, $\partial\mathcal{Q}_0$ に収束する点列がとれる事がわかった. すなわち次の結果を得る.

定理 1.2. 任意の $\lambda \in \mathcal{ML}_{\mathbf{Z}}(S)$ に対して $\overline{\mathcal{Q}_0} \cap \overline{\mathcal{Q}_\lambda} \neq \emptyset$ が成り立つ. 特に, $P(S)$ における $Q(S)$ の閉包 $\overline{Q(S)}$ は連結である.

この証明は, 定理 1.1 で構成された点列とそのホロノミー表現の極限をより精密に調べることで得られる. ここで, exotic な点列がどの成分に含まれているかは, ホロノミー表現の代数的極限が幾何学的極限にどのように含まれているかに依存していることを用いる. さらに, 補題 5.1 を準備することで, 定理 1.2 は次のように拡張される.

定理 1.3. 有限集合 $\{\lambda_i\}_{i=1}^m \subset \mathcal{ML}_{\mathbf{Z}}(S)$ で 任意の $j, k \in \{1, \ldots, m\}$ が $i(\lambda_j, \lambda_k) = 0$ をみたすものに対して

$$\overline{\mathcal{Q}_0} \cap \overline{\mathcal{Q}_{\lambda_1}} \cap \cdots \cap \overline{\mathcal{Q}_{\lambda_m}} \neq \emptyset$$

が成り立つ. ここで $i(\cdot, \cdot)$ は幾何学的交点数を表す.

さて, ホロノミー写像 $hol : P(S) \to V(S)$ は局所同相写像であったから, $\partial\mathcal{Q}_0$ における $Q(S)$ の複雑さは $\partial QF(S)$ の複雑さに遺伝する. 実際, 定理 1.1 の系として $\overline{QF(S)}$ は境界付き多様体とはならないことがわかる [22, Theorem A.1]. ここでは定理 1.3 の系として, $\partial QF(S)$ の複雑性を示す次の主張を得る.

系 1.4. 任意の自然数 $n \in \mathbf{N}$ に対してある点 $[\rho] \in \partial QF(S)$ が存在して, $[\rho]$ の（十分小さな）任意の近傍 U に対して $U \cap QF(S)$ の連結成分は n 個以上となる.

2. 記号と基本事項

2.1. **Beltrami 微分.** リー群 $\mathrm{PSL}_2(\widehat{\mathbf{C}})$ の離散部分群をクライン群とよぶ. クライン群 G に対して, $\widehat{\mathbf{C}}$ における極限集合を $\Lambda(G)$, その補集合である不連続領域を $\Omega(G)$ で表す. $\widehat{\mathbf{C}}$ 上の可測関数 μ がクライン群 G に関する Beltrami 微分であるとは,

$$\mu \circ g \times \overline{g'} = \mu \times g' \text{ a.e. } (\forall g \in G)$$

をみたすときをいう. G に関する Beltrami 微分 μ で $||\mu||_\infty < 1$ をみたすもの全体を $B(G)_1$ と書く. 任意の $\mu \in B(G)_1$ に対し, 擬等角写像 $w : \widehat{\mathbf{C}} \to \widehat{\mathbf{C}}$ で Beitrami 方程式 $w_{\bar{z}} = \mu \times w_z$ をみたし $0, 1, \infty$ を固定するものが唯一つ存在する. これを w_μ と書く. 擬等角写像 w_μ は, $\Theta_\mu(g) = w_\mu \circ g \circ {w_\mu}^{-1}$ $(\forall g \in G)$ でもって群同型 $\Theta_\mu : G \to \mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$ を定める. 任意の G-不変な開集合 $U \subset \Omega(G)$ に対して, $B(U, G)_1 = \{\mu \in B(G)_1 : \mathrm{supp}(\mu) \subset U\}$ と定める.

2.2. **Teichmüller 空間.** 上半平面 $H = \{z \in \mathbf{C} : \mathrm{Im} z > 0\}$ に作用する S のフックス群モデル Γ を一つとる. 2 つの元 $\mu, \nu \in B(H, \Gamma)_1$ が同値であるとは, $w_\mu|\partial H = w_\nu|\partial H$ が成り立つときをいう. これは $\Theta_\mu = \Theta_\nu$ が成り立つとき, といってもよい. 各同値類を $[\mu]$ と書く. Teichmüller 空間 $T(S)$ は $B(H, \Gamma)_1$ をこの同値関係で割ったものであり, $3g-3$ 次元の複素多様体の構造が入る. 任意の $t = [\mu] \in T(S)$ に対して擬フックス群 $\Theta_\mu(\Gamma)$ を Γ_t と書く. Γ_t の不連続領域は $H_t = w_\mu(H)$ と $H_t^* = w_\mu(H^*)$ の和集合である. ここで $H^* = \{z \in \mathbf{C} : \mathrm{Im} z < 0\}$. 擬等角写像 $w_\mu|H : H \to H_t$ は擬等角写像 $g_t : S = H/\Gamma \to S_t = H_t/\Gamma_t$ に落ちる. このとき (g_t, S_t) は (普通の意味で) Teichmüller 空間の点 $t \in T(S)$ を表している.

2.3. **射影構造の変形空間.** S 上の射影構造を, S の普遍被覆 $\widetilde{S}$ に持ち上げ局所座標を解析接続することで, 局所同相写像 $f : \widetilde{S} \to \widehat{\mathbf{C}}$ を得る. これを展開写像とよぶ. この展開写像 f に対して, $f \circ g = \rho(g) \circ f$ $(\forall g \in \pi_1(S))$ をみたす群準同型 $\rho : \pi_1(S) \to \mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$ が存在する. これをホロノミー表現とよぶ. S 上の射影構造に対して, 組 (f, ρ) は次の $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$ の作用を除いて一意的に定まる;

$$(f, \rho) \mapsto (A \circ f, A \circ \rho \circ A^{-1}), \quad A \in \mathrm{PSL}_2(\mathbf{C}).$$

任意の $t \in T(S)$ に対して, H_t の Γ_t に関する正則 2 次微分の空間を

$$A_2(H_t, \Gamma_t) = \{\varphi : \varphi \text{ は } H_t \text{上正則}, \ \varphi(\gamma(z))\gamma'(z)^2 = \varphi(z) \ (\forall \gamma \in \Gamma_t, \forall z \in H_t)\}$$

で定める. $A_2(H_t, \Gamma_t)$ は $3g-3$ 次元複素ベクトル空間である. ここで $S_t = H_t/\Gamma_t$ 上の射影構造全体は, $A_2(H_t, \Gamma_t)$ で parametrize される: S_t の普遍被覆として H_t をとるとき, S_t 上の射影構造の展開写像 $f : H_t \to \widehat{\mathbf{C}}$ は正則な局所同相写像である. いま S_t 上の射影構造に対して, その展開写像 f の Schwarz 微分 $S(f) \in A_2(H_t, \Gamma_t)$ が対応する. ここで $S(f) = (f''/f')' - 1/2(f''/f')^2$. 逆に任意の $\varphi \in A_2(H_t, \Gamma_t)$ に対して, $S(f) = \varphi$ をみたす正則写像 $f : H_t \to \widehat{\mathbf{C}}$ が存在して, これは S_t 上の射影構造を定める. この同一視のもとに, $t \in T(S)$ と $\varphi \in A_2(H_t, \Gamma_t)$ の組 (t, φ) も射影構造とよぶ.

いま $T(S)$ の正則余接バンドルを $P(S)$, その底空間への射影を $\pi : P(S) \to T(S)$ と書くとき, 各ファイバー $\pi^{-1}(t)$ は $A_2(H_t, \Gamma_t)$ と同一視される. 従って, $P(S)$ を S 上の (marking 込みの) 射影構造全体の空間とみなす. 射影構造 $(t, \varphi) \in P(S)$ に対して, 展開写

像を $f_{t,\varphi}: H_t \to \widehat{\mathbf{C}}$, $f_{t,\varphi}$ が誘導するホロノミー表現を $\bar{\rho}_{t,\varphi}: \Gamma_t \to \mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$ と書く．また, 表現 $\rho_{t,\varphi} = \bar{\rho}_{t,\varphi} \circ \Theta_\mu : \pi_1(S) = \Gamma \to \mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$ (ここで $t = [\mu]$) もホロノミー表現とよぶ. 任意の $(t,\varphi) \in P(S)$ に対して, $\rho_{t,\varphi}(\pi_1(S))$ は非可換であることを注意しておく.

表現列 $\{\rho_n : \pi_1(S) \to \mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})\}$ が表現 $\rho : \pi_1(S) \to \mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$ に代数的に収束するとは, 各 $g \in \pi_1(S)$ に対して $\rho_n(g)$ が $\rho(g)$ に収束するときをいう．像が非可換群となる表現 $\rho : \pi_1(S) \to \mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$ の共役類 $[\rho]$ 全体を $V(S)$ で表す．$V(S)$ は $6g-6$ 次元の複素多様体となる．ここでホロノミー写像

$$hol : P(S) \to V(S)$$

を $hol(t,\varphi) = [\rho_{t,\varphi}]$ で定めると, これは局所同相な正則写像である (Hejhal [11], [8]).

2.4. **Grafting（つぎ木）.** $Q(S)$ の元 (t,φ) で, その展開写像 $f_{t,\varphi}$ が単射であるものを standard, そうでないものを exotic とよぶのであった．Exotic な射影構造の展開写像は全射である (cf. [17])．ここでは standard な射影構造でホロノミーの像がフックス群となるものに対して, これと同じホロノミー表現をもつ exotic な射影構造の構成法を述べる．この操作は grafting（つぎ木）とよばれている．詳しいことは [9], [10], [15], [22], [26] などを参照されたい.

S 上の非自明な単純閉曲線のホモトピー類全体を $\mathcal{S}$ と書く.

Standard な射影構造 (t,φ) で $G = \rho_{t,\varphi}(\pi_1(S))$ がフックス群となるものをとる．ここで, 展開写像 $f_{t,\varphi} : H_t \to \widehat{\mathbf{C}}$ の像は上半平面 H と一致するとしてよい．すなわち, リーマン面 $S_t = H_t/\Gamma_t$ 上の射影構造 (t,φ) は, フックス群による一意化 $H \to S_t = H/G$ より定まる射影構造である．ここで S_t の双曲計量に関して $C \in \mathcal{S}$ を代表する閉測地線の双曲的長さを $l_t(C)$ と書く.

いま $nC \in \mathbf{N} \times \mathcal{S}$ に対して, 新しい射影構造 $Gr_{nC}(t,\varphi)$ を次のように構成する: まず S_t を $C \in \mathcal{S}$ を代表する閉測地線で切り, そこに射影構造を備えた円環

$$\{z \in \widehat{\mathbf{C}} : 0 \le \arg z \le 2n\pi\}/\langle z \mapsto e^{l_t(C)} z\rangle$$

をねじれなくはさむ．ここで $\{z \in \widehat{\mathbf{C}} : 0 \le \arg z \le 2n\pi\}$ の重なったシートは区別するものとし, $\widehat{\mathbf{C}}$ から誘導される射影構造を入れておく.

一般の $\lambda = \sum_{j=1}^{l} n_j C_j \in \mathcal{ML}_{\mathbf{Z}}(S)$ に対しても, $Gr_\lambda(t,\varphi)$ を同様に定義する．ここで $(t',\varphi') = Gr_\lambda(t,\varphi)$ と書くとき, 容易にわかるように $[\rho_{t',\varphi'}] = [\rho_{t,\varphi}]$ が成り立つ．さらに, $G = \rho_{t',\varphi'}(\pi_1(S))$ に対して自然に $S_{t'}$ の部分集合 $f^{-1}_{t',\varphi'}(\Lambda(G))/\Gamma_{t'}$ が考えられて, これは各 j に対して C_j にホモトピックな $2n_j$ 個の単純閉曲線より成ることに注意する.

さて grafting によってホロノミー表現は不変であったが, 逆にフックス群ホロノミーをもつ射影構造はすべて grafting によって得られることが Goldman [10] により知られている.

定理 2.1 (Goldman)**.** 任意の standard な射影構造 (t,φ) でフックス群ホロノミーをもつものに対して

$$hol^{-1}(hol(t,\varphi)) = \{Gr_\lambda(t,\varphi)\}_{\lambda \in \mathcal{ML}_{\mathbf{Z}}(S)}$$

が成り立つ.

2.5. **射影構造の擬等角変形.** $V(S)$ の 2 つの部分集合

$$D(S) = \{[\rho] \in V(S) : \rho\text{は忠実な表現で, その像は離散的}\}$$
$$QF(S) = \{[\rho] \in V(S) : \rho\text{は忠実な表現で, その像は擬フックス群}\}$$

を考える. $D(S)$ は $V(S)$ の閉集合 [14, Theorem 1] で, $D(S)$ の内点集合 $\mathrm{int}D(S)$ は $QF(S)$ と一致する [25, Theorem A]. $P(S)$ の部分集合 $hol^{-1}(D(S))$ を $K(S)$, $hol^{-1}(QF(S))$ を $Q(S)$ と書く. 写像 hol の局所同相性より, $\mathrm{int}K(S) = Q(S)$ が成り立つ.

ここで Shiga-Tanigawa [24] に従って, 射影構造の擬等角変形について説明する. 擬フックス群ホロノミーをもつ射影構造 $(t, \varphi) \in Q(S)$ を 1 つ固定し, そのホロノミーの像 $\rho_{t,\varphi}(\pi_1(S))$ を G と書く. いま $\mu \in B(G)_1$ に対して, その $f_{t,\varphi}$ による引き戻し $\widehat{\mu} = f^*_{t,\varphi}(\mu) \in B(H_t, \Gamma_t)_1$ を

$$f^*_{t,\varphi}(\mu) = (\mu \circ f_{t,\varphi}) \times \overline{f'_{t,\varphi}}/f'_{t,\varphi}$$

で定義する. すると擬等角写像 $w_{\widehat{\mu}} \circ w_\nu : \widehat{\mathbf{C}} \to \widehat{\mathbf{C}}$ は新しい点 $t' \in T(S)$ を定める. ここで $\nu \in B(H, \Gamma)_1$ は $t \in T(S)$ の代表元である. さらに $w_\mu \circ f_{t,\varphi} \circ (w_{\widehat{\mu}})^{-1}$ は $H_{t'} = w_{\widehat{\mu}}(H_t)$ 上正則であり, この Schwarz 微分を φ' と書く. ここで得た新しい射影構造 (t', φ') を, (t, φ) の擬等角変形という (次の可換図式参照).

$$\begin{array}{ccc} H_t & \xrightarrow{f_{t,\varphi}} & \widehat{\mathbf{C}} \\ {\scriptstyle w_{\widehat{\mu}}|H_t}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle w_\mu} \\ H_{t'} & \xrightarrow{f_{t',\varphi'}} & \widehat{\mathbf{C}}. \end{array}$$

ここで写像

$$\widetilde{\Psi}_{t,\varphi} : B(G)_1 \to P(S)$$

を $\widetilde{\Psi}_{t,\varphi}(\mu) = (t', \varphi')$ で定める. いま $B(G)_1$ に同値関係を $\mu \sim \nu \Leftrightarrow \Theta_\mu = \Theta_\nu$ で定めると, この同値関係による $B(G)_1$ の商空間は自然に $QF(S)$ と同一視される. このとき, 写像 $\widetilde{\Psi}_{t,\varphi}$ は

$$\Psi_{t,\varphi} : QF(S) \to P(S)$$

を誘導して [24], $\Psi_{t,\varphi}([\rho_{t,\varphi}]) = (t, \varphi)$ をみたす. この写像を用いて, 次のことが示せる.

命題 2.2. $Q(S)$ の任意の連結成分 $\mathcal{Q}$ に対して

$$hol|\mathcal{Q} : \mathcal{Q} \to QF(S)$$

は双正則写像. さらに任意の $(t, \varphi) \in \mathcal{Q}$ に対して $\Psi_{t,\varphi} = (hol|\mathcal{Q})^{-1}$ が成り立つ. 従って写像 $\Psi_{t,\varphi}$ は $(t, \varphi) \in \mathcal{Q}$ の取り方に依らない.

証明. hol は正則写像なので, $hol|\mathcal{Q}$ が全単射であることを示せばよい. $\mathcal{Q}$ の元 (t, φ) を任意にとり固定する. $QF(S)$ は連結で $\Psi_{t,\varphi}$ は連続なので, $\Psi_{t,\varphi}(QF(S)) \subset \mathcal{Q}$ である. 定義より $(hol|\mathcal{Q}) \circ \Psi_{t,\varphi} = id_{QF(S)}$ が成り立つことは容易にわかる. 従って $\Psi_{t,\varphi} \circ (hol|\mathcal{Q}) = id_{\mathcal{Q}}$ を示せばよい. そのために $\mathcal{Q}$ の部分集合

$$\mathcal{Q}' = \{(s, \psi) \in \mathcal{Q} : (s, \psi) = \Psi_{t,\varphi} \circ hol(s, \psi)\}$$

が, 空でなく開かつ閉であることをみる．ここで $\Psi_{t,\varphi}\circ(hol|\mathcal{Q})$ は連続なので $\mathcal{Q}'$ は閉集合．さらに $\Psi_{t,\varphi}([\rho_{t,\varphi}])=(t,\varphi)$ であるので $(t,\varphi)\in\mathcal{Q}'$ であり，よって $\mathcal{Q}'\neq\emptyset$．いま $\mathcal{Q}'$ の元 (s,ψ) と，その近傍 $U\subset\mathcal{Q}$ で $hol|U$ が単射となるものをとる．さらに (s,ψ) の近傍 $V\subset U$ で $\Psi_{t,\varphi}\circ hol(V)\subset U$ をみたすものをとる．いま任意の $(s',\psi')\in V$ に対して $hol(\Psi_{t,\varphi}\circ hol(s',\psi'))=(hol\circ\Psi_{t,\varphi})\circ hol(s',\psi')=hol(s',\psi')$ が成り立つことに注意する．ここで $\Psi_{t,\varphi}\circ hol(s',\psi')$ と (s',ψ') は共に U に含まれていて, $hol|U$ は単射なので, $\Psi_{t,\varphi}\circ hol(s',\psi')=(s',\psi')$ を得る．従って $V\subset\mathcal{Q}'$ となり, $\mathcal{Q}'$ は開集合である． □

2.6. $Q(S)$ **の連結成分.** フックス群ホロノミーをもつ standard な射影構造 (t,φ) を 1 つとる．命題 2.2 より, $Q(S)$ の各連結成分はホロノミー表現が $[\rho_{t,\varphi}]$ と一致する射影構造を唯一つ含んでいる．一方で定理 2.1 より, このような射影構造全体は $\{Gr_\lambda(t,\varphi)\}_{\lambda\in\mathcal{ML}_{\mathbf{Z}}(S)}$ と表せる．従って, $Q(S)$ は次のように書ける;

$$Q(S)=\coprod_{\lambda\in\mathcal{ML}_{\mathbf{Z}}(S)}\mathcal{Q}_\lambda.$$

ここで $\mathcal{Q}_\lambda$ は $Gr_\lambda(t,\varphi)$ を含む連結成分である．

$\mathcal{Q}_\lambda$ の任意の元は $Gr_\lambda(t,\varphi)$ の擬等角変形として得られるので, $\mathcal{Q}_0$ は standard な元から成り, $\mathcal{Q}_\lambda(\lambda\neq 0)$ の元はすべて exotic であることがわかる．さらに $(t,\varphi)\in Q(S)$ に対して, (t,φ) を含む $Q(S)$ の連結成分は次のように特徴付けられる．

補題 2.3. $Q(S)$ の元 (t,φ) をとり, $\rho_{t,\varphi}(\pi_1(S))$ を G と書く．(t,φ) が $\lambda=\sum n_jC_j\in\mathcal{ML}_{\mathbf{Z}}(S)$ に対応する成分 $\mathcal{Q}_\lambda$ の元である必要十分条件は, S_t の部分集合 $f_{t,\varphi}^{-1}(\Lambda(G))/\Gamma_t$ が各 j に対し, C_j にホモトピックな $2n_j$ 個の単純閉曲線より成ることである． □

3. Exotic な射影構造とホロノミー表現の極限

ここでは, exotic な射影構造の収束列と, そのホロノミー表現の代数的, 幾何学的極限との関係を調べる．始めにクライン群の幾何学的収束を定義する．

定義 3.1. X を位相空間とする．X の閉集合の列 $\{A_n\}$ が 閉集合 A にハウスドルフ収束するとは, 次が成り立つときをいう:

- 任意の $x\in A$ に対して x に収束する点列 $\{x_n\in A_n\}$ が存在する．
- 任意の点列 $\{x_n\in A_n\}$ の任意の集積点 x は A に含まれる．

特に $X=\mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$ として, クライン群の列 $\{G_n\}$ が 群 $G\subset\mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$ にハウスドルフ収束するとき, これを幾何学的収束とよぶ.

ここで, 表現の収束に関して以下で用いる性質を思い出しておく．忠実で離散的な表現の列 $\{\rho_n:\pi_1(S)\to\mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})\}$ が, 表現 $\rho_\infty:\pi_1(S)\to\mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$ に代数的に収束しているとする．このとき ρ_∞ も忠実で離散的である [14]. また, $\{G_n=\rho_n(\pi_1(S))\}$ はある群 $\widehat{G}$ に幾何学的に収束する部分列 (これも $\{G_n\}$ とかく) をもつ．ここで $\widehat{G}$ は $G_\infty=\rho_\infty(\pi_1(S))$ を含むクライン群である．さらに, Kerckhoff-Thurston [16] により, すべての G_n が擬フックス群であるとき, $\{\Lambda(G_n)\}$ は $\Lambda(\widehat{G})$ にハウスドルフ収束することが知られている．

さて, 次に述べる補題 3.2 が以下の議論, 特に定理 1.2 の証明において本質的である. 始めにこの補題で考察する状況について説明する:

$Q(S)$ の点列 $\{(t_n, \varphi_n)\}$ が $K(S)$ の元 (t, φ) に収束しているとする. $\{(f_{t_n,\varphi_n}, \rho_{t_n,\varphi_n})\}$ と $(t_{t,\varphi}, \rho_{t,\varphi})$ を, $\{\rho_{t_n,\varphi_n}\}$ が $\rho_{t,\varphi}$ に代数的に収束するようにとる. $G_n = \rho_{t_n,\varphi_n}(\pi_1(S))$, $G_\infty = \rho_{t,\varphi}(\pi_1(S))$ とおく. さらに, $\{G_n\}$ は クライン群 $\widehat{G}$ に幾何学的に収束すると仮定する. また, 擬等角写像 $\omega_n : S_t \to S_{t_n}$ として, $\omega_n \circ g_t$ が g_{t_n} にホモトピックで, ω_n の歪曲度が 1 に収束するものをとる. ここで $g_t : S \to S_t$ と $g_{t_n} : S \to S_{t_n}$ は, それぞれ t と t_n の marking である.

以上の状況のもとに次が成り立つ.

補題 3.2. S_t において, $\{\omega_n^{-1}(f_{t_n,\varphi_n}^{-1}(\Lambda(G_n))/\Gamma_{t_n})\}$ は $f_{t,\varphi}^{-1}(\Lambda(\widehat{G}))/\Gamma_t$ にハウスドルフ収束する.

証明. まず $\{f_{t_n,\varphi_n}\}$ が H_t において $f_{t,\varphi}$ に広義一様収束することに注意する. また ω_n の持ち上げ $\widetilde{\omega}_n : H_t \to H_{t_n}$ で 恒等写像に広義一様収束するものをとる. すると $\{f_{t_n,\varphi_n} \circ \widetilde{\omega}_n\}$ も H_t において $f_{t,\varphi}$ に広義一様収束する. いま, $\{\Lambda(G_n)\}$ が $\Lambda(\widehat{G})$ にハウスドルフ収束しているので, 容易に確かめられるように $\{\widetilde{\omega}_n^{-1} \circ f_{t_n,\varphi_n}^{-1}(\Lambda(G_n))\}$ は $f_{t,\varphi}^{-1}(\Lambda(\widehat{G}))$ に (H_t の部分集合として) ハウスドルフ収束している. これより主張を得る. □

Remark 1. 上の補題より, $f_{t,\varphi}^{-1}(\Lambda(\widehat{G}))/\Gamma_t$ の形が $f_{t_n,\varphi_n}^{-1}(\Lambda(G_n))/\Gamma_{t_n}$ の形を限定し, さらに補題 2.3 より, (t_n, φ_n) を含む $Q(S)$ の成分を限定することがわかる. これが定理 1.2 の証明の基本的なアイデアである.

クライン群 G が b 群であるとは, $\Omega(G)$ が唯一つの単連結な不変成分 (これを $\Omega_0(G)$ と書く) をもつときをいう. さらに b 群 G は, $\Omega(G) = \Omega_0(G)$ が成り立つとき全退化群とよばれる. 幾何学的有限, APT(accidental parabolic transformation) などの定義は [20] 参照.

ここで $P(S)$ の部分集合

$$U(S) = \{(t, \varphi) \in P(S) : f_{t,\varphi} \text{は単射}\}$$

を考える. $U(S)$ は $P(S)$ の閉集合で, $\mathcal{Q}_0 \subset U(S) \subset K(S)$ が成り立つ. さらに, $\mathrm{int}U(S) = \mathcal{Q}_0$ と $\partial\mathcal{Q}_0 \subset \partial U(S)$ が容易にわかる. (ここで $\overline{\mathcal{Q}_0} = U(S)$ かどうかは, Bers の予想 [4] に関係する未解決な問題である.) 任意の $(t, \varphi) \in \partial U(S)$ に対して, $G = \rho_{t,\varphi}(\pi_1(S))$ は b 群であり $f_{t,\varphi}(H_t) = \Omega_0(G)$ が成り立つ.

さて補題 3.2 より, $\partial U(S)$ の元に収束する exotic な射影構造の列は, そのホロノミー表現の代数的, 幾何学的極限を用いて, 次のように特徴付けることができる.

命題 3.3. 補題 3.2 と同じ状況のもとで, さらに $(t, \varphi) \in \partial U(S)$ を仮定するとき, 次は同値である.

(1) 十分大きな n に対して (t_n, φ_n) は exotic.

(2) $\Omega_0(G_\infty) \cap \Lambda(\widehat{G}) \neq \emptyset$.

Remark 2. (i) 命題の (2) ⇒ (1) は McMullen による. 実際, 定理 1.1 の証明は (2) をみたす表現の列を構成することで得られる. (ii) $(t, \varphi) \in \partial U(S)$ より $f_{t,\varphi}(H_t) = \Omega_0(G)$ であるの

で, $f_{t,\varphi}^{-1}(\Lambda(\widehat{G}))/\Gamma_t$ の形を調べることは, $\Omega_0(G_\infty)\cap\Lambda(\widehat{G})$ の形を調べることに帰着する. これと Remark 1 をあわせると, (t_n,φ_n) $(n\gg 0)$ を含む $Q(S)$ の成分は, G_∞ の $\widehat{G}$ の中への入り方に大きく依存していることがわかる.

命題 3.3 の証明. 射影構造 $(t_n,\varphi_n)\in Q(S)$ が exotic ならば f_{t_n,φ_n} は全射であり, そうでない (つまり standard) ならば単射である. 従って条件 (1) は $f_{t_n,\varphi_n}^{-1}(\Lambda(G_n))/\Gamma_{t_n}\neq\emptyset$ $(\forall n\gg 0)$ という条件と同値である. 補題 3.2 より, この条件は $f_{t,\varphi}^{-1}(\Lambda(\widehat{G}))/\Gamma_t\neq\emptyset$. と書き直される. これは $f_{t,\varphi}(H_t)\cap\Lambda(\widehat{G})\neq\emptyset$ を意味しており, いま $(t,\varphi)\in\partial U(S)$ より $f_{t,\varphi}(H_t)=\Omega_0(G_\infty)$ であるから証明が終る. □

命題 3.3 の (1) ⇒ (2) を用いると, 松崎氏による次の結果を得る ([20, Section 7.4] 参照).

系 3.4 (Matsuzaki)**.** $(t,\varphi)\in\partial U(S)$ が exotic な元の集積点ならば, $\rho_{t,\varphi}(\pi_1(S))$ は APT をもつ.

Remark 3. $(t,\varphi)\in\partial U(S)$ に対して, $\rho_{t,\varphi}(\pi_1(S))$ は APT をもたないとき, 全退化群である (Bers [4]). 従って系 3.4 は, $\rho_{t,\varphi}(\pi_1(S))$ が APT なしの全退化群となる $(t,\varphi)\in\partial U(S)$ には, exotic な元が集積しないことを示している.

系 3.4 の証明. いま, $(t,\varphi)\in\partial U(S)$ に収束する exotic な射影構造の列 $\{(t_n,\varphi_n)\}$ が存在して, $\rho_{t,\varphi}(\pi_1(S))$ は APT をもたないと仮定する. このとき, Thurston による次の定理 (証明は, 例えば [20, Theorem 7.41]) より, $\{G_n=\rho_{t_n,\varphi_n}(\pi_1(S))\}$ の幾何学的極限 $\widehat{G}$ は代数的極限 $G_\infty=\rho_{t,\varphi}(\pi_1(S))$ と一致する. これは命題 3.3 に矛盾である. □

定理 3.5 (Thurston)**.** 忠実で離散的な表現の列 $\{\rho_n:\pi_1(S)\to\mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})\}$ が表現 ρ_∞ に代数的に収束しているとする. いま, $G_n=\rho_n(\pi_1(S))$ と $G_\infty=\rho_\infty(\pi_1(S))$ が APT をもたないとすると, $\{G_n\}$ は G_∞ に幾何学的に収束する.

系 3.4 を用いると, 次のことを示すことができる.

系 3.6. 任意の $t_0\in T(S)$ に対して, $\rho_{t_0,\varphi}(\pi_1(S))$ が幾何学的有限な b 群となる元 $(t_0,\varphi)\in\partial U(S)$ で, exotic な元が集積しないものが存在する.

証明. $T(S)$ の元 t_0 を一つ固定する. ここで $A_2(H_{t_0},\Gamma_{t_0})$ の部分集合 $T=\mathcal{Q}_0\cap A_2(H_{t_0},\Gamma_{t_0})$ を考える. T は Bers 埋め込み $T(S^*)\hookrightarrow A_2(H_{t_0},\Gamma_{t_0})$ の像と一致する. ここで S^* は S の向きを反転させたものである. T の $A_2(H_{t_0},\Gamma_{t_0})$ における境界 ∂T は $\partial U(S)\cap A_2(H_{t_0},\Gamma_{t_0})$ に含まれていることに注意する. ここで ∂T の部分集合

$$\partial' T=\{(t_0,\varphi)\in\partial T:\rho_{t_0,\varphi}(\pi_1(S))\text{ は APT なしの全退化群 }\},$$
$$\partial'' T=\{(t_0,\varphi)\in\partial T:\rho_{t_0,\varphi}(\pi_1(S))\text{ は幾何学的有限な b 群 }\}$$

は共に ∂T の中で dense であることが, それぞれ Bers [4], McMullen [21] によって知られている. $\partial'' T$ の点列 $\{(t_0,\varphi_n)\}$ で $(t_0,\psi)\in\partial' T$ に収束するものをとる. いま主張を否定すると, 対角線論法より (t_0,ψ) に収束する exotic な射影構造の列がとれる. これは系 3.4 に矛盾である. □

4. 定理 1.2 の証明

証明に入る前に, いくつか記号を定める. まず, Bers [3] によって, 自然な双正則写像

$$q : T(S) \times T(S^*) \to QF(S)$$

が存在することが知られている. $QF(S)$ の部分集合 $B_t = q(\{t\} \times T(S^*))$ は Bers slice とよばれる. S の写像類群を $\mathrm{Mod}(S)$ で表す.

4.1. **特別な場合の証明.** ここでは $\lambda = C \in \mathcal{S}$ の場合に, 定理 1.2 を証明する. すなわち, $\mathcal{Q}_C$ の点列で $\partial\mathcal{Q}_0$ の点に収束するものが存在することを示す.

始めに McMullen [22, Appendix] に従って, 定理 1.1 の証明を概説する. ここで本質的なのは, Dehn filling によって幾何学的に収束する表現列を作る手法 (cf. [2], [5], [6], [7], [16], [23]) と, この表現にさらに "ひねり" を加える, Anderson-Canary [2] の手法である. この定理 1.1 の証明の中で, "C に付随する" exotic な射影構造の列が構成される. これが $\mathcal{Q}_C$ の中の点列であることは後に示す.

定理 1.1 の証明. $C \in \mathcal{S}$ を 1 つとり固定する. 幾何学的有限なクライン群 $\widehat{G}$ で, そのクライン多様体 $N_{\widehat{G}} = (\mathbf{H}^3 \cup \Omega(\widehat{G}))/\widehat{G}$ が $S \times [0,1] - C \times \{1/2\}$ に位相同型なものをとる. ここで, $C \times \{1/2\}$ の管状近傍が, $N_{\widehat{G}}$ の rank 2 のカスプに対応している. カスプの基本群の生成元 $\langle \gamma, \delta \rangle$ を, γ は $C \times \{0\}$ とホモトピックで, δ は $S \times [0,1]$ の中で自明になるようにとる. ここで Thurston による 双曲的 Dehn 手術を無限体積をもつエンドがある場合に拡張した Comar の結果を用いる ([7], [2, Theorem 2.2]). すなわち $N_{\widehat{G}}$ のカスプにおいて, $(1,n)$ Dehn filling を施すことによって, 次をみたす表現の列 $\{\beta_n : \widehat{G} \to \mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})\}$ を得る:

- $G_n = \beta_n(\widehat{G})$ は擬フックス群,
- β_n の核は $\gamma^n\delta$ の正規閉包,
- $\{G_n\}$ は幾何学的に $\widehat{G}$ に収束,
- $\{\beta_n\}$ は代数的に $\widehat{G}$ の恒等写像に収束.

さて $f_0 : S \to S \times \{0\} \subset N_{\widehat{G}}$ を包含写像とする. これより誘導される $\pi_1(S)$ から $\widehat{G}$ の中への同型写像 $(f_0)_*$ を用いて, 全単射な擬フックス群表現の列 $\{\rho'_n = \beta_n \circ (f_0)_* : \pi_1(S) \to G_n\}$ を得る. ここで (β_n を少し動かすことにより) ∂N_{G_n} は恒に $\partial N_{\widehat{G}}$ に等角同値であるとしてよい. このとき, 上の表現列は $[\rho'_n] = q(u, \tau^n v)$ と書ける: ここで $(u,v) \in T(S) \times T(S^*)$ は $\partial N_{\widehat{G}}$ の複素構造に自明な marking を備えたものとし, $\tau \in \mathrm{Mod}(S)$ は C に関する Dehn twist である. (逆に $[\rho'_n] = q(u, \tau^n v)$ という列から出発して, この幾何学的極限 $\widehat{G}$ が上の性質をみたすことを示すことも可能である [16], [6].)

ここで, はめ込み写像 $f_C : S \to N_{\widehat{G}}$ で $S \times [0,1]$ の中では f_0 にホモトピックだが, $S \times [0,1] - C \times \{1/2\}$ の中ではそうではないものを次のように構成する: A を S における C の管状近傍とするとき, $f_C|(S-A)$ を $f_C(x) = (x,0)$ で定義し, $f_C(A)$ は $C \times \{1/2\}$ のまわりを一回巻きつくものとする. この f_C を C に関する wrapping map とよぶ (図 1 参照).

すると再び, 全単射な擬フックス群表現の列 $\{\rho_n = \beta_n \circ (f_C)_* : \pi_1(S) \to G_n\}$ を得て, これは $[\rho_n] = q(\tau^n u, \tau^{2n} v)$ と表される. ここで $\{\rho_n\}$ は $\rho_\infty = (f_C)_*$ に代数的に収束している. $\rho_\infty(\pi_1(S))$ を G_∞ とかく. いま G_∞ は幾何学的有限な b 群なので, Abikoff の定理 [1] より

図 1. C に関する wrapping map f_C

$[\rho_\infty]$ はある Bers slice B_t の境界上にある．そこで $hol(t,\varphi)$ となる射影構造 $(t,\varphi)\in\partial\mathcal{Q}_0$ をとる．するとホロノミー写像 hol は局所同相なので, (t,φ) に収束する $Q(S)$ 内の点列 $\{(t_n,\varphi_n)\}$ で, $hol(t_n,\varphi_n)=[\rho_n]$ をみたすものが存在する．

ここで $f_C : S\to N_{\widehat{G}}$ は $\partial N_{\widehat{G}}$ の中への写像にホモトピックでないので, G_∞ は $N_{\widehat{G}}$ のどちらの成分の基本群にも対応しない．従って $\Omega_0(G_\infty)\cap\Lambda(\widehat{G})\neq\emptyset$ である．よって命題 3.3 より (t_n,φ_n) は exotic であることがわかり, 定理 1.1 の証明が終る． □

上で構成した exotic な射影構造の列 $\{(t_n,\varphi_n)\}$ が, n が十分大きいとき $\mathcal{Q}_C$ に含まれることを示す．すなわち, $\lambda_n\in\mathcal{ML}_{\mathbf{Z}}(S)$ を $(t_n,\varphi_n)\in\mathcal{Q}_{\lambda_n}$ となるように取るとき, $\lambda_n\equiv C$ $(n\gg 0)$ を示したい．まず, $f_{t,\varphi}(H_t)=\Omega_0(G_\infty)$ であるので集合 $\Omega_0(G_\infty)\cap\Lambda(\widehat{G})$ をより詳しく調べることにより, 次のことがわかる (図 2, 図 3 参照).

補題 4.1. S_t の部分集合 $f_{t,\varphi}^{-1}(\Lambda(\widehat{G}))/\mathit{\Gamma}_t$ は 2 つの連結成分より成り, 核が C にホモトピックな円環に含まれる． □

擬等角写像 $\omega_n : S_t\to S_{t_n}$ を補題 3.2 のように取る．以下, 簡単のため

$$\Lambda_n=\omega_n^{-1}(f_{t_n,\varphi_n}^{-1}(\Lambda(G_n))/\mathit{\Gamma}_{t_n}),\ \ \widehat{\Lambda}=f_{t,\varphi}^{-1}(\widehat{G})/\mathit{\Gamma}_t$$

と書く．補題 3.2 より $\{\Lambda_n\}$ は $\widehat{\Lambda}$ にハウスドルフ収束している．この事実と補題 4.1 より, 十分大きな n に対して $f_{t_n,\varphi_n}^{-1}(\Lambda(G_n))/\mathit{\Gamma}_{t_n}\subset S_{t_n}$ は C にホモトピックな 2 つの単純閉曲線から成り, 従って補題 2.3 より $\lambda_n\equiv C$ $(n\gg 0)$ がいえるであろうと期待される．実際, 次のことは容易にわかる．

補題 4.2. 十分大きな n に対して $\lambda_n\in\{kC : k\in\mathbf{N}\}\subset\mathcal{ML}_{\mathbf{Z}}(S)$.

証明. S_t において, 核が C にホモトピックな円環 A で $\widehat{\Lambda}$ を含むものをとり, $K=S_t-A$ とおく．いまある部分列 $\{n_j\}$ で $\lambda_{n_j}\notin\{kC : k\in\mathbf{N}\}$ をみたすものがあったとする．このとき補題 2.3 における Λ_{n_j} の特徴付けより, $\Lambda_{n_j}\cap K\neq\emptyset$ $(j\gg 0)$ がわかる．K はコンパクトであるから, 任意の点列 $\{z_j\in\Lambda_{n_j}\cap K\}$ は集積点 $z_\infty\in K$ をもつ．しかし一方で $\{\Lambda_n\}$ は $\widehat{\Lambda}$ にハウスドルフ収束しているので, $z_\infty\in\widehat{\Lambda}$ である．これは $\widehat{\Lambda}\cap K=\emptyset$ に矛盾． □

図 2. $\Lambda(\widehat{G})$ と $\Omega_0(G_\infty)$ (影の部分)

図 3. S_t の部分集合 $f_{t,\varphi}^{-1}(\Lambda(\widehat{G}))/\Gamma_t$

ここで $[\rho_n] = q(\tau^n u, \tau^{2n} v)$ であったので, リーマン面上の Dehn twist を与える Beltrami 微分が具体的に書けること (cf. [27]), 特にその support がある程度制限できることを用いると次の補題が証明できる.

補題 4.3. ある正定数 m_0 が存在して, 任意の n に対して次が成り立つ. S_{t_n} において, $f_{t_n,\varphi_n}^{-1}(\Lambda(G_n))/\mathit{\Gamma}_{t_n}$ の任意の 2 つの連結成分を結ぶ任意の曲線は, 核が C にホモトピックで modulus が m_0 以上の円環を必ず横切る. □

ここで円環 A の modulus $m(A)$ は, A が $\{z \in \mathbf{C} : 1 < |z| < c\}$ と等角同値であるとき $(2\pi)^{-1}\log c$ で定められる. いま ω_n の歪曲度は 1 に収束するので, 十分大きな n に対して上の補題 4.3 における円環を ω_n によって S_t に引き戻したものも, ほぼ同じ modulus をもっている. 従って, S_t における Λ_n に対しても補題 4.3 と同様の主張を得る. このとき次の補題 4.4 を用いると S_t において Λ_n の任意の 2 つの連結成分の双曲距離は, n に依らず一様に下からおさえられることがわかる. このことから容易に $\lambda_n \equiv C$ $(n \gg 0)$ が導かれ証明が終る.

補題 4.4. $t \in T(S), C \in \mathcal{S}$ とする. S_t における円環領域 A で, ∂A が C にホモトピックな 2 つの単純閉曲線 C_1, C_2 から成るものに対して次が成り立つ,

$$d_t(C_1, C_2) > \frac{l_t(C)}{8\pi}\exp\left(-\frac{2\pi^2}{l_t(C)} - \frac{\pi^2}{m(A)}\right).$$

ここで $d_t(C_1, C_2) = \inf\{d_t(z_1, z_2) : z_j \in C_j (j = 1, 2)\}$ であり, $d_t(\cdot, \cdot)$ は S_t における双曲距離を表す. また $l_t(C)$ は S_t における閉測地線 C の双曲的長さである. □

4.2. **一般の場合の証明.** 一般の $\lambda = \sum_{j=1}^{l} n_j C_j \in \mathcal{ML}_{\mathbf{Z}}(S)$ に対しても, 上と同様の議論ができる. まず, 幾何学的有限なクライン群 $\widehat{G}$ で, そのクライン多様体 $N_{\widehat{G}}$ が $S \times [0,1] - \cup_{j=1}^{l} C_j \times \{1/2\}$ と同相であるものをとる. 続いて, はめ込み写像 $f_\lambda : S \to N_{\widehat{G}}$ を次のように構成する: S から全ての C_j の管状近傍を除いたところは包含写像により $S \times \{0\}$ の中に写し, 各 C_j の管状近傍の像は $C_j \times \{1/2\}$ に n_j 回巻きついている. このはめ込み写像を λ に関する wrapping map とよぶ.

ここで, 全てのカスプにおいて同時に $(1, n)$ Dehn filling を施すことで, 以前と同様に擬フックス群への全射準同型の列 $\{\beta_n : \widehat{G} \to G_n\}$ を得る. さらに $\{\rho_n = \beta_n \circ (f_\lambda)_*\}$ は代数的に $\rho_\infty = (f_\lambda)_*$ に収束しており, 対応して $Q(S)$ 内の点列 $\{(t_n, \varphi_n)\}$ で (t, φ) に収束するものがとれる.

ここで補題 4.1 と同様にして, S_t の部分集合 $f_{t,\varphi}^{-1}(\Lambda(\widehat{G}))/\mathit{\Gamma}_t$ は, 各 j について C_j の中に可縮な $2n_j$ 個の連結成分から成ることが示せる. 従って十分大きな n に対して, $(t_n, \varphi_n) \in \mathcal{Q}_\lambda$ となることがわかる.

以上で定理 1.2 の証明を終る.

Remark 4. 閉集合 $\overline{\mathcal{Q}_0} \cap \overline{\mathcal{Q}_\lambda}$ の形を正確に理解するのは難しいが, $P(S)$ においてこれがコンパクト集合でないことは容易に見ることができる.

5. 定理 1.3 の証明

定理 1.3 の証明のために, 等しい代数的極限をもち, 異なる幾何学的極限をもつようないくつかの表現列を組織的に構成したい. その土台となるのが次の補題 5.1 である.

まず記号の準備をする. クライン群 G に対して, $M_G = \mathbf{H}^3/G$ と書く. これはクライン多様体 $N_G = (\mathbf{H}^3 \cup \Omega(G))/G$ の内部である. 以下, 任意の wrapping map は, ホモトピーで動かすことによりクライン多様体の内部への写像だとする.

任意の $\lambda = \sum_{j=1}^{l} n_j C_j \in \mathcal{ML}_{\mathbf{Z}}(S)$ と任意の自然数の列 $\mathbf{k} = \{k_1, \dots, k_l\}$ の組 $(\lambda, \mathbf{k})$ に対して, 新しい $\mathcal{ML}_{\mathbf{Z}}(S)$ の元 を

$$\lambda/\mathbf{k} = \sum_{j=1}^{l} [n_j/k_j] C_j$$

で定める. ここで $[n_j/k_j]$ は n_j/k_j を越えない最大の整数. この記号のもとに, 次が成り立つ.

補題 5.1. 任意の $\lambda = \sum_{j=1}^{l} n_j C_j \in \mathcal{ML}_{\mathbf{Z}}(S)$ と任意の自然数の列 $\mathbf{k} = \{k_1, \dots, k_l\}$ に対して, 幾何学的有限なクライン群 $\widehat{G}$ と $\widehat{G}'$ で次をみたすものが存在する:

- $N_{\widehat{G}}$ と $N_{\widehat{G}'}$ は共に $S \times [0,1] - \bigcup_{j=1}^{l} C_j \times \{1/2\}$ に位相同型,
- λ に関する wrapping map $f_\lambda : S \to M_{\widehat{G}}$ と, $\lambda' = \lambda/\mathbf{k}$ に関する wrapping map $f_{\lambda'} : S \to M_{\widehat{G}'}$ は共役を除いて同じ表現を誘導する, すなわち $[(f_\lambda)_*] = [(f_{\lambda'})_*]$.

証明. 始めに幾何学的有限なクライン群 $\widehat{G}$ で, $N_{\widehat{G}}$ が $S \times [0,1] - \bigcup_{j=1}^{l} C_j \times \{1/2\}$ に位相同型となるものを 1 つとる. $\bar{\lambda} = \sum_{j=1}^{l} m_j C_j \in \mathcal{ML}_{\mathbf{Z}}(S)$ を $m_j = n_j - [n_j/k_j]k_j$ $(1 \le j \le l)$ で定める. ここで $0 \le m_j < k_j$ $(1 \le j \le l)$ である. Wrapping map $f_{\bar{\lambda}} : S \to M_{\widehat{G}}$ を考え, $(f_{\bar{\lambda}})_*(\pi_1(S))$ を G と書く. すると G は b 群で, M_G は $S \times [0,1]$ の内部に同相である. さらに自然な射影 $p_1 : M_G \to M_{\widehat{G}}$ により, $f_{\bar{\lambda}}$ はホモトピー同値写像 $\widetilde{f}_{\bar{\lambda}} : S \to M_G$ に持ち上がる.

$M_{\widehat{G}}$ の rank 2 カスプの基本群の生成系 $\langle \gamma_j, \delta_j \rangle$ を以前と同様にとるのだが, ここではさらに $\gamma_j \in G$ を仮定する. いま, $\widehat{G}$ の部分群

$$\widehat{G}' = \langle G, \delta_1^{k_1}, \dots, \delta_l^{k_l} \rangle$$

を考える. ここで $0 \le m_j < k_j$ $(1 \le j \le l)$ であったので Klein-Maskit の組合せ定理 II [19, Theorem E.5 (xi)] が適用できて $N_{\widehat{G}'}$ は $S \times [0,1] - \bigcup_{j=1}^{l} C_j \times \{1/2\}$ に同相となる. さらに自然な射影 $p_2 : M_G \to M_{\widehat{G}'}$ によって M_G における $S \times \{0\}$ に対応するエンドの近傍は $M_{\widehat{G}'}$ における $S \times \{0\}$ に対応するエンドの近傍に同相に写される. 従って $p_2 \circ \widetilde{f}_{\bar{\lambda}}$ は包含写像 $f_0 : S \to S \times \{1/4\} \subset M_{\widehat{G}'}$ にホモトピックである.

ここで自然な射影 $p_3 : M_{\widehat{G}'} \to M_{\widehat{G}}$ を考える. まず $p_3 \circ f_0$ が $f_{\bar{\lambda}}$ にホモトピックであることに注意する. また $M_{\widehat{G}'}$ における $C_j \times \{1/2\}$ の管状近傍への p_3 の制限は, $M_{\widehat{G}}$ における $C_j \times \{1/2\}$ の管状近傍への k_j-葉の被覆写像である. ここで wrapping map $f_{\lambda'} : S \to M_{\widehat{G}'}$ を以前と同様に $f_0 : S \to M_{\widehat{G}'}$ から構成すると, $p_3 \circ f_{\lambda'}$ は wrapping map $f_\lambda : S \to M_{\widehat{G}}$ にホモトピックであることがわかる. 従って $[(p_3 \circ f_{\lambda'})_*] = [(f_\lambda)_*]$ であり $(p_3)_* : \widehat{G}' \to \widehat{G}$ は包含写像なので $[(f_{\lambda'})_*] = [(f_\lambda)_*]$ を得る. □

補題 5.1 より, 定理 1.3 は直ちに従う.

定理 1.3 の証明. 有限集合 $\{\lambda_i\}_{i=1}^{m} \subset \mathcal{ML}_{\mathbf{Z}}(S)$ が $i(\lambda_j, \lambda_k) = 0$ $(\forall j, k \in \{1, \dots, m\})$ をみたしているとする. このとき容易に, $\mathcal{ML}_{\mathbf{Z}}(S)$ の元 $\lambda = \sum_{j=1}^{l} n_j C_j$ と自然数の列 $\mathbf{k}_i = \{k_1^{(i)}, \dots, k_l^{(i)}\}$ で $\lambda_i = \lambda/\mathbf{k}_i$ $(\forall i)$ をみたすものを見つけることができる. すると補題 5.1 より, クライン群 $\widehat{G}, \widehat{G}_i$ $(i = 1, \dots, m)$ が存在して, $f_\lambda : S \to M_{\widehat{G}}$ と $f_{\lambda_i} : S \to M_{\widehat{G}_i}$ は同じ表現を誘導する；すなわち $[(f_\lambda)_*] = [(f_{\lambda_i})_*]$ $(\forall i)$ が成り立つ. ここで $hol(t, \varphi) = [(f_\lambda)_*]$ をみ

たす $(t,\varphi)\in\partial\mathcal{Q}_0$ をとる. $M_{\widehat{G}_i}$ の全てのカスプにおいて同時に $(1,n)$ Dehn filling を施すことにより, (t,φ) に収束する $\mathcal{Q}_{\lambda_i}$ 内の列 $\{(t_n^{(i)},\varphi_n^{(i)})\}$ が構成されるので, 定理 1.3 の主張を得る. □

参考文献

[1] W. Abikoff, *On boundaries of Teichmüller spaces and on kleinian groups:III*, Acta Math. **134** (1975), 211–237.

[2] J. W. Anderson and R. D. Canary, *Algebraic limits of Kleinian groups which rearrenge the pages of a book*, Invent. Math. **126** (1996), 205-214.

[3] L. Bers, *Simultanious uniformization*, Bull. Amer. Math. Soc. **66** (1960), 94–97.

[4] ———, *On boundaries of Teichmüller spaces and on kleinian groups:I*, Ann. of Math. **91** (1970), 570-600.

[5] F. Bonahon and J. P. Otal, *Variétés hyperboliques à géodésiques arbitrairement courtes*, Bull. L.M.S. **20** (1988), 255–261.

[6] J. F. Brock, *Iteration of mapping classes on a Bers slice: examples of algebraic and geometric limits of hyperbolic 3-manifolds*, Contemporary Math. **211** (1997), 81–106.

[7] T. D. Comar, *Hyperbolic Dehn surgery and convergence of Kleinian groups*, Ph. D. Thesis, University of Michigan, 1996.

[8] C. J. Earle, *On variation of projective structures*, Riemann surfaces and related topics, Ann. Math. Studies **97** (1981), 87–99.

[9] D. M. Gallo, *Deforming real projective structures*, Ann. Acad. Sci. Fenn. **22** (1997), 3–14.

[10] W. M. Goldman, *Projective structures with Fuchsian holonomy*, J. Diff. Geom. **25** (1987), 297-326.

[11] D. A. Hejhal, *Monodromy groups and linearly polymorphic functions*, Acta Math. **135** (1975), 1–55.

[12] K. Ito, *Exotic projective structures and boundaries of quasi-Fuchsian spaces*, preprint.

[13] T. Jørgensen, *On cyclic groups of Mobius transformations*, Math. Scand. **33** (1973), 250–260.

[14] ———, *On discrete groups of Möbius transformations*, Amer. J. Math. **98** (1986), 739–749.

[15] Y. Kamishima and S. P. Tan, *Deforming spaces on geometric structures*, Aspects of Low Dimensional Manifolds, advanced Studies in Pure Mathematics 20, Kinokuniya Co., 1992, 263–299.

[16] S. P. Kerckhoff and W. P. Thurston, *Non-continuity of the action of the modular group at Bers' boundary of Teichmuller space*, Invent. Math. **100** (1990), 25-47.

[17] I. Kra, *Deformations of Fuchsian groups*, Duke Math. J. **36** (1969), 537–546.

[18] B. Maskit, *On a class of Kleinian groups*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I **442** (1969), 1-8.

[19] ———, *Kleinian groups*, Springer-Verlag, 1988.

[20] K. Matsuzaki and M. Taniguchi, *Hyperbolic manifolds and Kleinian groups*, Oxford University Press, 1998.

[21] C. T. McMullen, *Cusps are dence*, Ann. of Math. **133** (1991), 217-247.

[22] ———, *Complex earthquakes and Teichmuller theory*, J. Amer. Math. Soc. **11** (1998), 283-320.

[23] K. Ohshika, *Geometric behaviour of Kleinian groups on boundaries for deformation spaces*, Quart. J. Math. Oxford **43** (1992), 97–111.

[24] H. Shiga and H. Tanigawa, *Projective structures with discrete holonomy representations*, Trans. Amer. Math. Soc. (to appear).

[25] D. P. Sullivan, *Quasiconformal homeomorphisms and dynanics II: structural stability implies hyperbolicity of Kleinian groups*, Acta Math. **155** (1985), 243–260.

[26] H. Tanigawa, *Grafting, harmonic maps and projective structures on surfaces*, J. Diff. Geom. **47** (1997), 399-419.

[27] S. Worpert, *The Fenchel-Nielsen deformation*, Ann. of Math. **115** (1982), 501-528.